महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई
(स्वायत्त) (ISO 9001:2015) (ISO/IEC 27001:2013)

अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञान पदविका

शिक्षण पुस्तिका
(Learning Material)

MATHEMATICS FOR MACHINE LEARNING
(314320)

K Scheme

मॅथेमॅटिक्स फॉर मशीन लर्निंग

संगणक अभियांत्रिकी गट
(के स्कीम)

मराठी–इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम
(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानातील चौथे सत्र पदविका)

शिक्षण पुस्तिका

(Learning Material)

मॅथेमॅटिक्स फॉर मशीन लर्निंग

Mathematics for Machine Learning

(314320)

संगणक अभियांत्रिकी गट

(के-स्कीम)

K-Scheme

मराठी-इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम

(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानातील चौथे सत्र पदविका)

महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई

(स्वायत्त)(ISO 9001:2015) (ISO/IEC 27001:2013)

मॅथेमॅटिक्स फॉर मशीन लर्निंग

Mathematics for Machine Learning

(314320)

मार्गदर्शक

प्रा. विजय नामदेवराव कुकरे
विभागप्रमुख, संगणक अभियांत्रिकी

प्रकल्प समन्वयक

प्रा. विजय नामदेवराव कुकरे
विभागप्रमुख, संगणक अभियांत्रिकी

संकलक

प्रा. दिपक पांडुरंग दिवटे
अधिव्याख्याता (मॅथेमॅटिक्स)
प्रा. डि. ए. धूम्मा
अधिव्याख्याता (मॅथेमॅटिक्स)
प्रा. के. पी. चोपडा
अधिव्याख्याता (मॅथेमॅटिक्स)

महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ

(स्वायत्त) (ISO: ९००१:२०१५) (ISO/IES: २७००१-२०१३)

शासकीय तंत्रनिकेतन इमारत, चौथा मजला, ४९, खेरवाडी, बांद्रा (पूर्व), मुंबई - ४०० ०५१.

दूरध्वनी क्र.: ०२२-६२५४२१७० / १६१

Email : director@msbte.com Web : www.msbte.org.in

प्रास्ताविक

महाराष्ट्र राज्यातील पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षणामध्ये विद्यार्थ्यांचे रोजगार कौशल्य विकसित करून विद्यार्थ्यांचा सर्वांगीण विकास घडवून आणण्याकरिता महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ कटिबद्ध आहे. उद्योगधंद्यातील बदलत्या तंत्रज्ञानाशी संबंधित गरजा लक्षात घेऊन महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाकडून पदविका अभ्यासक्रम वेळोवेळी अद्यावत करण्यात येतो . अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रम शिकत असतांना संकल्पनात्मक ज्ञान, सुसंगत संदर्भ, प्रश्न विचारणे, विश्वसनिय पुरावे, कारणमीमांसा आणि सुस्पष्ट निकष यांचा वापर करून अर्थाची उकल करण्याची, विश्लेषण व मूल्यमापन करण्याची तसेच तर्काने अनुमान काढण्याची क्षमता म्हणजेच चिकित्सक विचार विद्यार्थ्यांमध्ये अधिक दृढ होतील असा मला विश्वास आहे. जेव्हा विद्यार्थी ज्ञान मिळवण्याच्या माध्यमाशी पूर्णपणे परिचित आणि सोयीस्कर असतात, तेव्हा त्यांच्यासाठी वर्गातील चर्चेत भाग घेणे सोपे होते, संकल्पनात्मक व सैद्धांतिक बाबींचे आकलन परिपूर्ण होते, संज्ञानात्मक क्षमता सुधारते आणि त्यांचा आत्मविश्वास देखील वाढतो या सर्व गोष्टींचा विचार करून मंडळाकडून शैक्षणिक सामुग्रीची निर्मिती करण्यात आलेली आहे . भारत देश हा खेड्यापाड्यातून विकसित झालेला देश असून ग्रामीण भागातील विद्यार्थ्यांना तांत्रिक शिक्षण घेतांना भाषेचा अडसर न येता तांत्रिक बाबींचा आशय समजून घेणे शक्य होईल या दृष्टिकोनातून महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाने पदविका स्तरावरील तांत्रिक शिक्षणाकरीता विद्यार्थ्यांना मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय शैक्षणिक वर्ष २०२१-२२ पासून उपलब्ध करून दिलेला आहे .

राष्ट्रीय शैक्षणिक धोरण-२०२० प्रादेशिक भाषेतील शिक्षणास प्रोत्साहन देते, ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना तांत्रिक अभ्यासक्रमांसाठी प्रादेशिक भाषांतुन शिक्षणाचे माध्यम निवडता येते. सदर धोरणामुळे प्रादेशिक भाषांमध्ये तांत्रिक सामग्री आणि अभ्यास सामग्रीचा विकास आणि भाषांतर निर्माण करण्याची आवश्यकता आहे . त्यास अनुसरून मंडळाने मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय द्वितीय व तृतीय वर्षाकरिताही उपलब्ध करून देण्यात आला आहे. तसेच त्याकरिताची शैक्षणिक सामग्रीही संबंधीत भागधारकरांना उपलब्ध करून देण्यात येत आहे.

पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षण अधिक दर्जेदार करण्यासाठी महाराष्ट्रातील अनुभवी व तज्ञ अध्यापकांनी व्यवहारिक मराठी भाषा व इंग्रजी भाषेतील तांत्रिक शब्दावली यांचा वापर करून मराठी - इंग्रजी भाषेचा सुवर्णमध्य साधण्याचा प्रयत्न केलेला आहे. मंडळाच्या स्तरावर गठीत सुकाणू समितीमार्फत सदर शैक्षणिक सामुग्रीचा दर्जा, तसेच इतर बाबींची तपासणी करण्यात आलेली आहे. त्यामुळे सदर शैक्षणिक सामुग्री अधिक सम्पन्न झालेली असून विद्यार्थी त्यांच्या व्यक्तिमत्त्वाचा सुसंवादी आणि सर्वांगीण विकास साधतील. परिणामतः विश्वस्तरीय मनुष्यबळाच्या गरजा पूर्ण करण्यात महाराष्ट्र राज्य अग्रेसर राहील व पर्यायाने राष्ट्रनिर्मिती करीता निश्चितच हातभार लागेल , असा मला विश्वास आहे.

अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रमातील प्रमुख विषयांची मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक शैक्षणिक सामुग्री बनविण्यासाठी अध्यापक व सुकाणू समितीचे सदस्य यांनी दर्शविलेले समर्पण व वचनबद्धता कौतुकास पात्र आहे , या सर्वांचे मी मनः पूवक अभिनंदन करतो !

(प्रमोद नाईक)
संचालक
म. रा. तंत्र शिक्षण मंडळ, मुंबई.

अनुक्रमणिका

अ. नु.	युनिटचे नाव	पृष्ठ क्रमांक
1	पार्शल डिफरेन्शिएशन (Partial Differentiation)	1
2	मॅट्रिसेस (Matrices)	23
3	व्हेक्टर्स आणि टेन्सर्स (Vectors and Tensors)	61
4	न्यूमेरिकल डिफरेन्शिएशन आणि इंटिग्रेशन (Numerical Differentiation and Integration)	83
5	लिनिअर प्रोग्रामिंग प्रॉब्लेम (Linear Programming Problems)	96

MAHARASHTRA STATE BOARD OF TECHNICAL EDUCATION * MUMBAI

युनिट-1
पार्शल डिफरेन्शिएशन
(Partial Differentiation)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome):

CO1: ऑप्टिमम सोल्युशन मिळविण्यासाठी पार्शल डिफरेन्शिएशनची संकल्पना वापरा.

घटक निष्पत्ती (Theory Learning outcome):

1. प्रथम ऑर्डर, द्वितीय ऑर्डर आणि मिश्रित ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटीव्ह काढा.
2. होमोजिनियस फंक्शनसाठी युलरचे थेरोम सत्यापित करा.
3. फंक्शनच्या मॅक्सिमम आणि मिनिमम व्हॅल्यू काढा.
4. लॅरेंजच्या अनिर्धारित मल्टीप्लायर्सचा वापर करून दिलेल्या अटीच्या अधीन असलेल्या फंक्शनचे मॅक्सिमम आणि मिनिमम मूल्य शोधा.

1.1 परिचय (Introduction)

पार्शल डेरिव्हेटीव्ह हे कृत्रिम बुद्धिमत्ता (Artificial Intelligence) (ए आय) आणि मशीन लर्निंग (Machine Learing) (एम एल) मध्ये मूलभूत भूमिका बजावते, विशेषत: ट्रेनिंग मॉडेलमध्ये ग्रेडियंट डिसेंट ऑप्टिमायझेशन सारख्या ऑप्टिमायझेशन आणि शिकण्याच्या प्रक्रियेत , न्यूरल सिस्टममध्ये (Neural System) ब्याक प्रोपोगेशन, कम्प्युटर व्हिजन (Computer Vision) मध्ये संवर्धन आणि डीप लर्निंग (Deep Learning),प्रॉबेबिलिटी (Probability) आणि सांख्यिकीय मॉडेल (Statistical Models), व्हेक्टर मेकॅनिक्सला समर्थन (Support Vector Mechanics), कोन्व्हेक्स फंक्शनमध्ये ऑप्टिमायझेशन (optimization in convex function), इलेक्ट्रिकल अभियांत्रिकीमध्ये काही समस्या (लाईन चे ट्रान्समिशन) आणि अजून बरेच. म्हणूनच हे आवश्यक आहे की एआय आणि एमएलच्या विद्यार्थ्याला पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्जची मूलभूत व्याख्या आणि पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्जसह ऑपरेशनची स्पष्ट कल्पना असणे आवश्यक आहे.

1.2 पार्शल डेरिव्हेटीव्ह (Partial derivative) :

1.2.1 प्रथम ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटीव्ह (Partial derivative of first order).

Definition: जर f (x, y) हे x आणि y दोन स्वतंत्र व्हेरिएबल चे फंक्शन(function) असतील तर .

- f(x, y) चे पार्शल डेरिव्हेटीव्ह विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , y स्थिर म्हणून घेऊन . $\frac{\partial f}{\partial x}$ or f_x द्वारे दर्शविले जाते आणि त्याला आपण डेबा f बाय डेबा x असे वाचतो (किंवा डेल f बाय डेल x असेही वाचतो) .

  $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]$, जेथे Δx ही x मधील लहान वाढ आहे .

- f(x, y) चे पार्शल डेरिव्हेटीव्ह विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , x स्थिर म्हणून घेऊन , $\frac{\partial f}{\partial y}$ or f_y द्वारे दर्शविले जाते आणि त्याला आपण डेबा f बाय डेबा y असे वाचतो (किंवा डेल f बाय डेल y असेही वाचतो)

  $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right]$ जेथे Δy ही y मधील लहान वाढ आहे .

  $\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial f}{\partial y}$ ला प्रथम ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्ज म्हणतात .

1.2.2 पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्जचे नियम (Rules of partial derivatives) जर u आणि v हे दोन व्हेरिएबल्सचे फंकशन असतील तर

नियम 1: पार्शल डेरिव्हेटिव्ह् ऑफ सम किंवा डिफरेन्स: (Derivative of sum / difference)

$\frac{\partial}{\partial x}(u \pm v) = \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}(u \pm v) = \frac{\partial u}{\partial y} \pm \frac{\partial u}{\partial y}$

नियम 2: पार्शल डेरिव्हेटिव्ह् ऑफ प्रॉडक्ट: (Derivative of product)

$$\frac{\partial}{\partial x}(u \times v) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{आणि} \quad \frac{\partial}{\partial y}(u \times v) = u\frac{\partial v}{\partial y} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

नियम 3: पार्शल डेरिव्हेटिव्ह् ऑफ कोशंट: (Derivative of Quotient)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2} \quad \text{आणि} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}$$

पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्ज काढताना आपणस कधी कधी चैन रुल सुध्दा वापरावा लागतो.

पार्शल डेरिव्हेटिव्ह्ज काढण्यासाठी वापरले जाणारे सुत्रे: (Formula of partial derivatives:)

1. $\frac{\partial}{\partial x}(k) = 0$ $\qquad \frac{\partial}{\partial y}(k) = 0$

2. $\frac{\partial}{\partial x}\big(f(y)\big) = 0$ येथे f(y) मध्ये x समाविष्ट नाही

   $\frac{\partial}{\partial y}\big(f(x)\big) = 0$ येथे f(x) मध्ये y समाविष्ट नाही

   $\frac{\partial}{\partial x}(ku) = k\,\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}(ku) = k\,\frac{\partial u}{\partial y}$

3. $\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)]^n = n\,[f(x,y)]^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)]^n = n\,[f(x,y)]^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y}$

4. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f(x,y)}\right) = \frac{-1}{\left(f(x,y)\right)^2}\,\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{f(x,y)}\right) = \frac{-1}{\left(f(x,y)\right)^2}\,\frac{\partial f}{\partial y}$

5. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{f(x,y)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{f(x,y)}}\,\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{f(x,y)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{f(x,y)}}\,\frac{\partial f}{\partial y}$

6. $\frac{\partial}{\partial x}(\log(f(x,y)) = \frac{1}{f(x,y)}\,\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}(\log(f(x,y)) = \frac{1}{f(x,y)}\,\frac{\partial f}{\partial y}$

7. $\frac{\partial}{\partial x}e^{f(x,y)} = e^{f(x,y)}\,\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}e^{f(x,y)} = e^{f(x,y)}\,\frac{\partial f}{\partial y}$

8. $\frac{\partial}{\partial x}a^{f(x,y)} = a^{f(x,y)}loga\,\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}a^{f(x,y)} = a^{f(x,y)}loga\,\frac{\partial f}{\partial y}$

9. $\frac{\partial}{\partial x}\sin\big(f(x,y)\big) = \cos\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}\sin\big(f(x,y)\big) = \cos\big(f(x,y)\big)\,\frac{\partial f}{\partial y}$

10. $\frac{\partial}{\partial x}\cos\big(f(x,y)\big) = -\sin\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}\cos\big(f(x,y)\big) = -\sin\big(f(x,y)\big)\,\frac{\partial f}{\partial y}$

11. $\frac{\partial}{\partial x}\tan\big(f(x,y)\big) = sec^2\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}\tan\big(f(x,y)\big) = sec^2\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial y}$

12. $\frac{\partial}{\partial x}\cot\big(f(x,y)\big) = -cosec^2\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}\cot\big(f(x,y)\big) = -cosec^2\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial y}$

13. $\frac{\partial}{\partial x}\sec(f(x,y)\,) = \sec f(x,y)\,tanf(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial}{\partial y}\sec(f(x,y)\,) = \sec f(x,y)\,.\tan f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$

14. $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{cosec}(f(x,y)\,) = -\ \mathrm{cosec}\,f(x,y)\,cotf(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}$

अशा प्रकारे आपण इन्व्हर्स ट्रिगॉनॉमेट्रीचे (Inverse trigonometry) पार्शल डेरिव्हेटीव्ह (parial derivatives) काढण्यासाठीचे सर्व सुत्रे लिहू शकतो.

उदाहरणे (फर्स्ट ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह):

Examples (First order partial derivatives)

उदाहरण 1: जर $f(x,y) = xy^2+xy + x^2$ शोधा : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

उत्तर: दिलेले $f(x,y) = xy^2+xy + x^2$ ------------------ -------1

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 + xy + x^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}xy^2 + \frac{\partial}{\partial x}x.y + \frac{\partial}{\partial x}x^2$$ ---- पार्शल डेरिव्हेटिव्ह् ऑफ सम

$$= y^2\frac{\partial}{\partial x}x + y\frac{\partial}{\partial x}x. + \frac{\partial}{\partial x}x^2$$

$$= y^2(1) + y(1). + 2x$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{y^2 + y + 2x}$$

आता, डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y, येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.

(Now, differentiating 1 partially w.r.t. y, by taking x as a constant.)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + xy + x^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}xy^2 + \frac{\partial}{\partial y}x.y + \frac{\partial}{\partial y}x^2$$ --- पार्शल डेरिव्हेटिव्ह् ऑफ सम

$$= x\frac{\partial}{\partial y}y^2 + x\frac{\partial}{\partial y}y. + \frac{\partial}{\partial y}x^2$$

$$= x.2y + x(1). + o$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x$$

उदाहरण 2: जर $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ शोधा: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

उत्तर: दिलेले $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ ---- -------1

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x, येथे y ला स्थिर ठेवले आहे .

(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\log(x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)$$ ------ चैन रूलचा नियम (chine rule)

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial x}y^2\right]$$ ------ पार्शल डेरिव्हेटिव्ह् ऑफ सम

$$= \frac{1}{x^2+y^2}[2x + 0]$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

आता, डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.

(Now, differentiating 1 partially w.r.t. y , by taking x as a constant.)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\log(x^2 + y^2)$$

$= \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)$ ------ चैन रूलचा नियम (Chain rule)

$= \frac{1}{x^2+y^2}\left[\frac{\partial}{\partial y}x^2+\frac{\partial}{\partial y}y^2\right]$ ------ पार्शल डेरिव्हेटिव्ह् ऑफ सम

$= \frac{1}{x^2+y^2}[0+2y]$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

उदाहरण

3: जर $f(x, y) = \sin(x^3y^5)$ शोधा : f_x आणि f_y

उत्तर: दिलेले $f(x, y) = \sin(x^3y^5)$ ---------------------1

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x, येथे y ला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sin(x^3y^5)$

$= \cos(x^3y^5)\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^5)$ चैन रूलचा नियम (Chain rule)

$= \cos(x^3y^5)y^5\frac{\partial}{\partial x}(x^3)$

$= \cos(x^3y^5)\ y^5\ 3x^2$

$$\therefore f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \mathbf{3x^2\ y^5}\cos(\mathbf{x^3y^5})$$

आता, डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.

(Now, differentiating 1 partially w.r.t. y , by taking x as a constant.)

$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sin(x^3y^5)$

$= \cos(x^3y^5)\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^5)$ चैन रूलचा नियम (chine rule)

$= \cos(x^3y^5)x^3\frac{\partial}{\partial x}(y^5)$

$= \cos(x^3y^5)\ x^3\ 5y^4$

$$\therefore f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \mathbf{5x^3\ y^4}\ \cos(\mathbf{x^3y^5})$$

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

Q.1. खाली दिलेल्या फंक्शनसाठी f(x, y), शोधा: $\frac{\partial f}{\partial x}$ or f_x , $\frac{\partial f}{\partial y}$ or f_y

1. $x^4 + x^2y + 16y^4$
2. $\sqrt{x^2+y^2}$
3. $x^4\ e^{4xy^2}$
4. sinx, siny, $\sin(x^2 + y^2)$

Q.2. If $\emptyset(t,s) = t^3 + 7s\,t^5$ शोधा: $\frac{\partial\emptyset}{\partial t}$, $\frac{\partial\emptyset}{\partial s}$

Q.3. If $u(x,y) = e^{x^2+y^2}$ show that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial x} = 2.\,u\,.\log u$

1.2.3 द्वितीय ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह : (Second order partial derivative)

जर f (x, y) हे x आणि y दोन स्वतंत्र व्हेरिएबल चे फंक्शन(function) आहेत, तर $\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial f}{\partial y}$ हे **फर्स्ट ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह आहेत .**

- जर आपण $\frac{\partial f}{\partial x}$ चा पुन्हा एकदा पार्शल डेरिव्हेटीव्ह विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , y स्थिर म्हणून घेऊन काढला , तर आपल्याला द्वितीय ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह प्राप्त होते. दुसऱ्या ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह हे $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ द्वारे दर्शविले जाते आणि त्याला आपण डेबा स्क्वेअर (square) f बाय डेबा x स्क्वेअर (square) असे वाचतो (किंवा डेल f बाय डेल x स्क्वेअर (square) असेही वाचतो).

  $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ------- द्वितीय ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह

- जर आपण $\frac{\partial f}{\partial y}$ चा पुन्हा एकदा पार्शल डेरिव्हेटीव्ह विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , x स्थिर म्हणून घेऊन काढला , तर आपल्याला द्वितीय ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह प्राप्त होते. दुसऱ्या ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह हे $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ द्वारे दर्शविले जाते आणि त्याला आपण डेबा स्क्वेअर (square) f बाय डेबा y स्क्वेअर (square) असे वाचतो (किंवा डेल f स्क्वेअर (square) बाय डेल y स्क्वेअर (square) असेही वाचतो).

  $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ----- द्वितीय ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह

उदाहरणे (**द्वितीय ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह**)

Examples (Second Order partial derivatives)

उदाहरण 1.4: जर **f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy** **शोधा:** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ **आणि** $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

उत्तर: दिलेले f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy ----------------1

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे .

(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as a constant)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3-3axy)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}x^3+\frac{\partial}{\partial x}y^3-\frac{\partial}{\partial x}3axy$$
$$= 3x^2+0-3ay$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-3ay \quad \text{---------2}$$

पुन्हा एकदा डिफरंशिएटिंग 2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x, येथे y ला स्थिर ठेवले आहे.

(again differentiating 2 partially w.r.t. x , by taking y as a constant)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-3ay)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}3x^2-\frac{\partial}{\partial x}3ay$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}3x^2-\frac{\partial}{\partial x}3ay$$
$$= 3\times 2x-3a(0)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \text{----------3}$$

आता, डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.

(Now, differentiating 1 partially w.r.t. y , by taking x as a constant.)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 - 3axy)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}x^3 + \frac{\partial}{\partial y}y^3 - \frac{\partial}{\partial y}3axy$$
$$= 0 + 3y^2 - 3ax(1)$$
$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax \quad \text{-------------4}$$

पुन्हा एकदा डिफरंशिएटिंग 4 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y, येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.
(again differentiating 4 partially w.r.t. y, by taking x as constant)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3ay)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}3y^2 - \frac{\partial}{\partial y}3ax$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}3y^2 - \frac{\partial}{\partial y}3ax$$
$$= 3 \times 2y - 3a(0)$$
$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \quad \text{------------------5}$$

उदाहरण 1.5: जर $\emptyset(x,y) = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ **, दाखवा** $\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} = 0$

उत्तर: दिलेले $\emptyset(x,y) = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ----------------1

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे .
(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \quad y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \quad y\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}\, y\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\therefore \frac{\partial\emptyset}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{--------------------2}$$

पुन्हा एकदा डिफरंशिएटिंग 2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे .
(again differentiating 2 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$
$$= -y\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]$$
$$= -y\left[\frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(1) - 1\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$
$$= -y\left[\frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(1) - 1(\frac{\partial}{\partial x}x^2+\frac{\partial}{\partial x}y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= -y\left[\frac{(x^2+y^2)(0)-\ 1(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= -y\left[\frac{-\ 1(2x)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{------------------3}$$

आता, डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.

(Now, differentiating 1 partially w.r.t. y , by taking x as a constant.)

$$\frac{\partial\emptyset}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \quad \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \quad \frac{1}{x}(1)$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2} \times \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{---------4}$$

पुन्हा एकदा डिफरंशिएटिंग 4 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे .

(again differentiating 4 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$= x\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]$$

$$= x\left[\frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(1)-\ 1\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= x\left[\frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(1)-\ 1(\frac{\partial}{\partial y}x^2+\frac{\partial}{\partial y}y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= x\left[\frac{(x^2+y^2)(0)-\ 1(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= x\left[\frac{-\ 1(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{-------5}$$

समीकरण 3 आणि 5 ची बेरीज करूयात ,

$$\frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\boxed{\therefore \frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} = 0}$$

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

Q.1. खाली दिलेल्या फंक्शनसाठी f(x, y), शोधा: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ or f_{xx} , $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ or f_{yy}

1. $3x^4 + 2x^3y^4 + 4y^7$

2. $x^2 \sin(4xy)$
3. Sin(4x) cos(3y)
4. $\log(x^2+y^2)$

1.2.4 मिश्रित ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह : (Mixed order partial derivatives)

जर f (x, y) हे x आणि y दोन स्वतंत्र व्हेरिएबल चे फंक्शन(function) आहेत, तर $\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial f}{\partial y}$ हे **फर्स्ट ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह आहेत**

- जर आपण $\frac{\partial f}{\partial x}$ चा पुन्हा एकदा पार्शल डेरिव्हेटीव्ह विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , x स्थिर म्हणून घेऊन काढला , तर आपल्याला मिश्रित ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह प्राप्त होते. मिश्रित ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह हे $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ द्वारे दर्शविले जाते आणि त्याला आपण डेबा स्क्वेअर (square) f बाय डेबा y डेबा x असे वाचतो (किंवा डेल स्क्वेअर (square) f बाय डेल y डेल x असेही वाचतो)

  $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)= \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ -------- मिश्रित ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह
- जर आपण $\frac{\partial f}{\partial y}$ चा पुन्हा एकदा पार्शल डेरिव्हेटीव्ह विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , y स्थिर म्हणून घेऊन काढला , तर आपल्याला मिश्रित ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह प्राप्त होते. मिश्रित ऑर्डरचे पार्शल डेरिव्हेटिव्ह हे $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ द्वारे दर्शविले जाते आणि त्याला आपण डेबा स्क्वेअर (square) f बाय डेबा x डेबा y असे वाचतो (किंवा डेल स्क्वेअरsquare) f बाय डेल x डेल y असेही वाचतो)

  $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ -------- मिश्रित ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह .

Result: दोन मिश्रित ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह समान असतात.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

उदाहरणे (मिश्रित ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह)

Examples (Mixed order partial derivatives)

उदाहरण 1.6: जर $u(x, y) = 3x^2y^4$ शोधा: $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ आणि $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

उत्तर: दिलेले $u(x, y) = 3x^2y^4$ ---------------1

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे yला स्थिर ठेवले आहे

(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^4)$$
$$= 3y^4\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$
$$= 3y^4(2x)$$
$$= 6xy^4$$
$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy^4 \quad\text{----------------2}$$

डिफरंशिएटिंग 2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे

(Differentiating 2 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6xy^4)$$
$$= 6x\frac{\partial}{\partial x}y^4$$
$$= 6x \times 4y^3$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 24xy^3$$ ------------------ 3

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.
(Now, differentiating 1 partially w.r.t. y , by taking x as a constant.)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^4)$$
$$= 3x^2 \frac{\partial}{\partial y} y^4$$
$$= 3x^2 \times 4y^3$$
$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^3$$ --------4

डिफरंशिएटिंग 4 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे.
(Now, differentiating 4 partially w.r.t. x , by taking y as a constant.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^3)$$
$$= 12y^3 \frac{\partial}{\partial y} x^2$$
$$= 12y^3 \times (2x)$$
$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 24xy^3$$ -----------5

उदाहरण 1.7: जर **w(x, y) = x siny + y sinx + xy** तर दाखवा $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

उत्तर: दिलेले u(x, y) = x siny + y sinx + xy ---------1

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे.
(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\text{xsiny} + \text{y sinx} + \text{xy}))$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\text{xsiny} + \frac{\partial}{\partial x}\text{y sinx} + \frac{\partial}{\partial x}\text{xy}$$
$$= \text{siny}\frac{\partial}{\partial x}\text{x} + \text{y}\frac{\partial}{\partial x}\text{sinx} + \text{y}\frac{\partial}{\partial x}\text{x}$$
$$= \text{siny}(1) + \text{y (cosx)} + \text{y (1)}$$
$$= \text{siny} + \text{y (cosx)} + \text{y)}$$ -------2

डिफरंशिएटिंग 2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे .
(Differentiating 2 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\text{siny}(1) + \text{y (cosx)} + \text{y (1)}\big)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\text{siny} + \frac{\partial}{\partial y}\text{y (cosx)} + \frac{\partial}{\partial y}\text{y}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\text{siny} + \text{cosx}\frac{\partial}{\partial y}\text{y} + \frac{\partial}{\partial y}\text{y}$$
$$= \text{cosy} + \text{cosx (1)} + \text{(1)}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1 + \text{cosx} + \text{cosy}$$ -------3

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.
(Now, differentiating 1 partially w.r.t. y , by taking x as a constant.)

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\big((\text{xsiny} + \text{y sinx} + \text{xy})\big)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\text{xsiny} + \frac{\partial}{\partial y}\text{y sinx} + \frac{\partial}{\partial y}\text{xy}$$

$= x\frac{\partial}{\partial y}\text{siny} + \text{sinx}\frac{\partial}{\partial y}\text{ y} + x\frac{\partial}{\partial y}\text{y}$

$= \text{xcosy} + \text{sinx}(1) + x(1)$

$\frac{\partial w}{\partial y} = \text{x cosy} + \text{sinx} + x$ ----4

डिफरंशिएटिंग 4 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे.

(Now, differentiating 4 partially w.r.t. x , by taking y as a constant.)

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\text{x cosy} + \text{sinx} + x)$

$= \frac{\partial}{\partial x}\text{x cosy} + \frac{\partial}{\partial x}\text{sinx} + \frac{\partial}{\partial x}x$

$= \text{cosy}\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial x}\text{sinx} + \frac{\partial}{\partial x}x$

$= \text{cosy}(1) + \text{cosx} + (1)$

$= 1 + \text{cosx} + \text{cosy}$

$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 1 + \text{cosx} + \text{cosy}$ -------5

समीकरण 3 आणि 5 पासून, आम्हाला मिळते

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

i.e. दोन मिश्रित ऑर्डर पार्शल डेरिव्हेटीव्ह समान असतात.

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

Q.1. खाली दिलेल्या फंक्शनसाठी f(x, y), . शोधा: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ or f_{yx} आणि $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ or f_{xy}

1. $x^2y^3 + x^4y$
2. $\text{xcosy} + y e^x$

Q.2. जर $u(x,y) = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^2}{x^3}$, तर दाखवा : $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

Q.3. जर $z(x,y) = \log(x^2+y^2)$, तर दाखवा : $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

1.3 होमोजिनियस फंक्शन : (Homogeneous function)

पद्धत 1 (Approach 1)

फंक्शन f(x, y) हे n डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे असे म्हणता येते, जर ते खालीलप्रमाणे लिहले जाऊ शकते.

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

उदाहरण 1.8: खालील फंक्शन होमोजिनियस आहे का नाही हे ठरवा. जर ते होमोजिनियस असेल, तर त्याची डिग्री शोधा.

$$\mathbf{f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2}$$

उत्तर: दिलेले $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

$f(tx, ty) = (tx)^2 + 2(tx)(ty) + (ty)^2$

$= t^2x^2 + 2(tx)(ty) + t^2y^2$

$= t^2[x^2 + 2xy + y^2]$

$\therefore f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$

f (x, y) हे 2 डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे.

b) $\mathbf{f(x,y)} = \boldsymbol{sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

उत्तर: दिलेले $f(x, y) = sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$f(tx, ty) = sin^{-1}\left(\frac{ty}{tx}\right)$

$= t^0 sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

∴ f (x, y) हे 0 डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे .

c) f (x,y) = $\boldsymbol{tan^{-1}(x) + tan^{-1}(y)}$

उत्तर: दिलेले f (x,y) = $tan^{-1}(x) + tan^{-1}(y)$

f (tx,ty) = $tan^{-1}(tx) + tan^{-1}(ty)$

f (tx,ty) $\neq t^n f(xy)$

∴ f (x,y) हे होमोजिनियस फंक्शन नाही .

पद्धत 2(Approach 2)

फंक्शन f(x, y) हे n डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे असे म्हणता येते, जर ते खालीलप्रमाणे लिहले जाऊ शकते ,

$f(x, y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ or $f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$

उदाहरण 1.9 खालील फंक्शन होमोजिनियस आहे का नाही हे ठरवा. जर ते होमोजिनियस असेल, तर त्याची डिग्री शोधा.

f(x,y) = $\boldsymbol{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}$

उत्तर: दिलेले f(x,y) = $\boldsymbol{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}$

$$= \frac{x^3\left[1+\frac{y^3}{x^3}\right]}{x^2\left[1+\frac{y^2}{x^2}\right]}$$

$$= \frac{x^{3-2}\left[1+\frac{y^3}{x^3}\right]}{\left[1+\frac{y^2}{x^2}\right]}$$

$$= x^1 \frac{\left[1+\frac{y^3}{x^3}\right]}{\left[1+\frac{y^2}{x^2}\right]}$$

$$= x^1 f\left(\frac{y}{x}\right)$$

∴ f (x,y) हे 1 डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे .

पद्धत 3 (Approach 3)

फंक्शन f(x, y) ला n डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे असे म्हणतात, जर प्रत्येक टर्ममधील x आणि y च्या निर्देशांकांची बेरीज समान असणे आवश्यक आहे.

उदाहरण 1.10: खालील फंक्शन होमोजिनियस आहे का नाही हे ठरवा. जर ते होमोजिनियस असेल, तर त्याची डिग्री शोधा.

f (x,y) = $\boldsymbol{x^3 + 3x^2y + y^3}$

उत्तर: दिलेले f (x,y) $= x^3 + 3x^2y + y^3$

$= x^3 + 3x^2y^1 + y^3$

$= x^3 + 3x^2y^1 + y^3$

प्रत्येक टर्ममधील x आणि y च्या निर्देशांकांची बेरीज 3 आहे .

∴ f (x,y) हे 3 डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे .

1.4 युलरचा सिद्धांत (Euler's theorem of function of two variables)

युलरचा सिद्धांत : जर फंक्शन f(x, y) हे n डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन असेल तर

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = n f$$

पुरावा (Proof): फंक्शन f(x, y) हे n डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे असे म्हणता येते, जर ते खालीलप्रमाणे लिहले जाऊ शकते ,

$f(x, y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ ------------------------1

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे .
(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \text{n}x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f^1\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \text{n}x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f^1\left(\frac{y}{x}\right) y \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{n}\, x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2} y f^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

दोन्ही बाजूंनी x ने गुणून ,

$$\text{x} \frac{\partial f}{\partial x} = x^1 \left[\text{n}\, x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2} y f^1\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$\text{x} \frac{\partial f}{\partial x} = \text{n}\, x^n f\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-1} y f^1\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{------2}$$

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे .
(Differentiating 1 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= x^n \frac{\partial}{\partial y} f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= x^n f^1\left(\frac{y}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right) \frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= x^n f^1\left(\frac{y}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right)(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{n-1} f^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

दोन्ही बाजूंनी y ने गुणून

$$\text{y} \frac{\partial f}{\partial y} = y\left(x^{n-1} f^1\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$\text{y} \frac{\partial f}{\partial y} = x^{n-1} y f^1\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{----------3}$$

2 आणि 3 ची बेरीज करू या.

$$\text{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \text{y} \frac{\partial f}{\partial y} = \text{n}\, x^n f\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-1} y f^1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} y f^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \text{n}\, x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \text{n f(x, y)}$$

$$\therefore \quad \text{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \text{y} \frac{\partial f}{\partial y} = \text{n f}$$ म्हणून सिद्ध झाले .

उदाहरणे (युलरचा सिद्धांत)

Examples

उदाहरण 1.11: दिलेल्या फंक्शन f(x, y) मध्ये युलरचा सिद्धांत व्हेरिफाय करा .

$$\text{f(x,y)} = (x)^3 + 4x^2y + y^3$$

उत्तर: दिलेले

$$\text{f(tx,ty)} = x^3 + 4x^2y + y^3 \qquad \text{---------} \qquad 1$$

$$\text{f(tx,ty)} = (tx)^3 + 4(tx)^2(ty) + (ty)^3$$

$$= t^3x^3 + 4(t^2x^2)ty + t^3y^3$$

$$= t^3[x^3 + 4x^2y + y^3]$$

$$\therefore \text{f(tx,ty)} = t^3 f(x, y)$$

∴ f (x, y) हे 3 डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे.

युलरचा सिद्धान्ता नुसार $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 3f$ --------2

$f(x,y) = x^3 + 4x^2y + y^3$

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे .

(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^3 + 4x^2y + y^3]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}x^3 + 4\frac{\partial}{\partial x}x^2y + \frac{\partial}{\partial x}y^3$$
$$= 3x^2 + 4y \times (2x) + 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 8xy \qquad \text{---------3}$$

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y, येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 1 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^3 + 4x^2y + y^3]$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}x^3 + 4x^2\frac{\partial}{\partial y}\ y + \frac{\partial}{\partial y}y^3$$
$$= 0 + 4x^2(1) + 3y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 + 3y^2 \qquad \text{-------------4}$$
$$\therefore\ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x[3x^2 + 8xy] + y[4x^2 + 3y^2]$$
$$= 3x^3 + 8x^2y + 4x^2y + 3y^3$$
$$= 3x^3 + 12x^2y + 3y^3$$
$$= 3(x^3 + 4x^2y + y^3)$$
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 3f(x,y) \qquad \text{---------5}$$

समीकरण 1 आणि 5 वरून युलरचा सिद्धांत व्हेरिफाय होतो .

उदाहरण 1.12 जर $u(x,y) = \log\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, सिद्ध करा : $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$

उत्तर: : दिलेले $u(x,y) = \log\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ -------1

$$\therefore\ e^u = \left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$$

Let $z(x,y) = e^u = \left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$

$$z(x.y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$$
$$z(tx.ty) = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{tx+ty}$$
$$= \frac{t^2x^2+t^2y^2}{tx+ty}$$
$$= \frac{t^2(x^2+y^2)}{t(x+y)}$$
$$= t^{2-1}\frac{(x^2+y^2)}{(x+y)}$$
$$= t^1\frac{(x^2+y^2)}{(x+y)}$$

z(x, y) हे 1 डिग्रीचे होमोजिनियस फंक्शन आहे

युलरचा सिद्धान्ता नुसार

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1\, z$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1\, e^u \qquad \text{----------------}2$$

परंतु $\qquad z = e^u$- --------- 3

डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x,

(Differentiating 3 partially w.r.t. x,)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[e^u]$$

$$= e^u\frac{\partial u}{\partial x}$$

डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y ,

(Differentiating 3 partially w.r.t. y ,)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[e^u]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^u\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial z}{\partial y}$ ची मूल्ये समीकरण २ मध्ये ठेवा

$$x\, e^u\frac{\partial u}{\partial x} + y\, e^u\frac{\partial u}{\partial y} = 1\, e^u$$

$$\therefore\ e^u\left[x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 1\, e^u$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1\,\frac{e^u}{e^u}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

सरावासाठी उदाहरणे 1.4 (Example for practice)

Q1 खालील फंक्शन होमोजिनियस आहे का नाही हे ठरवा. जर ते होमोजिनियस असेल, तर त्याची डिग्री शोधा.

, a $f(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^3$

b $f(x,y) = sin^{-1}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$

Q2. दिलेल्या फंक्शन f(x, y) मध्ये युलरचा सिद्धांत व्हेरिफाय करा.

$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$

Q3 जर $u(x,y) = sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]$, सिद्ध करा : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$

1.5 फंक्शनचे कमाल आणि किमान मूल्य (Maximum and minimum value of the function)

कमाल मूल्य (Maximum value): फंक्शन f(x,y) असे म्हणतात की x = a, y = b येथे जास्तीत जास्त मूल्य आहे, जर त्यांचे (a,b) एक लहान नेबरहूड अस्तित्वात असेल तर

$$f(a,b) > f(a+h, b+k)$$

किमान मूल्य (Minimum value): फंक्शन f(x,y) असे म्हणतात की x = a, y = b येथे कमीत कमी मूल्य आहे, जर त्यांचे (a,b) एक लहान नेबरहूड अस्तित्वात असेल तर

$$f(a,b) < f(a+h, b+k)$$

फंक्शनच्या कमाल आणि किमान मूल्यास फंक्शनचे एक्सट्रीम मूल्य देखील म्हणतात. जर बिंदूवर (a, b) फंक्शनमध्ये कमाल आणि किमान मूल्य नसेल तर त्या बिंदूला सॅडल पॉईंट असे म्हणतात.

- **फंक्शनच्या कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य चाचणी घेण्यासाठी कार्यरत नियम (Working rule to test the maxima and minima of the function)**

  जर f(x, y) दिलेले फंक्शन असेल तर

स्टेप I. शोधा: $\frac{\partial f}{\partial x}$ आणि $\frac{\partial f}{\partial y}$

स्टेप II. फंक्शनच्या कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य साठी

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \text{ आणि } \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

वक्र वरील स्थिर बिंदू मिळतात (stationary point on the curve)

स्टेप III. शोधा: r , s, आणि t

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{आणि} \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ किंवा } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

स्टेप IV. r , t आणि s मध्ये स्थिर बिंदू ठेवा,

Case I: a) जर $rt- s^2 > 0$ आणि $r < 0$, तर f(x,y) च्या त्या बिंदूला जास्तीत जास्त मूल्य आहे .

b) जर $rt- s^2 > 0$ आणि $r > 0$, तर f(x,y) च्या त्या बिंदूला कमीत कमी आहे .

Case II: **जर** $rt- s^2 < 0$, फंक्शन मॅक्सिमा किंवा मिनीमा नाही, तर फंक्शन f(x,y) त्या बिंदूला सॅडल पॉईंट म्हणतात.

Case III: जर $rt- s^2 = 0$ असेल तर प्रकरण संशयास्पद आहे आणि पुढील तपासणीची आवश्यकता आहे.

उदाहरण (फंक्शनसाठी मॅक्सिमा आणि मिनीमा)

उदाहरण 1.13: खाली दिलेल्या फंक्शनचे कमाल (Maxima) आणि किमान (Minima) मूल्य शोधा.

$$f(x, y) = x^3 - y^2 - 3x$$

उत्तर: दिलेले $f(x, y) = x^3 - y^2 - 3x$ --------1

स्टेप I: डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे

(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - y^2 - 3x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial x}y^2 - 3\frac{\partial}{\partial x}x)$$

$$= 3x^2 - 0 - 3(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 \qquad \text{-------------------2}$$

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे

(Differentiating 1 partially w.r.t.y, by taking x as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - y^2 - 3x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}y^2 - 3\frac{\partial}{\partial y}x$$

$$= 0 - 2y - 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \qquad \text{------------------- 3}$$

स्टेप II: फंक्शनच्या कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्यासाठी.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \text{ आणि } \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$3x^2-3 = 0 \text{ आणि } -2y = 0$$

$$3(x^2-1) = 0 \text{ आणि } y = 0$$

$$x^2 = 1 \text{ आणि } y = 0$$

$$= 1 \text{ or } x= -1 \text{ आणि } y = 0$$

(1,0) आणि (-1, 0) हे स्थिर बिंदू आहेत.

स्टेप III: शोधा: r , t आणि s

डिफरंशिएटिंग 2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे .
(Differentiating 2 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$r = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3)$$
$$= 3\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3)$$
$$= 3\times 2x - 0$$
$$= 6x \quad \text{---------------------------4}$$

डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे.
(Differentiating 3 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$$t = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2y)$$
$$= -2\frac{\partial}{\partial y}(y)$$
$$= -2(1)$$
$$= -2 \quad \text{--------------------------5}$$

डिफरंशिएटिंग 2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे
(Differentiating 2 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$$S = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3)$$
$$= 3\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3)$$
$$= 3\times(0) - 0$$
$$= 0 \quad \text{-----------------------6}$$

स्टेप IV: स्थिर बिंदू r , t आणि s मध्ये ठेवा

स्थिर बिंदू (1,0) साठी **:**

$r(1,0) = 6x = 6(1) = 6$

$t(1,0) = -2$

$s(1,0) = 0$

$rt - s^2 = (6)(-2)-(0)^2 = -12 < 0$ आणि $r = 6 > 0$

$rt - s^2 < 0$ आणि $r > 0$

दिलेल्या फंक्शला कमाल (Maxima) आणि किमान (Minima) मूल्य नाही. बिंदू (1, 0) हा सॅडल पॉईंट आहे**.**

स्थिर बिंदू **(-1,0)** साठी**:**

$r(-1,0) = 6x = 6(-1) = -6$

$t(-1,0) = -2$

$s(-1,0) = 0$

$rt - s^2 = (-6)(-2)-(0)^2 = 12 > 0$ आणि $r = -6 < 0$

$rt - s^2 > 0$ आणि $r < 0$

दिलेल्या फंक्शाचे बिंदू (-1,0) साठी कमाल (Maxima) मूल्य आहे.

x =-1 आणि y = 0 समीकरण ठेवा 1 मध्ये ठेवा

$$y_{max} = (-1)^3 - (o) - 3(-1)$$
$$= -1 + 3 = 2$$

दिलेल्या फंक्शचे कमाल (Maxima) मूल्य 2 आहे.

उदाहरण 1.14 खाली दिलेल्या फंक्शनचे कमाल (Maxima) आणि किमान (Minima) मूल्य शोधा

$$\mathbf{f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy}$$

उत्तर: दिलेले $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ ---------------1

स्टेप I: डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे .

(Differentiating 1 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 - 3axy)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}y^3 - 3ay\frac{\partial}{\partial x}x$$

$$= 3x^2 - 0 - 3ay(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay \quad \text{-------------------2}$$

डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे

(Differentiating 1 partially w.r.t.y , by taking x as constant)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 - 3axy)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}y^3 - 3xa\frac{\partial}{\partial y}y$$

$$= 0 + 3y^2 - 3ax(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax \quad \text{------------------- 3}$$

स्टेप II: फंक्शनच्या कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्यासाठी

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ आणि } \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$3x^2 - 3ay = 0 \text{ आणि } 3y^2 - 3ax = 0$$

$$3(x^2 - ay) = 0 \text{ आणि } 3(y^2 - ax) = 0$$

$$x^2 - ay = 0 \text{ आणि } y^2 - ax = 0$$

$$x^2 = ay \text{ आणि } y^2 = ax$$

$$\therefore \quad x = \frac{y^2}{a}$$

x चे मूल्य $x^2 = ay$ मध्ये ठेवा

$$\left(\frac{y^2}{a}\right)^2 = ay$$

$$\therefore \quad \frac{y^4}{a^2} = ay$$

$$y^4 = a^3 y$$

$$y(y^3 - a^3) = 0$$

$$y = 0 \text{ or } y^3 = a^3$$

$$y = 0 \text{ or } y = a$$

जेव्हा $y = 0$, तेव्हा $x = \frac{(0)^2}{a} = 0$

$\therefore$ पहिला बिंदू (0,0)

जेव्हा $y = a$ तेव्हा $x = \frac{(a)^2}{a} = a$

$\therefore$ दुसरा बिंदू (a, a),

(0,0) आणि (a, a) हे स्थिर बिंदू आहेत.

स्टेप III: शोधा: r, t आणि s

डिफरंशिएटिंग 2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y ला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 2 partially w.r.t. x , by taking y as constant)

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3ay)$$

$= 3\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - 3a\frac{\partial}{\partial x}(y)$

$= 3\times 2x - 0$

$= 6x$ ----------------------------4

डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे .

(Differentiating 3 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3ax)$

$= 3\frac{\partial}{\partial y}(y^2)$

$= 6y$ ----------------------------5

डिफरंशिएटिंग 2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x ला स्थिर ठेवले आहे .

(Differentiating 2 partially w.r.t. y , by taking x as constant)

$S = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \ = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3ay)$

$= 3\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - 3a\frac{\partial}{\partial y}(y)$

$= 0 - 3a(1)$

$= -3a$ ----------------------------6

स्टेप IV: स्थिर बिंदू r , t आणि s मध्ये ठेवा

स्थिर बिंदू (0,0) साठी :

$r(0,0) = 6x = 6(0) = 0$

$t(0,0) = 6Y = 6(0) = 0$

$s(0, 0) = -3a$

$rt - s^2 = (0)(0)-(-3a)^2 = -9a^2 < 0$ आणि $r = 0$

$rt - s^2 < 0$ आणि $r = 0$

दिलेल्या फंक्शला कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य नाही.

बिंदू **(0, 0)** हा सॅडल पॉईंट आहे

स्थिर बिंदू (a,a) साठी:

$r(a,a) = 6x = 6(a) = 6a$

$t(a,a) = 6y = 6(a) = 6a$

$s(a, a) = -3a$

$rt - s^2 = (6a)(6a) - (-3a)^2$

$rt - s^2 = 27a^2 > 0$

$rt - s^2 => 0$ आणि $r > 0$

दिलेल्या फंक्शचे बिंदू (a ,a) साठी किमान (Minimum) मूल्य आहे.

x = a आणि y =a समीकरण ठेवा 1 मध्ये ठेवा

$Y_{min} = (a)^3 + (a)^3 - 3a(a)(a)$

$= 2a^3 - 3a^3$

$= -a^3$

दिलेल्या फंक्शचे किमान (Minimum) मूल्य $-a^3$ आहे .

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

Q1 खाली दिलेल्या फंक्शनचे कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य शोधा.

1) $\emptyset(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 6y + 14$

2) $f(x, y) = y^2 - x^2$

3) $f(x, y) = x^3+3xy^2 -3x^2-3y^2 +4$

1.6 लाग्रेंजचे निर्धारित मल्टीप्लायर्सची पद्धत (Lagrange's method of undetermined multipliers):

दिलेल्या फंक्शनचे कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य शोधण्यासाठी लाग्रेंजची निर्धारित मल्टीप्लायर्सची पद्धत वापरली जाऊ शकते.

फंक्शन F(x, y) हे x आणि y मधील दोन व्हेरिएबलचे फंक्शन आहे , व्हेरिएबल्स x आणि y हे रिलेशन $\emptyset$ (x, y) द्वारे जोडलेले आहेत .

लाग्रेंजचे निर्धारित मल्टीप्लायर्सची पद्धत वापरून फंक्शनच्या कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य चाचणी घेण्यासाठी कार्यरत नियम:

(Working rule to test maximum value using Lagrange's method)

स्टेप I: प्रथम लँग्रेजचे फंक्शन तयार करा

$F(x,y,\lambda)= f(x,y) +\lambda\ \emptyset(x,y)$ -------------1

स्टेप II: डिफरंशिएटिंग 1 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , y आणि λ

(Differentiating 1 partially with respective to x , y and λ)

शोधा: $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ आणि $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$

स्टेप III: फंक्शनच्या कमाल (maxima) आणि किमान (minima) साठी

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ आणि $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$, आपल्याला x आणि y मूल्य मिळतील .

आपल्याला वक्र वरील स्थिर बिंदू मिळतात (stationary point on the curve)

स्टेप IV: स्थिर बिंदू फंक्शन f (x, y), मध्ये ठेवा, आपल्याला फंक्शनचे कमाल (Maxima) आणि किमान (Minima) मूल्य मिळतील.

उदाहरण (Examples) (Lagrange's method of undetermined multipliers):

उदाहरण 1.15: लाग्रेंजचे निर्धारित मल्टीप्लायर्सची पद्धत वापरून खाली दिलेल्या फंक्शन f (x, y), चे कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य शोधा.

$f(x, y) = x^2+y^2$, दिलेले फंक्शन $x + y = 10$ या अटीच्या अधीन आहे .

$\emptyset(x,y) = x + y = 10$

उत्तर: $f(x,y) = x^2+y^2$ --------1

आणि $\emptyset(x,y) = x + y - 10$ --------2

स्टेप I: प्रथम लँग्रेजचे फंक्शन तयार करू

$F(x,y,\lambda)= f(x,y) +\lambda\ \emptyset(x,y)$

$F(x,y,\lambda)= x^2+y^2 +\lambda\ [x + y - 10]$ -------3

स्टेप II: डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y आणि λ ला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 3 partially w.r.t. x by takinf y and λ constant)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + \lambda\frac{\partial}{\partial x}(x + y - 10)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right) + \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial x}10\right)$$

$$= 2x + 0 + \lambda(1 + 0 - 0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda \quad \text{--------4}$$

डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x आणि λला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 3 partially w.r.t. y , by taking x and λ constant)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) + \lambda\frac{\partial}{\partial y}(x + y - 10)$$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right) + \lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial y}y - \frac{\partial}{\partial y}10\right)$

$= 0 + 2y + \lambda(0 + 1 - 0)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y + \lambda$ ----------5

डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु λ , येथे x आणि y ला स्थिर ठेवले आहे

(Differentiating 3 partially w.r.t. λ , by taking x and y constant)

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(x^2 + y^2) + \lambda\frac{\partial}{\partial \lambda}(x + y - 10)$

$= \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(y^2\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda(x + y - 10)$

$= 0 + 0 + x + y - 10$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 10$ ---------- 6

स्टेप III: फंक्शनच्या कमाल (maxima) आणि किमान (minima) मुल्यांसाठी :

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$

$2x + \lambda = 0$ -------------------7

$2y + \lambda = 0$ ------------------8

आणि $x + y = 10$ ------------------9

समीकरणे 7 , 8 आणि 9 सोडवू

समीकरण 7 वरून $x = -\frac{\lambda}{2}$

समीकरण 8 वरून $y = -\frac{\lambda}{2}$

x आणि y , चे मूल्य समीकरण 9 मध्ये ठेऊ.

$x + y = 10$

$-2\frac{\lambda}{2} = 10$

$\lambda = -10$

λ चे मूल्य x आणि y, मध्ये ठेऊ.

$x = -\frac{-10}{2} = 5$

$y = -\frac{-10}{2} = 5$

(5, 5) स्थिर बिंदू आहे.

स्टेप IV: x = 5 आणि y = 5 चे मूल्य 1 मध्ये ठेऊ

$f(x,y) = (5)^2 + (5)^2$

$= 25+25$

$= 50$

दिलेल्या फंक्शचे f(x,y) ची कमाल (Maxima) मूल्य 50 आहे.

उदाहरण 1.16 लाग्रेंजचे निर्धारित मल्टीप्लायर्सची पद्धत वापरून खाली दिलेल्या फंक्शन f (x, y), चे कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य शोधा. f(x, y) = xy , दिलेले फंक्शन $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ या अटीच्या अधीन आहे

उत्तर: $f(x,y) = xy$ --------1

आणि $\emptyset(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ ------------2

स्टेप I: प्रथम लॅंग्रेजचे फंक्शन तयार करू

$F(x,y,\lambda)= f(x,y) + \lambda\ \emptyset(x,y)$

$F(x,y,\lambda)= xy + \lambda \left[\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right]$ -------3

स्टेप II: डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x , येथे y आणि λला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 3 partially w.r.t. x by takinf y and λ constant)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)$$

$$= y\frac{\partial}{\partial x}x + \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{8}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2}{2}-\frac{\partial}{\partial x}1\right)$$

$$= y(1) + \lambda\left(\frac{2x}{8}+0-0\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + \frac{\lambda x}{4} \qquad \text{--------4}$$

डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु y , येथे x आणि λला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 3 partially w.r.t. y , by taking x and λ constant)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \lambda\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)$$

$$= x\frac{\partial}{\partial y}y + \lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2}{8}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2}{2}-\frac{\partial}{\partial y}1\right)$$

$$= x(1) + \lambda\left(0+\frac{2y}{2}-0\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda y \qquad \text{----------5}$$

डिफरंशिएटिंग 3 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु λ , येथे x आणि y ला स्थिर ठेवले आहे.

(Differentiating 3 partially w.r.t. λ , by taking x and y constant)

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(xy) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)$$

$$= 0 + \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1$$

$$= \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1 \qquad \text{----------6}$$

स्टेप III: फंक्शनच्या कमाल (maximum) आणि किमान (minimum) मूल्य साठी .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

$$y + \frac{\lambda x}{4} = 0 \qquad \text{------------------7}$$

$$x + \lambda y = 0 \qquad \text{-----------------8}$$

आणि $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1 = 0$ -----------------9

समीकरणे 7 , 8 आणि 9 सोडवू .

समीकरण 7 वरून $\frac{4y+\lambda x}{4} = 0$

$$4y + \lambda x = 0$$

$$\lambda = \frac{-4y}{x}$$

λ चे मूल्य समीकरण 8 मध्ये ठेऊ.

$$x+\left(\frac{-4y}{x}\right)y = 0$$

$$\frac{x^2-4y^2}{x} = 0$$

$$x^2 - 4y^2 = 0$$

$x^2 = 4y^2$ -------10

x^2 चे मूल्य समीकरण 9 मध्ये ठेऊ ..

$\frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

$\frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$

$2\frac{y^2}{2} = 1$

$y^2 = 1$

y= ± 1

y = ± 1 मूल्य समीकरण 10 मध्ये ठेऊ

$x^2 = 4(\pm 1)^2$

$x^2 = 4$

x = ± 2

(2, 1), (-2, 1), (2,-1) आणि (-2,-1) स्थिर बिंदू आहे.

Step IV: सर्व स्थिर बिंदू समीकरण 1 मध्ये ठेऊ.

f(2,1) = 2(1) = 2

f(-2,1) = (-2)(1)=-2

f(2,-1) = (2)(-1) = -2

f(-2,-1) = (-2)(-1) = 2

फंक्शन f (x, y), चे कमाल (Maximum) मूल्य 2 आहे आणि किमान (Minimum) मूल्य -2 आहे.

सरावासाठी उदाहरण: (Example for practice)

1. लाग्रेंजचे निर्धारित मल्टीप्लायर्सची पद्धत वापरून खाली दिलेल्या फंक्शन f (x, y), चे कमाल (Maximum) आणि किमान (Minimum) मूल्य शोधा, f(x, y) = xy दिलेले फंक्शन $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ या अटीच्या अधीन आहे.

References:

1. Higher Engineering Mathematics by H. K. Dass, Er. Rajnish Verma [S. Chआणि Technical, ISBN: 9788121938907]
2. Higher Engineering Mathematics by Grewal B. S. [Tata McGraw Hill Education, New Delhi, ISBN : 9789386173522]
3. Engineering Mathematics by A. C. Shrivastava, P. K. Shrivastava [PHI Learning, New Delhi, ISBN:9788120342934]

युनिट-2
मॅट्रेसेस
(Matrices)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome):

CO1: वास्तविक जीवनातील समस्या सोडवण्यासाठी मॅट्रिक्सची संकल्पना लागू करा.

घटक निष्पत्ती (Learning Theory Outcome):

1. मॅट्रिक्सला एशेलॉन फॉर्म (Echelon form) आणि नॉर्मलफॉर्म (Normal form) मध्ये रूपांतरित करा.
2. एलिमेंटरी ट्रान्सफॉर्मेशनद्वारे मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स (Matrix inverse) शोधा.
3. ऑर्डर 2 आणि 3 चे डिटरमिनंट (Determinent) वापरून मॅट्रिक्सच्या रँक(Rank) काढा.
4. ऑर्डर 2 आणि 3 च्या एशेलॉन फॉर्ममध्ये मॅट्रिक्स कमी करून मॅट्रिक्सच्या रँक (Rank) काढा.
5. ऑर्डर 2 आणि 3 च्या नॉर्मल फॉर्मने मॅट्रिक्स कमी करून मॅट्रिक्सच्या रँक (Rank) काढा.
6. मॅट्रिक्सच्या रँकचा वापर करून लिनिअर इक्वेशनच्या नॉन होमोजिनियस प्रणालीची सुसंगतता तपासा.
7. मॅट्रिक्सच्या रँकचा वापर करून लिनिअर इक्वेशनच्या होमोजिनियस प्रणालीची सुसंगतता (Consistency) तपासा.
8. लिनिअर इक्वेशनच्या नॉन होमोजिनियस प्रणालीचे सोलुशन शोधा.
9. लिनिअर इक्वेशनच्या होमोजिनियस प्रणालीचे सोलुशन शोधा.
10. ऑर्डर 2 च्या दिलेल्या मॅट्रिक्ससाठी ईगेन व्हॅल्यूज आणि ईगेन व्हेक्टर्स शोधा.

परिचय(Introduction):

कृत्रिम बुद्धिमत्ता (एआय) आणि मशीन लर्निंग (एमएल) मध्ये मॅट्रिक्स मूलभूत भूमिका बजावते. ते डेटाचे प्रतिनिधित्व आणि हाताळण्यासाठी, स्पर्धा आणि व्हेरिएबल्स दरम्यान मॉडेल संबंध करण्यासाठी मोठ्या प्रमाणात वापरले जातात. रेखीय परिवर्तनात वापरल्या जाणाऱ्या मॅट्रिक्स जसे की रोटेशन, स्केलिंग आणि डेटामध्ये भाषांतर सारखे परिवर्तन दर्शविते. फॉरवर्ड आणि बॅकवर्ड प्रोपोगेशन, न्याचरल लँग्वेज प्रोसेसिंग, डेटा हाताळणी, न्यूरल नेटवर्क आणि बरेच काही. मॅट्रिक हे एआय आणि डेटा प्रतिनिधित्व गणना, विविध अनुप्रयोग आणि अल्गोरिदममधील ऑप्टिमायझेशनचा कणा आहेत.

2.1 मॅट्रिकच्या प्रकारांचा आढावा आणि मॅट्रिकची बीजगणित: (Review of types of matrices and algebra of matrices)

मॅट्रिक्स हे m x n आकारातील घटकांची m आडव्या रेषा (पंक्ती) आणि n उभ्या रेषा (**स्तंभ**) असलेली एक व्यवस्था आहे, जी चौकोनी कोष्ठकांमध्ये बंद केलेली असते. मॅट्रिक्स सामान्यतः मोठ्या अक्षराने A, B, C इत्यादीने दर्शविले जाते. ऑर्डर $m \times n$ असलेला मॅट्रिक्स खालील प्रकारे लिहिला जातो.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{ij} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2j} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{i2} & a_{i3} \ldots a_{ij} \ldots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \quad a_{mj} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i.e. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i = Row index

2.1.1 मॅट्रिक्सचे प्रकार (Types of matrices):

1) **पंक्ती मॅट्रिक्स (Row Matrix)** : ज्या मॅट्रिक्समध्ये फक्त एकच पंक्ती(row) असते, त्याला पंक्ती मॅट्रिक्स (Row Matrix) असे म्हणतात.

   उदाहरणार्थ: $A= [3]_{1\times 1}$ $B= [3 \quad 2]_{1\times 2}$ $C= [0 \quad -3 \quad 2]_{1\times 3}$

2) **स्तंभ मॅट्रिक्स (Column Matrix)**: ज्या मॅट्रिक्समध्ये फक्त एकच स्तंभ असतो, त्याला स्तंभ मॅट्रिक्स (Column Matrix) असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ: $A=[7]$ $B=\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

3. **स्क्वेअर मॅट्रिक्स (Square Matrix):** ज्या मॅट्रिक्समध्ये पंक्तींचा (rows) आणि स्तंभांची (columns) संख्या समान असते, त्याला स्क्वेअर मॅट्रिक्स (Square Matrix) असे म्हणतात.

   उदाहरणार्थ: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\4 & 1 & 2\\3 & -1 & 5\end{bmatrix}$

4. **डायगोनल मॅट्रिक्स (Diagonal matrix)**: ज्या चौकोनी मॅट्रिक्समध्ये सर्व नॉन-आधाररेषीय(Non Diagonal) घटक शून्य असतात, त्याला डायगोनल मॅट्रिक्स (Diagonal Matrix) असे म्हणतात.

   उदाहरणार्थ:

   $$\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$ Principle diagonal or leading diagonal

5. **स्केलर मॅट्रिक्स (Scalar matrix)**: ज्या आधाररेषीय (Diagonal Matrix) मॅट्रिक्समध्ये सर्व आधाररेषीय घटक समान असतात, त्याला स्केलर मॅट्रिक्स (Scalar Matrix) असे म्हणतात. स्केलर मॅट्रिक्स सामान्यतः K या अक्षराने दर्शविला जातो

   उदाहरणार्थ: $K=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3}$

6. **युनिट मॅट्रिक्स किंवा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स (Unit matrix or Identity matrix)**: एक स्केलर मॅट्रिक्स ज्यामध्ये आधाररेषीय घटक 1 असतो, त्याला आयडेंटिटी मॅट्रिक्स किंवा युनिट मॅट्रिक्स (Unit Matrix) असे म्हणतात. आयडेंटिटी मॅट्रिक्स सामान्यतः I या अक्षराने दर्शविला जातो.

   उदाहरणार्थ: $I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, हे ऑर्डर 3 चेआयडेंटिटी मॅट्रिक्स किंवा युनिट मॅट्रिक्स आहे

   $I_1=[1]$ हे ऑर्डर 1 चे आयडेंटिटी मॅट्रिक्स किंवा युनिट मॅट्रिक्स आहे.

   $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ हे ऑर्डर 2 चेआयडेंटिटी मॅट्रिक्स किंवा युनिट मॅट्रिक्स आहे.

7. **अप्पर ट्रायंग्युलर मॅट्रिक्स (Upper triangular matrix)**: ज्या चौकोनी मॅट्रिक्समध्ये आधाररेषेखालील सर्व घटक शून्य असतात, त्याला अप्पर ट्रायंग्युलर मॅट्रिक्स (Upper Triangular Matrix) असे म्हणतात. अप्पर ट्रायंग्युलर मॅट्रिक्सला U ने दर्शविले जाते.

   उदाहरणार्थ: $U=\begin{bmatrix}2 & -4 & 2\\0 & 3 & 7\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

8. **लोअर ट्रायंग्युलर मॅट्रिक्स (Lower triangular matrix):** असा चौकोनी मॅट्रिक्स ज्यामध्ये आधाररेषेवरील सर्व घटक शून्य असतात, त्याला लोअर ट्रायंग्युलर मॅट्रिक्स (Lower Triangular Matrix) असे म्हणतात. लोअर ट्रायंग्युलर मॅट्रिक्सला L ने दर्शविले जाते.

   उदाहरणार्थ: $L=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\4 & 1 & 0\\7 & 2 & -5\end{bmatrix}$

9. **नल मॅट्रिक्स किंवा झीरो मॅट्रिक्स (Null matrix or zero matrix)**: ज्या मॅट्रिक्समध्ये सर्व घटक शून्य असतात, त्याला झीरो मॅट्रिक्स (Zero Matrix) किंवा नल मॅट्रिक्स (Null Matrix) असे म्हणतात. नल मॅट्रिक्स (Null Matrix) हा O ने दर्शविले जाते.

उदाहरणार्थ: $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ or $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. **मॅट्रिक्सचा ट्रान्सपोज (Transpose of matrix)** : मॅट्रिक्स A च्या पंक्ती आणि स्तंभांची अदलाबदल करून मिळवलेला मॅट्रिक्स हा मॅट्रिक्स A चा ट्रान्सपोज (Transpose of Matrix A) असतो. याला A’ किंवा A^T ने दर्शविले जाते.

उदाहरणार्थ If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ then $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

11**. सिमेट्रिक मॅट्रिक्स (Symmetric Matrix)** : ज्या चौकोनी मॅट्रिक्समध्ये प्रत्येक घटक त्याच्या समांतर स्थितीतील घटकाशी समान असतो. याचा अर्थ, जर मॅट्रिक्स A मध्ये कोणत्याही घटकासाठी aij = aji असे असले, तर तो सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे असे म्हणता येईल. म्हणजेच एखाद्या मॅट्रिक्समध्ये: $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, आणि $a_{23} = a_{32}$ असेल, तर तो सिमेट्रिक मॅट्रिक्स आहे असे म्हणता येईल.

उदाहरणार्थ,

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

12**. स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स (Skew-Symmetric Matrix)**: ज्या चौकोनी मॅट्रिक्समध्ये प्रत्येक घटक त्याच्या समांतर स्थितीतील घटकाशी विरोधी चिन्हात असतो. म्हणजेच, जर मॅट्रिक्स A स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असेल, तर प्रत्येक घटकासाठी aij = -aji असतो, तसेच, स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्सचे मुख्य आंतररेषीय घटक (diagonal elements) शून्य असतात, एखाद्या मॅट्रिक्समध्ये $a_{12} = -a_{21}$, $a_{13} = -a_{31}$, $a_{23} = -a_{32}$ असेल, तर तो मॅट्रिक्स स्क्यू-सिमेट्रिक मॅट्रिक्स असे म्हणता येईल.

उदाहरणार्थ:

$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ आणि $B = \begin{bmatrix} 0 & -h & g \\ h & 0 & -f \\ -g & f & 0 \end{bmatrix}$

2.1.2 मॅट्रिकची बीजगणित (Algebra of matrix):

1) मॅट्रिक्सची समानता (Equality of matrix): दोन मॅट्रिक्स A आणि B समान म्हणता येतात, जर त्यांचा ऑर्डर्स (orders) समान असेल आणि दोन मॅट्रिक्समधील संबंधित स्थानांवरील घटक समान असतील. म्हणजेच, [aij] = [bij].

उदाहरणार्थ: जर $A=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ तर A = B

मॅट्रिक्सच्या समानतेच्या गुणधर्मांमध्ये:

1. जर A = B असेल तर B = A --------- [संपूर्णता]
2. जर A = A असेल, जिथे A हे कोणतेही मॅट्रिक्स आहे ... [आत्मसमानता]
3. जर A = B आणि B = C असेल तर A = C ... [संक्रमणशीलता]

2) स्केलर गुणाकार (Scalar multiplication): समजा A हा मॅट्रिक्स आहे आणि k हा एक संख्या (स्केलर) आहे, तर A चा k ने गुणाकार केलेला मॅट्रिक्स kA ने दर्शविला जातो आणि तो मॅट्रिक्स A च्या प्रत्येक घटकाला k ने गुणाकार करून प्राप्त केला जातो.

उदाहरणार्थ: $KA= k\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ ka_2 & kb_2 & kb_3 \end{bmatrix}$

स्केलर गुणाकाराचे गुणधर्म:

समजा A आणि B हे समान ऑर्डर्स (Orders) दोन मॅट्रिक्स आहेत, 0 हे समान ऑर्डर्स शून्य मॅट्रिक्स आहे, m आणि n हे स्कॅलर्स आहेत, तर आपल्याकडे खालील गुणधर्म आहेत:

a. m(A + B) = mA + mB
b. (m + n) A = mA + nA
c. 0 · A = 0

d. $m \times 0 = 0$
e. $m(nA) = n(mA) = (mn)A$

3) मॅट्रिक्सची बेरीज (Addition of matrices) : जर दोन मॅट्रिक्स समान ऑर्डर्स (orders) असतील, तरच त्यांना बेरीज (addition) करता येऊ शकते. जर ते वेगवेगळ्या ऑर्डर्स (orders) असतील, तर त्यांना बेरीज करता येणार नाही. जर दोन मॅट्रिक्स समान ऑर्डर्स (orders) असतील, तर त्यांच्या संबंधित घटकांची बेरीज करून आपल्याला एक नवीन मॅट्रिक्स मिळतो.

उदाहरणार्थ: जर $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$

तर $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

मॅट्रिक्सच्या बेरीजाचे गुणधर्म:

A, B, C हे समान ऑर्डर्स (orders) तीन मॅट्रिक्स आहेत आणि O हे समान ऑर्डर्स (order) शून्य मॅट्रिक्स आहे, तर:

1. मॅट्रिक्सची बेरीज कम्युटेटिव आहे, म्हणजेच, $A + B = B + A$
2. मॅट्रिक्सची बेरीज असोसिएटिव आहे, म्हणजेच, $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. बेरीजात्मक ओळखीची अस्तित्व, म्हणजेच, $A + O = O + A = A$
4. बेरीजात्मक प्रतिविपरीताची अस्तित्व, $A + (-A) = O = (-A) + A$, तर $-A$ हे A चे बेरीजात्मक प्रतिविपरीत आहे.
5. जर $A + B = A + C$ असेल, तर $B = C$: डाव्या कॅन्सलेशन.
6. जर $B + A = C + A$ असेल, तर $B = C$: उजव्या कॅन्सलेशन.

4) मॅट्रिक्सचा वजाबाकी (Subtraction of matrices)

समजा A आणि B हे समान ऑर्डर्स(orders) दोन मॅट्रिक्स आहेत. तर त्यांची वजाबाकी (subtraction) खालील प्रकारे परिभाषित केली जाते: $A - B = A + (-B)$

मॅट्रिक्सच्या वजाबाकीचे गुणधर्म:

1) मॅट्रिक्सची वजाबाकी कम्युटेटिव नाही: म्हणजेच, $A - B \neq B - A$, परंतु $A - B = (-B) + A$
2) मॅट्रिक्सची वजाबाकी असोसिएटिव नाही: म्हणजेच, $(A - B) - C \neq A - (B - C)$,
   परंतु $[A + (-B)] + (-C) = A + [(-B) + (-C)]$

2.2 एलीमेंटरी ट्रांसफॉर्मेशन ऑफ मॅट्रिक्स:

मॅट्रिक्सचे दोन प्राथमिक परिवर्तन आहेत.

1. **प्राथमिक पंक्ती परिवर्तन (**Elementary row transformation **)**
2. **प्राथमिक स्तंभ परिवर्तन (**Elementary column transformation **).**

2.2.1 प्राथमिक पंक्ती परिवर्तन(Elementary row transformation):

प्राथमिक पंक्ती परिवर्तनामध्ये केवळ मॅट्रिकच्या पंक्तींचे रूपांतरण केले जाते , स्तंभांमध्ये कोणतेही बदल केले जात नाहीत. या पंक्तीचे ऑपरेशन्स एका विशिष्ट नियमांच्या संचानुसार कार्यान्वित केले जातात ,जे हे सुनिश्चित करतात की परिवर्तित मॅट्रिक्स मूळ मॅट्रिक्सच्या समतुल्य आहे .

प्राथमिक परिवर्तनाचे नियम (Rules of elementary row transfromation)

नियम 1 : जर A दिलेले मार्ट्रिक्स असेल तर कोणत्याही दोन पंक्ती आपसात बदलता येऊ शकतात. i^{th}आणि j^{th} पंक्तींचा बदल पुढीलप्रमाणे दर्शविला जातो:

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

उदाहरणार्थ: Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

अमलात आणा(Applying) $R_2 \leftrightarrow R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

नियम 2: जर A दिलेले मार्ट्रिक्स असेल तर कोणत्याही पंक्तीतील सर्व घटकांना कोणत्याही शून्य नसलेल्या संख्येने गुणाकार करता येतो. i^{th} पंक्तीला शून्य नसलेल्या k संख्येने गुणाकार केला जातो, आणि तो पुढीलप्रमाणे दर्शविला जातो: $Ri \rightarrow kRi$

उदाहरणार्थ: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow 4R2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2\times 4 & 1\times 4 & 6\times 4 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & 24 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

नियम 3: जर A दिलेले मार्ट्रिक्स असेल तर कोणत्याही पंक्तीचे सर्व घटक दुसऱ्या पंक्तीतील संबंधित घटकांमध्ये जोडले जाऊ शकतात, जे कोणत्याही शून्य नसलेल्या स्थिरांकाशी गुणाकार केले जातात. जर i^{th} पंक्तीचे घटक j^{th} पंक्तीतील घटकांमध्ये (जे शून्य नसलेल्या k संख्येने गुणाकार केले जातात) जोडले जात असतील, तर ते पुढीलप्रमाणे दर्शविले जाते: $Rj \rightarrow Rj + kRi$

उदाहरणार्थ:) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \\ 6+(2\times 5) & 2+(2\times 2) \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \\ 16 & 6 \end{bmatrix}$$

.. 2 . जर $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

अमलात आणा Applying $R_1 \rightarrow R_1 + (-2)R_3$,

$$\therefore \quad A \sim \begin{bmatrix} 1+(-2)(2) & 5+(-2)(3) & 3+(-2)(5 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1-4 & 5-6 & 3-10 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} -3 & -1 & -7 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2.3 प्राथमिक स्तंभ परिवर्तन: (Elementary column transformation)

पंक्तींसाठी त्या तीन ऑपरेशन्स, त्याच प्रकारे स्तंभांवर लागू केल्यास, आम्हाला प्राथमिक स्तंभ ऑपरेशन मिळते. आम्ही आधीपासूनच पंक्ती परिवर्तनाबद्दल तपशीलवार चर्चा केली आहे, आता आपण स्तंभ परिवर्तनाबद्दल थोडक्यात चर्चा करू.

प्राथमिक स्तंभ परिवर्तनाचे नियम (Elementary column transformation):

नियम 1 : जर A दिलेले मार्ट्रिक्स असेल तर कोणत्याही दोन **स्तंभ** आपसात बदलता येऊ शकतात. i^{th}आणि j^{th} **स्तंभ** बदल पुढीलप्रमाणे दर्शविला जातो:. $C_i \leftrightarrow C_j$

उदाहरणार्थ , जर $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $C_1 \leftrightarrow C_3$

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

नियम 2: जर A दिलेले मार्ट्रिक्स असेल तर कोणत्याही स्तंभाच्या सर्व घटकांना कोणत्याही शून्य नसलेल्या संख्येने गुणाकार करता येतो. i^{th} स्तंभाला शून्य नसलेल्या k संख्येने गुणाकार केला जातो, आणि तो पुढीलप्रमाणे दर्शविला जातो: $C_i \to k\, C_i$.

उदाहरणार्थ :, जर , $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $C_3 \to 4\, C_3$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4\times 3 \\ -1 & 4 & 4\times 2 \\ 1 & -3 & 4\times 5 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 20 \end{bmatrix}$$

नियम 2: जर A दिलेले मार्ट्रिक्स असेल तर कोणत्याही स्तंभाच्या सर्व घटक दुसऱ्या स्तंभाच्या संबंधित घटकांमध्ये जोडले जाऊ शकतात, जे कोणत्याही शून्य नसलेल्या स्थिरांकाशी गुणाकार केले जातात. जर ith स्तंभाच्या घटक jth स्तंभाच्या घटकांमध्ये (जे शून्य नसलेल्या k संख्येने गुणाकार केले जातात) जोडले जात असतील, तर ते पुढीलप्रमाणे दर्शविले जाते: *i.e.,* $C_i \to C_i + k\, C_j$.

उदाहरणार्थ 1 :जर $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $C_3 \to C_3 + 3C_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5+3(-1) \\ -4 & 2 & 3+3(2) \\ 1 & -7 & 3+3(-7) \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 9 \\ 1 & -7 & -18 \end{bmatrix}$$

उदाहरणार्थ 2 : जर $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $C_1 \to C_1 + 4C_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 2+4(3) & 3 \\ 4+4(5) & 5 \\ -1+4(2) & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 24 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3 मॅट्रिक्सचे एशेलॉन (Echelon) आणि नॉर्मल (Normal) स्वरूपात रूपांतर (Conversion of matrix to echelon and normal form):

2.3.1 i) मॅट्रिक्सचे रो एशेलॉन (Echelon) स्वरूप (Raw echelon form of matrix):

1. जर दिलेल्या मॅट्रिक्स मध्ये शून्य पंक्ती असतील तर त्या मॅट्रिक्सच्या तळाशी एकत्र गटबद्ध केल्या जातात.
2. प्रत्येक पंक्ती मधील प्रथम घटक **'1'** असणे आवश्यक आहे ज्याला अग्रगण्य **1** म्हणतात.
3. प्रत्येक पंक्तीमध्ये अग्रगण्य प्रवेश करण्यापूर्वी शून्याची संख्या सक्सेस पंक्ती मध्ये अशा शून्याच्या संख्येपेक्षा कमी असते.

खालील मॅट्रिक्स एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात आहेत (Following matrix are in echelon form)

उदाहरणार्थ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- **खालील मॅट्रिक्स एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात नाहीत** (Following matrix are in not echelon form)

उदाहरणार्थ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ii) रिड्यूस्ड पंक्ति एशेलॉन रूप (Reduced row echelon form of a matrix):

दिलेल्या मॅट्रिक्सने खालील अट पूर्ण केल्यास रिड्यूस्ड पंक्तीचे फॉर्म असल्याचे म्हटले जाते.

दिलेले मॅट्रिक्स एशेलॉन (Echelon) फॉर्म असणे आवश्यक आहे.

a. अग्रगण्य १ वगळता स्तंभात सर्व शून्य असले पाहिजेत.

- खालील मॅट्रिक्स रिड्यूस्ड एशेलॉन(Echelon) स्वरूपात आहेत.

उदाहरणार्थ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- खालील मॅट्रिक्स हे इकेलॉन फॉर्म आहेत परंतु रिड्यूस्ड एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात नाहीत

उदाहरणार्थ : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

उदाहरण (Examples): [Echelon and Reduced echelon form]

उदाहरण 2.1: खाली दिलेले मॅट्रिक्सला एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात रूपांतरित करा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

उत्तर:: दिलेला मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \leftrightarrow R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying)$R_1 \rightarrow \frac{R_1}{5}$, आपल्याला मिळेल,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \leftrightarrow R_3$, आपल्याला मिळेल,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

रूपांतरित करून आलेले मॅट्रिक्स हे एशेलॉन फॉर्म आहे परंतु रिड्यूस्ड एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात नाही.

उदाहरण 2.2: खाली दिलेले मॅट्रिक्सला एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात रूपांतरित करा

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेला मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \leftrightarrow R_1$, आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow \frac{R_2}{-2}$, आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 - 9R_2$, आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow \frac{R_3}{-13}$, आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

रूपांतरित करून आलेले मॅट्रिक्स हे एशेलॉन स्वरूपात आहे परंतु रिड्यूस्ड एशेलॉन(Echelon) स्वरूपात नाही.

उदाहरण 2.3: खाली दिलेले मॅट्रिक्सला रिड्यूस्ड एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात रूपांतरित करा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

उत्तर:: दिलेला मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow \frac{R_2}{5}$, We get

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to R_3 - 10R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \to R_1 + 2R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

रूपांतरित करून आलेले मॅट्रिक्स हे रिड्यूस्ड एशेलॉन(Echelon) स्वरूपात आहे

उदाहरण 2.4 खाली दिलेले मॅट्रिक्सला रिड्यूस्ड एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात रूपांतरित करा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

उत्तर:: दिलेला मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \to R_3 - 4R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -11 \\ 0 & -10 & -11 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to \frac{R_2}{-7}$, आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \\ 0 & -10 & -11 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to R_3 + 10R_2$, आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & \frac{33}{7} \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to \frac{7}{33} R_3$, आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \to R_1 - 3R_2$ आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \to R_1 + \frac{5}{7} R_3$ आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - \frac{11}{7} R_3$ आपल्याला मिळेल

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

रूपांतरित करून आलेले मॅट्रिक्स हे रिड्यूस्ड एशेलॉन(Echelon) स्वरूपात आहे.

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

1. खाली दिलेले मॅट्रिक्सला एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात रूपांतरित करा.

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ 2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ 4) $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

2. खाली दिलेले मॅट्रिक्सला रिड्यूस्ड एशेलॉन (Echelon) स्वरूपात रूपांतरित करा.

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

2.3.2 दिलेले मॅट्रिक्सचे नॉर्मल स्वरूप (Normal form of a given matrix)

कोणत्याही शून्य नसलेल्या मॅट्रिक्स A ला खालील चार स्वरूपात रूपांतरित करता येते. त्याला मॅट्रिक्सचे नॉर्मलस्वरूप म्हणतात:

$$[I_r], \quad [I_r \ , \ 0], \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

खालील दिलेले मॅट्रिक्स नॉर्मल (Normal form) स्वरूपात आहेत

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I_r] \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

उदाहरण (Examples): (Matrix normal form)

उदाहरण 2.5: दिलेले मॅट्रिक्सला नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) रूपांतरित करा.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर:: दिलेला मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - 3R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $C_2 \to C_2 - 2C_1$ आणि $C_3 \to C_3 - 3C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $C_2 \to \frac{C2}{-5}$ आणि $C_3 \to \frac{C3}{-7}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $C3 \to C_3 - C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \sim [I_2 \quad 0]$$

रूपांतरित करून आलेले मॅट्रिक्स हे नॉर्मलस्वरूपात (Normal form) आहे.

उदाहरण 2.6: दिलेले मॅट्रिक्सला नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) रूपांतरित करा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेला मॅट्रिक्स $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to -R2,$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to R_3 + 2R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \to R_1 - 2R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $C_3 \to C_3 + C_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $C_3 \to C_3 - 2C2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

रूपांतरित करून आलेले मॅट्रिक्स हे नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) आहे.

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

Q.1: खाली दिलेले मॅट्रिक्सला नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) रूपांतरित करा

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 2) . $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2.4 एलिमेंटरी ट्रान्सफॉर्मेशनने मॅट्रिक्सचे इन्व्हर्स करणे (Inverse of matrix by elementary transformation)

जर A कोणतेही चौकोनी (square) मॅट्रिक्स असेल, तर आपण त्याचे इन्व्हर्स (inverse) काढू शकतो. जर $|A| \neq 0$ असेल, तर A^{-1} अस्तित्वात असतो. आपण मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स (inverse) प्राथमिक रूपांतरण (elementary transformation) करून काढू शकतो. व्यस्त (inverse) काढण्यासाठी, आपण मॅट्रिक्स A हे असे लिहितो:

$$A = IA$$

A (डाव्या बाजूला) आणि I वर समान प्राथमिक रांगेचे रूपांतरण (row transformations) केल्यास, मॅट्रिक्स A (डाव्या बाजूला) हा I मध्ये रूपांतरित होईल आणि I ला A^{-1} मध्ये रूपांतरित केले जाईल. मॅट्रिक्सचा इन्व्हर्स (inverse) A^{-1} ने दर्शवला जातो

.

उदाहरण (Examples): [Inverse of matrix]

उदाहरण 2.7 दिलेले मॅट्रिक्सचा प्राथमिक परिवर्तनद्वारे इन्व्हर्स शोधा $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

उत्तर: दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$A = I\ A$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to \frac{R_2}{2}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - 5R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-5}{2} & 1 \end{bmatrix} A$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to -2R_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} A$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \to R_1 - \frac{3}{2}R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} A$$

$$I = A^{-1} . A$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

म्हणून मॅट्रिक्सचा व्यस्त (Inverse) आहे $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

उदाहरण 2.8: दिलेले मॅट्रिक्सचा प्राथमिक परिवर्तनद्वारे इन्व्हर्स शोधा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \end{bmatrix}$$

उत्तर: : दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

$$A = I\ A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . A$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \to R_3 + 2R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} . A$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \to R_1 - 2R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} . A$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \to R_1 - R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} . A$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} . A$$

$$I = A^{-1} A$$

म्हणून मॅट्रिक्सचा व्यस्त (Inverse) आहे $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

खाली दिलेले मॅट्रिक्सचा प्राथमिक परिवर्तनाद्वारे इन्व्हर्स शोधा .

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ 2) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ 4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.5 मॅट्रिक्स रँक (Rank of matrix)

जर A हा दिलेला मॅट्रिक्स असेल तर आम्ही तीन पद्धतीचा वापर करून मॅट्रिक्सची रँक शोधू शकतो.

1. जर A हा दिलेला 2 किंवा 3 ऑर्डर चा चौरस(square) मॅट्रिक्स असेल तर निर्धारक मूल्य वापरून मॅट्रिक्सची रँक काढली जाते.
2. मॅट्रिक्सची रँक ही मॅट्रिक्सला एशेलॉन फॉर्म (echelon form) मध्ये रूपांतरण करून काढली जाते.
3. मॅट्रिक्सला रँक ही मॅट्रिक्सला नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) मध्ये रूपांतरण करून काढली जाते.

मॅट्रिक्सची रँक ρ (A) द्वारे दर्शविली जाते.

2.5.1 डिटर्मिनन्ट (निर्धारक) वापरून मॅट्रिक्सचे रँक काढणे (Rank of Matric usising Determinant)

जर A हा दिलेला 2 किंवा 3 ऑर्डर चा चौरस(square) मॅट्रिक्स असेल, तर निर्धारक मूल्य वापरून मॅट्रिक्सची रँक खालील प्रकारे काढले जाते.

a) जर A हा दिलेला 2 किंवा 3 ऑर्डरचा चौरस(square) मॅट्रिक्स असेल आणि दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य शून्य नसेल तर त्या मॅट्रिक्सचे रँक ही त्या मार्टिक्सची ऑर्डर एवढे असते. म्हणजेच जर $|A| \neq 0$, तर त्या मॅट्रिक्सचे रँक हे त्या मार्टिक्सची ऑर्डर एवढे असते .

b) जर A हा दिलेला 2 किंवा 3 ऑर्डर चा चौरस (square) मॅट्रिक्स असेल आणि दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य शून्य असेल, तर त्या मॅट्रिक्सचे रँक हे त्या मॅट्रिक्सची ऑर्डर एवढे नसते. म्हणजेच जर $|A| = 0$, तर त्या मॅट्रिक्सचे रँक हे त्या मार्टिक्स ची ऑर्डर एवढे नसते . तर आपल्याला असा एक तरी मायनर (minor) शोधावा लागतो कि त्याचे निर्धारित मूल्य शून्य नाही. दिलेल्या मॅट्रिक्सचे रँक हे त्या मायनरच्या (minor) ऑर्डर एवढे असते.

उदाहरण 2.9 दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य काढून मॅट्रिक्सचे रँक शोधा : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

उत्तर: दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

आपण आधि दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य काढू

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= (2)(4) - (4)(3)$$
$$= 8 - 12$$
$$= -4 \neq 0$$

दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य शून्य नाही म्हणून त्या मॅट्रिक्सचे रँक ही त्या मॅट्रिक्सची ऑर्डर एवढे आहे. दिलेल्या मॅट्रिक्सची ऑर्डर 2 आहे म्हणून मार्टिक्सची रँक ही 2 आहे.

$\therefore \quad \rho(A) = 2$

उदाहरण 2.10 दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य काढून मॅट्रिक्सचे रँक शोधा : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$

उत्तर: दिलेले मॅट्रिक्स , $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

आपण आधि दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य काढू

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \\ &= (2)(8) - (4)(4) \\ &= 16 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य शून्य आहे म्हणून त्या मॅट्रिक्सचे रँक ही त्या मॅट्रिक्सची ऑर्डर एवढे नाही.

म्हणजेच $\rho(A) \neq 2$

परंतु आपणास असे दिसून येते कि $a_{11} = 8 \neq 0$, मायनरचे निर्धारित मूल्य शून्य नाही. दिलेल्या मायनरचे ऑर्डर 1 आहे म्हणून मार्टिक्सची रँक ही 1 आहे.

$\therefore \quad \rho(A) = 1$

उदाहरण 2.11 दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य काढून मॅट्रिक्सचे रँक शोधा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

आपण दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य काढू.

$$\begin{aligned} |A| &= 1[15+12] +2 [-6+3] +1 [-8-5] \\ &= 1[27] +2 [-3] +1[-13] \\ &= 27 - 6 - 13 \\ &= 8 \neq 0 \end{aligned}$$

दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य शून्य नाही म्हणून त्या मॅट्रिक्सचे रँक ही त्या मार्टिक्सची ऑर्डर एवढे आहे. दिलेल्या मार्टिक्सची ऑर्डर 3 आहे म्हणून मार्टिक्सची रँक ही 3 आहे.

$\therefore \quad \rho(A) = 3$

उदाहरण 2.12: **दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य काढून मॅट्रिक्सचे रँक शोधा:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

उत्तर:: दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} |A| &= 1 [45 - 48] -2 [36-42] +3[32-35] \\ &= 1 [-3] -2 [-6] +3[-3] \\ &= -3 + 12 - 9 \\ |A| &= 0 \end{aligned}$$

दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य शून्य आहे म्हणून त्या मॅट्रिक्सचे रँक ही त्या मार्टिक्सची ऑर्डर एवढे नाही. म्हणजेच $\rho(A) \neq 3$.

परंतु आपणास असे दिसून येते कि $a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= 5 - 8$

$= -3 \neq 0$

म्हणजेच a_{33} या मायनरचे निर्धारित मूल्य शून्य नाही.

दिलेल्या मायनरचे ऑर्डर 2 आहे म्हणून मार्टिक्सची रँक ही 2 आहे.

$$\therefore \quad \rho(A) = 2$$

2.5.2 मॅट्रिक्सची रँक ही मॅट्रिक्सला एशेलॉन फॉर्म मध्ये रूपांतरण करून (Rank of matrix by reducing matrix to echelon form):

जर A हा कोणत्याही ऑर्डरचा मॅट्रिक्स असेल तर r ला त्या मॅट्रिक्सचे रँक म्हणतात जेव्हा

1. त्या मॅट्रिक्स मध्ये कमीत कमी एक तरी r ऑर्डरच्या मायनरचे निर्धारित मूल्य शून्य नसते.
2. प्रत्येक (r+1) ऑर्डरच्या मायनरचे निर्धारित मूल्य शून्य असते.

आपण दिलेल्या मॅट्रिक्सवर प्राथमिक पंक्ती (row) आणि स्तंभ (column) परिवर्तन लागू करतो आणि त्यास **एशेलॉन** फॉर्ममध्ये (Echelon form) रूपांतरित करतो. जर M दिलेल्या मॅट्रिक्स A च्या एकूण पंक्तीची (Row) संख्या असेल आणि k ही मॅट्रिक्सच्या एशेलॉन स्वरूपामधील सर्व शून्य घटक असलेल्या पंक्तींची एकूण संख्या असेल तर

रँक = (मॅट्रिक्स A च्या एकूण पंक्तीची (Row) संख्या) - (मॅट्रिक्स एशेलॉन फॉर्ममधील सर्व घटक शून्य असलेल्या पंक्तीची (Row) संख्या)

$$r = M - K$$

उदाहरण 2.13: दिलेल्या मॅट्रिक्सला एशेलॉन फॉर्ममध्ये (Ecelon form) मध्ये रूपांतरित करून मॅट्रिक्सची रँक शोधा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to \frac{-R_2}{3}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to R_3 + 6R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M = मॅट्रिक्स A च्या एकूण पंक्तीची (Row) संख्या = 03

K = मॅट्रिक्स एशेलॉन फॉर्ममधील सर्व घटक शून्य असलेल्या पंक्तीची (Row) संख्या = 01

$r = M - K$

$= 3-1$

$= 2$

म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्सचे रँक **2** आहे.

$$\therefore \quad \rho(A) = 2$$

उदाहरण 2.14: दिलेल्या मॅट्रिक्सला एशेलॉन फॉर्ममध्ये (Echelon form) रूपांतरित करून मॅट्रिक्सची रँक शोधा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - 4R_1$ आणि $R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to \frac{-R_2}{3}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to R_3 + 6R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M = मॅट्रिक्स A च्या एकूण पंक्तीची(Row) संख्या = 03

K = मॅट्रिक्स एशेलॉन फॉर्ममधील सर्व घटक शून्य असलेल्या पंक्तीची(Row) संख्या = 01

r = M- K

= 3-1

= 2

म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्सचे रँक **2** आहे.

$$\therefore \quad \rho(A) = 2$$

2.5.3 मॅट्रिक्सला रँक ही मॅट्रिक्सला नॉर्मल स्वरूपात मध्ये रूपांतरण करून (Rank of matrix by reducing matrix to Normal form):

जर A हा कोणत्याही ऑर्डरचा मॅट्रिक्स असेल, आपण दिलेल्या मॅट्रिक्सवर प्राथमिक पंक्ती (row) आणि स्तंभ (colum) परिवर्तन लागू करतो आणि त्यास नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) रूपांतरित करतो.

रूपांतरित केलेला मॅट्रिक्स हा खालील प्रकारे असतो

$$[I_r]\ ,\ [I_r\ ,\ 0\ ]\ ,\ \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\ \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

जेथे I_r हा युनिट मॅट्रिक्स किंवा आयडेंटिटी मॅट्रिक्स दर्शविते आणि 0 हा शून्य मॅट्रिक्स दर्शविते.

येथे r ला त्या मॅट्रिक्सचे रँक असे म्हणतात.

उदाहरण 2.15: दिलेल्या मॅट्रिक्सला नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) रूपांतरित करून मॅट्रिक्सची रँक शोधा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to \frac{-R_3}{11}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to 7R_3 + R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $c_3 \to \frac{-c_3}{7}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $c_3 \leftrightarrow c_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $c_3 \to c_3 - 2c_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $c_2 \to c_2 + c_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

हे दिलेल्या मॅट्रिक्सचे नॉर्मल फॉर्म आहे. येथे आपणास I_2 हा ऑर्डर 2 चा युनिट मॅट्रिक्स मिळाला आहे. म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्सचे रँक **2** आहे**.**

$$\therefore \quad \rho(A) = 2$$

उदाहरण 2.16: दिलेल्या मॅट्रिक्सला नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) रूपांतरित करून मॅट्रिक्सची रँक शोधा.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेले मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - 3R_1$ आणि $R_3 \to R_3 - 4R_1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to \frac{-R_3}{7}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \leftrightarrow R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to R_3 + 7R_2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $c_2 \to c_2 - c1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $+ c1$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $c_3 \to c_3 + c2$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to \frac{-R_3}{12}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim [I_3]$$

हे दिलेल्या मॅट्रिक्सचे नॉर्मल फॉर्म आहे.

येथे आपणास I_3 हा ऑर्डर 3 चा युनिट मॅट्रिक्स मिळाला आहे.

म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्सचे रँक 3 आहे

$$\therefore \quad \rho(A) = 3$$

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice**)**

Q.1 दिलेल्या मॅट्रिक्सचे निर्धारित मूल्य काढून मॅट्रिक्सचे रँक शोधा.

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

Q.2 दिलेल्या मॅट्रिक्सला एशेलॉन फॉर्ममध्ये (Echelon form) मध्ये रूपांतरित करून मॅट्रिक्सची रँक शोधा.

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 4) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

Q.3 दिलेल्या मॅट्रिक्सला नॉर्मल स्वरूपात (Normal form) रूपांतरित करून मॅट्रिक्सची रँक शोधा.

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

2.6 नॉन-होमोजिनियस आणि होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली. (Non Homogeneous and homogeneous system of linear equation)

2.6.1 नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली (Non Homogeneous system of linear equation)

नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली अशी असते कि ज्यात कमीत कमी एक समीकरणाच्या उजव्या बाजूस शून्य नसतात, तर काही इतर संख्या असू शकतात. खाली दिलेले नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

वरील समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$A X = B$$

येथे $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

आपणस असेही म्हणता येईल कि जर AX=B, मध्ये B हा शून्य मॅट्रिक्स नसेल तर ती नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली असते.

जेव्हा A X = B मध्ये, x , y आणि z ची मूल्ये एकाच वेळी समीकरण सोलुशन (Solution) देतात, तेव्हा ती प्रणाली सुसंगत (Consistent) असते; अन्यथा, ती असुसंगत (Inconsistent) प्रणाली म्हणवली जाते.

उदाहरणार्थ: खाली दिलेली नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे (Non Homogeneous system)

1. $x + 4y + 3z = 5$
   $2x - 7y + 2z = 7$
   $3x + 4y + z = 9$

2. $x + y + z = 2$
   $x - 7y + 4z = 5$
   $x - 4y + 3z = 5$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented matrix) : जर AX = B , हे मॅट्रिक्स स्वरूपातील नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली
असले, तर मॅट्रिक्स (A, B) लाऑगमेंटेडमॅट्रिक्स (Augmented matrix) असे म्हणतात.
दिलेल्या समीकरणाचा ऑगमेंटेडमॅट्रिक्स (Augmented matrix) खालील प्रकारे आपण लिहू शकतो.

$$(A, B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & d_3 \end{bmatrix}$$

2.6.2 होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली (Homogeneous system of equation)

होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली अशी असते कि ज्यात समीकरणाच्या उजव्या बाजूस शून्य असतात. आपणस असेही म्हणता येईल कि जर AX=B , मध्ये B हा शून्य मॅट्रिक्स असले, तर ती होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली असते .

उदाहरणार्थ:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

उदाहरणार्थ: खाली दिलेली होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे (Homogeneous system)

1. $x - 3y + z = 0$
   $2x - 4y + 2z = 0$
   $x + 4y + z = 0$

2. $x + 3y + z = 0$
   $x - y + 5z = 0$
   $x - y + 3z = 0$

2.7 नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीसाठी सुसंगततेची अट (Condition for consistency for non-homogeneous system of equation)

आपण प्रथम ,AX = B ही m समीकरणे असलेली आणि n अज्ञात (unknowns) असलेली नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीचा विचार करू.

जर m = n (समीकरणांची संख्या = अज्ञातांची संख्या) असेल तर खाली दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीसाठी सुसंगततेच्या अटी आहेत .

1) जर $\rho(A) = \rho(A, B)$

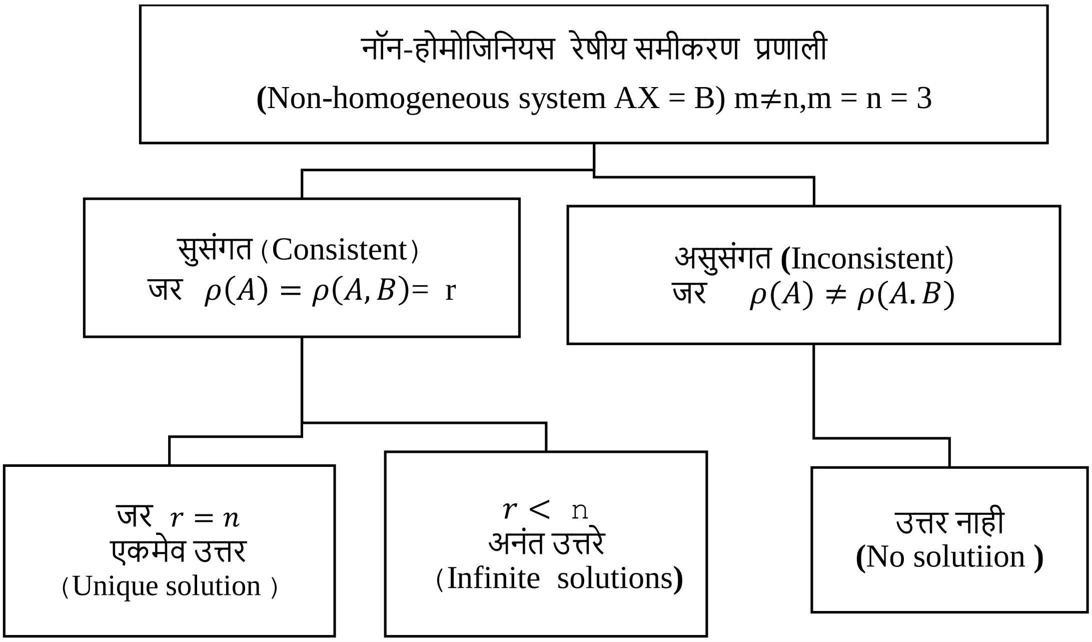
अर्थात, मॅट्रिक्स A चा रँक आणि ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक समान असला, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B ही सुसंगत (consistent) असते. आणि त्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला एकमेव उत्तर (Unique solution) असते.

2)जर $\rho(A) \neq \rho(A, B)$

अर्थात, मॅट्रिक्स A चा रँक आणिऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक समान नसेल, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B ही असुसंगत (inconsistent)असते. आणि त्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला कोणतेही उत्तर (no Solution) नसते.

3) जर $\rho(A) = \rho(A, B) = r < n$

अर्थात, मॅट्रिक्स A चा रँक आणिऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक समान असला, पण मॅट्रिक्सचा रँक अज्ञातांच्या संख्येपेक्षा कमी असेल, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B ही सुसंगत (consistent) असते. आणि त्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला अनंत उत्तरे (infinitely many solutions) असू शकतात.



.

उदाहरण 2.17: खालील समीकरण प्रणालीची सुसंगतता (Consistency) तपासा.

$$x - y + 2z = 2$$
$$2x + y + 4z = 7$$
$$4x - y + z = 4$$

उत्तर: दिलेली समीकरणे ही नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे.

दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

AX = B

आपण दिलेल्या समीकरणाचाऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & : & 2 \\ 2 & 1 & 4 & : & 7 \\ 4 & -1 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 3 & -7 & : & -4 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 3 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & -7 & : & -7 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow \frac{R_2}{3}$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & -7 & : & -7 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A चा रँक = $\rho(A) = 3 - 0 = 3$ आणि मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक = $\rho(A, B) = 3 - 0 = 3$

$\rho(A) = \rho(A, B) = 3$ = अज्ञातांची संख्या (number of unknowns) = 3

म्हणून दिलेली नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली ही सुसंगत (Consistent)आहे. नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला एकमेव उत्तर (Unique solution) आहे.

उदाहरण 2.18: खालील समीकरण प्रणालीची सुसंगतता(Consistency) तपासा.

$$3x + y + z = 2$$
$$x - 3y + 2z = 1$$
$$7x - y + 4z = 5$$

उत्तर: दिलेली समीकरणे ही नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे.

दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

AX = B

आपण दिलेल्या समीकरणाचाऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू.

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & : & 2 \\ 1 & -3 & 2 & : & 1 \\ 7 & -1 & 4 & : & 5 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & : & 1 \\ 3 & 1 & 1 & : & 2 \\ 7 & -1 & 4 & : & 5 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & : & 1 \\ 0 & 10 & -5 & : & -1 \\ 0 & 20 & -10 & : & -2 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & : & 1 \\ 0 & 10 & -5 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow \frac{R_2}{10}$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & : & \frac{-1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A चा रँक = $\rho(A) = 3 - 1 = 2$ आणि मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक = $\rho(A, B) = 3 - 1 = 2$

$\rho(A) = \rho(A, B) = 2 <$ अज्ञातांची संख्या(Number of variables) = 3

म्हणून दिलेली नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली ही सुसंगत (Consistent) आहे. नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला अनंत उत्तरे (Infinitely many solutions) आहेत.

उदाहरण 2.19 खालील समीकरण प्रणालीची सुसंगतता तपासा.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ x + y + 2z &= 2 \\ 5x - y + 8z &= 5 \end{aligned}$$

उत्तर: दिलेली समीकरणे ही नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे.

दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

आपण दिलेल्या समीकरणाचाऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & : & 2 \\ 1 & 1 & 2 & : & 2 \\ 5 & -1 & 8 & : & 5 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 2 \\ 2 & -1 & 3 & : & 2 \\ 5 & -1 & 8 & : & 5 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 2 \\ 0 & -3 & -1 & : & -2 \\ 0 & -6 & -2 & : & -5 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying)$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 2 \\ 0 & -3 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A चा रँक = $\rho(A) = 3 - 1 = 2$ आणि मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक = $\rho(A, B) = 3 - 0 = 3$

$$\rho(A) \neq \rho(A, B)$$

नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली ही असुसंगत (inconsistent) आहे. आणि त्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला कोणतेही उत्तर (No Solution) नाही.

सरावासाठी उदाहरणे

Q. खालील समीकरण प्रणालीची सुसंगतता (Consistency) तपासा.

a) $x + y + z = 6$
$2x + y + 3z = 13$
$5x + 2y + z = 12$

b) $3x + 2y + z = 10$
$2x + 5y + 3z = 15$
$5x - 4y - 3z = 0$

c) $2x - 3y - z = 3$ d) $x + 2y - z = 1$
$x + 2y - z = 4$ $x + y + 2z = 9$
$5x - 4y - 3z = -2$ $2x + y - z = 2$

2,7 नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीचे समाधान (Solution of non-Homogeneous system of equation)

दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीचे सोलुशन (solution) शोधण्यासाठी आपण खालील स्टेपचा वापर करू.

स्टेप I: समीकरण नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला मॅट्रिक्स रूपात लिहा.

स्टेप II: समीकरण नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीपासून ऑगमेंटेडमॅट्रिक्स लिहा.

स्टेप III: ऑगमेंटेड मॅट्रिक्सवर प्राथमिक पंक्ती (row)परिवर्तन करा आणि मॅट्रिक्सला एशलॉन रूपात लिहा.

स्टेप IV: मॅट्रिक्स A चा रँक = $\rho(A)$ आणि मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक = $\rho(A, B)$ शोधा

सुसंगतता तपासा:

- जर $\rho(A) = \rho(A,B)$ असेल, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B सुसंगत आहे आणि त्याला एकमेव आहे.
- जर $\rho(A) \neq \rho(A,B)$ असेल, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B असुसंगत आहे आणि त्याला कोणतेही उत्तर नाही.
- जर $\rho(A) = \rho(A,B) = r < n$ असेल, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली प्रणाली AX = B सुसंगत आहे आणि त्याला अनंत (infinitely many) उत्तरे असू शकतात.

स्टेप V: सुसंगतता तपासल्यानंतर त्यानुसार उत्तर शोधा.

उदाहरण 2.20: दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीचे सुसंगतता तपासा, जर सुसंगत असेल तर ते सोडवा.

$$\mathbf{3x + y + 2z = 3}$$
$$\mathbf{2x - 3y - z = -3}$$
$$\mathbf{x + 2y + z = 4}$$

- **उत्तर:** दिलेली समीकरणे ही नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे.

दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

AX = B

आपण दिलेल्या समीकरणाचाऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू.

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & : & 3 \\ 2 & -3 & -1 & : & -3 \\ 1 & 2 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 2 & -3 & -1 & : & -3 \\ 3 & 1 & 2 & : & 3 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying)$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 0 & -7 & -3 & : & -11 \\ 0 & -5 & -1 & : & -9 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying)$R_3 \rightarrow \frac{R_2}{-7}$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & : & \frac{11}{7} \\ 0 & -5 & -1 & : & -9 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying)$R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & : & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} & : & -\frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A चा रँक = $\rho(A) = 3 - 0 = 3$ आणि मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक = $\rho(A, B) = 3 - 0 = 3$

$\rho(A) = \rho(A, B) = 3$ = अज्ञातांची संख्या (Number of unknowns) =3

म्हणून दिलेली नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली ही सुसंगत (Consistent) आहे.

नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला एकमेव उत्तर (Unique solution) आहे .

पंक्ती(Row) R_3 पासून , $\frac{8}{7}z = -\frac{8}{7}$

$z = -1$

पंक्ती (Row) R_2 पासून , $y + \frac{3}{7}z = \frac{11}{7}$

$y = \frac{11}{7} + \frac{3}{7} = \frac{14}{7} = 2$

पंक्ती (Row) R_1 पासून , $x+2y+z = 4$

$x = 4 - 2(2) - (-1)$

$x = 4 - 4 + 1 = 1$

म्हणून $x = 1, y = 2, z = -1$ हे दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली उत्तर आहे.

उदाहरण 2.21: दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीचे सुसंगतता तपासा, जर सुसंगत असेल तर ते सोडवा.

$$\mathbf{2x - y - z = 2}$$
$$\mathbf{x + 2y + z = 2}$$
$$\mathbf{4x + 7y - 5z = 2}$$

उत्तर: दिलेली समीकरणे ही नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे. दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

AX = B

आपण दिलेल्या समीकरणाचाऑगमेंटेडमॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू.

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & : & 2 \\ 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 4 & -7 & -5 & : & 2 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 2 & -1 & -1 & : & 2 \\ 4 & -7 & -5 & : & 2 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & -5 & -3 & : & -2 \\ 0 & -15 & -9 & : & -6 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 2 \\ 0 & -5 & -3 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A चा रँक = $\rho(A) = 3 - 1 = 2$ आणि मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक = $\rho(A, B) = 3 - 1 = 2$

$\rho(A) = \rho(A, B) = 2 <$ अज्ञातांची संख्या(Number of variables) = 3

म्हणून दिलेली नॉन होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली ही सुसंगत (consistent)आहे. होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला अनंत उत्तरे (Infinitely many solutions) आहेत

Put z = t

पंक्ती(Row) R_2 पासून, $-5y - 3z = -2$

$$5y + 3z = 2$$

$$y = \frac{2-3z}{5}$$

$$\therefore \quad y = \frac{2-3t}{5}$$

पंक्ती(Row) R_1 पासून $x + 2y + z = 2$

z आणि y चे मूल्य ठेऊ ,

$$x = 2 - 2\frac{(2-3t)}{5} - t$$

$$\therefore \quad x = \frac{10-4+6t-5t}{5} = \frac{6+t}{5}$$

म्हणून $x = \frac{6+t}{5}$, $y = \frac{2-3t}{5}$, z = t , हे दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली उत्तर आहे.

उदाहरण 2.22 नॉन होमोजिनियस समीकरण प्रणालीसाठी कोणत्या α आणि β च्या मूल्यांसाठी

1) कोणतेही उत्तर नाही (No solution) 2) एकमेव उत्तर(Uniuqe solution)

3) अनंत उत्तरे असतील (Infinitely many solutions) हे तपासा.

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 10$$
$$x + 2y + \alpha z = \beta$$

उत्तर: दिलेली समीकरणे ही नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे.

दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ \beta \end{bmatrix}$$

AX = B

आपण दिलेल्या समीकरणाचाऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू.

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 1 & 2 & 3 & : & 10 \\ 1 & 2 & \alpha & : & \beta \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 - R_1$ आणि $R_3 \to R_3 - R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 4 \\ 1 & 1 & \alpha - 1 & : & \beta - 6 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \to R_3 - R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & : & \beta - 10 \end{bmatrix} \quad \text{----------1}$$

घटना-I (Case -I): कोणतेही उत्तर नाही (No solution)

जर $\rho(A) \neq \rho(A,B)$ असेल, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B असुसंगत (Inconsistant) आहे आणि त्याला कोणतेही उत्तर नाही. ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स 1 चे काळजीपूर्वक निरीक्षण करू

जेव्हा $\alpha - 3 = 0$ आणि $\beta - 10 \neq 0$, तेव्हा नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला कोणतेही उत्तर नाही.

कारण, जेव्हा $\alpha = 3$ आणि $\beta \neq 10$, तेव्हा $\rho(A) = 3 - 1 = 2$ आणि $\rho(A,B) = 3 - 0 = 3$

$$\rho(A) \neq \rho(A,B)$$

$\alpha = 3$ आणि $\beta \neq 10$, असेल तेव्हा समीकरण प्रणालीला कोणतेही उत्तर नाही.

घटना-2 (Case -II): एकमेव उत्तर (**Unique solution)**

जर $\rho(A) = \rho(A,B)$ असेल, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B सुसंगत आहे आणि त्याला एकमेव उत्तर आहे.,

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स 1 चे काळजीपूर्वक निरीक्षण करू. जेव्हा $\alpha \neq 3$ आणि $\beta \neq 10$, तेव्हा प्रणालीला एकमेव उत्तर मिळते कारण तेव्हा $\rho(A) = 3 - 0 = 3$ आणि $\rho(A,B) = 3 - 0 = 3$,

$\rho(A) = \rho(A,B) = 3 =$ अज्ञातांची संख्या (No of unknons) असेल.

$\therefore$ $\alpha \neq 3$ आणि $\beta \neq 10$, असेल तेव्हा समीकरण प्रणालीला एकमेव उत्तर मिळेल.

घटना-3 (Case -III) अनंत उत्तरे असतील (Infinitely many solutions)

जर $\rho(A) = \rho(A,B) = r < n$ असेल, तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B सुसंगत आहे आणि त्याला अनंत (Infinitely many) उत्तरे असू शकतात. ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स 1 चे काळजीपूर्वक निरीक्षण करू.

जेव्हा $\alpha = 3$ आणि $\beta = 10$, तेव्हा तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला अनंत उत्तरे असतील.

कारण तेव्हा $\rho(A) = 3 - 1 = 2$ आणि $\rho(A,B) = 3 - 1 = 2$ येते

जर $\rho(A) = \rho(A,B) = 2 < 3 =$ अज्ञातांची संख्या (No of unknowns) असेल,

$\therefore$ $\alpha = 3$ आणि $\beta = 10$, तेव्हा असेल तेव्हा समीकरण प्रणालीला अनंत उत्तरे असतील.

उदाहरण 2.23: खालील नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली सुसंगत होण्यासाठी β चे मूल्य ठरवा आणि त्या β मूल्यांसाठी त्यांना सोडवा.

$$\mathbf{x + 2y + z = 3}$$
$$\mathbf{x + y + z = \boldsymbol{\beta}}$$
$$\mathbf{3x + y + 3z = \boldsymbol{\beta}^2}$$

उत्तर: दिलेली समीकरणे ही नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे .

दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \beta \\ \beta^2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

आपण दिलेल्या समीकरणाचाऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू.

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 1 & 1 & 1 & : & \beta \\ 3 & 1 & 3 & : & \beta^2 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 0 & : & \beta - 3 \\ 0 & -5 & 0 & : & \beta^2 - 9 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 - 5R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 0 & : & \beta - 3 \\ 0 & 0 & 0 & : & \beta^2 - 5\beta + 6 \end{bmatrix} \text{-----------------1}$$

ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स 1 चे काळजीपूर्वक निरीक्षण करू.

आपणास असे दिसते कि जर $\beta^2 - 5\beta + 6$ हे शून्य असेल तर नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली AX = B

ही सुसंगत (Consistent) येईल.

म्हणून , $\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$

दिलेले समीकरण हे β चा मूल्यसाठी सोडवू .

$$\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$$
$$\beta^2 - 3\beta - 2\beta + 6 = 0$$
$$(\beta - 2)\ (\beta - 3) = 0 \qquad \beta = 2 \text{ or } \beta = 3$$

$\beta = 2$ मूल्य साठी: जेव्हा **$\beta = 2$** हे मूल्य समीकरण **1** मध्ये ठेऊ

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

आपण z = t ठेऊ , पंक्ती(Row) R_2 पासून - y = -1

y =1

पंक्ती(Row) R_1 पासून x+2y +z = 3

$Z = t$, y =1 हे मूल्य ठेऊ

x = 3- 2(1) -t

x = 1 – t

म्हणून, x = 1 - t, y = 1 आणि z = t हे दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली उत्तर आहे .

$\beta = 3$ मूल्य साठी: जेव्हा **$\beta = 2$,** हे मूल्य समीकरण **1** मध्ये ठेऊ

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

आपण z = t ठेऊ . पंक्ती(Row) R_2 पासून

-y = 0 , y = 0

पंक्ती(Row) R_1 पासून x + 2y + z = 3

$z = t$, y = 0 हे मूल्य ठेऊ

x = 3 -2(0) -t

x = 3 - t

म्हणून, x = 3 - t, y = 0 आणि z = t हे दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली उत्तर आहे

सरावासाठी उदाहरणे (Example for **practice)**

Q.1 दिलेल्या नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीचे सुसंगतता तपासा, जर सुसंगत असेल तर ते सोडवा.

a) 5X +3 y +7z = 4
3x + 26y +2 z =9
7x + 2y +10 z = 5

b) x + y +z = 6
x - y +2 z =5
3x +y + z = 8

Q. 2 नॉन-होमोजिनियस समीकरण प्रणालीसाठी कोणत्या μ आणि β च्या मूल्यांसाठी

a) कोणतेही उत्तर नाही (No solution) b) एकमेव उत्तर(Uniuqe solution)

c) अनंत उत्तरे असतील **(**Infinitely many solutions**)** हे तपासा.

x + 3y +5z = 9
7x +3y -2z = 8
2x +3y + $\mu z = \beta$

Q. 3 खालील नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली सुसंगत होण्यासाठी k चे मूल्य ठरवा आणि त्या k मूल्यांसाठी त्यांना सोडवा.

x + y + z = 1
2x + y - 4z =k
4x + y + 10z = k^2

2.9 होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली (Homogeneous system of Linear equation)
खाली दिलेले होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली आहे,

$$a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z = 0$$
$$a_{21}\, x + a_{22} y + a_{23}\, z = 0$$
$$a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33} z = 0$$

वरील समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात खालील प्रकारे लिहू शकतो .

$$A\,X = 0$$

येथे $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

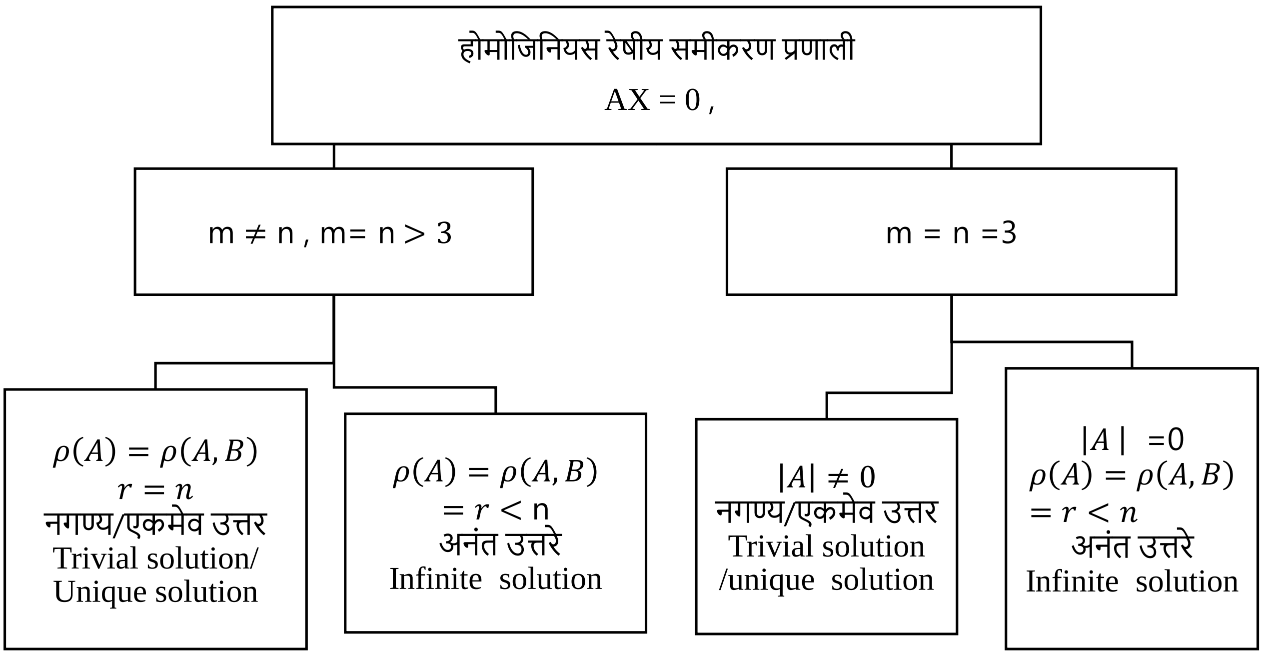
आपणस असेही म्हणता येईल कि जर AX= 0, मध्ये B हा शून्य मॅट्रिक्स असेल तर ती होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली असते

जेव्हा A X = 0 मध्ये, x , y आणि z ची मूल्ये एकाच वेळी समीकरण समाधान देतात, तेव्हा ती प्रणाली सुसंगत (consistant) असते; अन्यथा, ती असुसंगत (inconsistent) प्रणाली म्हणवली जाते.

ऑगमेंटेडमॅट्रिक्स (Augmented matrix) : जर AX = 0 , हे मॅट्रिक्स स्वरूपातील नॉन-होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली असले, तर मॅट्रिक्स (A, B) ला ऑगमेंटेडमॅट्रिक्स (augmented matrix) असे म्हणतात .

दिलेल्या समीकरणाचा ऑगमेंटेडमॅट्रिक्स (Augmented matrix) खालील प्रकारे आपण लिहू शकतो.

$$(A, B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & 0 \end{bmatrix}$$



उदाहरण 2.24 दिलेली होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली सोडावा

$$\mathbf{2x + y + 3z = 0,\ x + 2y = 0,\ y + z = 0}$$

उत्तर: दिलेली होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली

$$2x + y + 3z = 0$$
$$x + 2y + 0z = 0$$
$$0x + y + z = 0$$

दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

AX = B

आपण दिलेल्या समीकरणाचाऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू.

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & : & 0 \\ 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 2 & 1 & 3 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -3 & 3 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying)$R_2 \rightarrow -\frac{R_2}{3}$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A चा रँक = $\rho(A) = 3 - 0 = 3$ आणि मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक = $\rho(A, B) = 3 - 0 = 3$

$\rho(A) = \rho(A, B) = 3$ = अज्ञातांची संख्या (Number of unknowns) = 3

म्हणून दिलेली होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली ही सुसंगत (consistent) आहे. होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला एकमेव उत्तर (Unique solution) आहे.

पंक्ती(Row) R_3 पासून $2z = 0$ $\therefore z = 0$

पंक्ती(Row) R_2 पासून $y - z = 0$

$y = z$ $\therefore y = 0$

पंक्ती(Row) R_2 पासून $x + 2y = 0$

$\therefore x = -2y$

$\therefore x = -2(0)$

म्हणून $x = 0, y = 0, z = 0$ हे दिलेल्या होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली उत्तर आहे.

उदाहरण 2 .25 दिलेली होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली सोडावा

$3x - y - z = 0,\ x + y + 2z = 0,\ 5x + y + 3z = 0$

उत्तर: दिलेली होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली

$3x - y - z = 0$

$x + y + 2z = 0$

$5x + y + 3z = 0$

दिलेली समीकरणे आपण मॅट्रिक्सचा स्वरूपात (Matrix form) खालील प्रकारे लिहू शकतो.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

आपण दिलेल्या समीकरणाचा ऑगमेंटेड मॅट्रिक्स (Augmented Matrix) तयार करू.

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & : & 0 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 5 & 1 & 3 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 3 & -1 & -1 & : & 0 \\ 5 & 1 & 3 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1$ आणि $R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & -4 & -7 & : & 0 \\ 0 & -4 & -7 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & -4 & -7 & : & 0 \\ 0 & -4 & -7 & : & 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$

$$(A, B) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & -4 & -7 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

मॅट्रिक्स A चा रँक = $\rho(A) = 3 - 1 = 2$ आणि मॅट्रिक्स (A, B) चा रँक = $\rho(A, B) = 3 - 1 = 2$

$\rho(A) = \rho(A, B) = 2 <$ अज्ञातांची संख्या(Number of variables) = 3

म्हणून दिलेली होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली ही सुसंगत (Consistent) आहे.

होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणालीला अनंत उत्तरे (Infinitely many solutions) आहेत.

$z = t$ ठेऊ पंक्ती(Row) R_2 पासून $-4y - 7z = 0$

$y = -\frac{7}{4}z$ $\therefore y = -\frac{7t}{4}$

पंक्ती(Row) R_1 पासून $x + y + 2z = 0$ $\therefore x = -2z - y$

$\therefore x = -2(t) - (-\frac{7t}{4})$

$\therefore x = \frac{-8t+7t}{4} = \frac{-t}{4}$

म्हणून $x = \frac{-t}{4}$, $y = -\frac{7t}{4}$, $z = t$ हे दिलेल्या होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली उत्तर आहे.

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice**)**

Q.1 **दिलेली होमोजिनियस रेषीय समीकरण प्रणाली सोडावा.**

a) $x + 2y + 3z = 0$
$2x + 3y + z = 0$
$4x + 5y + 4z = 0$

b) $4x - y + z = 0$
$x + 2y - z = 0$
$3x + y + 5z = 0$

c) $2x - y + 3z = 0$
$3x + 2y + z = 0$
$x - 4y + 5z = 0$

d) $x + 3y + z = 0$
$2x - 2y - 6z = 0$
$3x + y - 5z = 0$

2.10 ईगेन मूल्ये आणि ईगेन व्हेक्टर (Eigen values and Eigen vectors)

जर A हा n×n चौरस मॅट्रिक्स असेल आणि X आणि Y हे दोन शून्य नसलेले स्तंभ व्हेक्टर (Column vectors) असतील,

$$AX = Y \qquad \text{-----------1}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & --- & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & - & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ - \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ - \\ - \\ y_n \end{bmatrix}$$

दोन शून्य नसलेले व्हेक्टर X आणि Y समान दिशेत असतात, जर एक व्हेक्टर दुसऱ्या व्हेक्टरचा शून्य नसलेला गुणाकार असेल. याचा अर्थ, Y= λ·X· जिथे λ हा शून्य नसलेला स्केलर आहे.

$$Y = \lambda X$$
$$AX = \lambda X$$
$$AX = \lambda I X \qquad X = IX$$
$$(A - \lambda I) X = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & --- & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & - & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ - \\ - \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ - \\ 0 \end{bmatrix}$$

ही समीकरणाची होमोजिनियस रेषीय आहे या समीकरणाला नगण्य उत्तर आहे.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$D(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & --- & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & - & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

निर्धारक (Determinant) सोडवल्यानंतर आम्हाला बहुपदी समीकरण म्हणून मिळेल.

$$D(\lambda) = |A - \lambda I| = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_n$$

पण प्राप्त केलेल्या बहुपदी समीकरणाचे रैखिक घटकांमध्ये विभाजन करू

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1) ---- (\lambda - \lambda n)$$

वैशिष्ट्यपूर्ण निर्धारक (characteristic determinant) : $= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & --- & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & - & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

वैशिष्ट्यपूर्ण मॅट्रिक्स (Characteristic matrix) $= [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & --- & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & - & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$

वैशिष्ट्यपूर्ण बहुपद (Characteristic polynomial): $D(\lambda) = |A - \lambda I| = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_n$

वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण (Characteristic equation): $D(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$

$$a_0 \lambda^{n} + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_n = 0$$

वैशिष्ट्यपूर्ण ईगेन मूल्य:

$$D(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1) ---- (\lambda - \lambda n)$$

$$\lambda = \lambda_1,\ \lambda = \lambda_2 \quad .... \quad \lambda = \lambda n$$

2.10.1ईगेन मूल्ये (Eigenvalues) ईगेन व्हेक्टर (Eigenvectors)च्या व्याख्या :

ईगेन मूल्ये (Eigenvalues): ईगेन मूल्ये ही रैखिक समीकरणांच्या प्रणालीशी संबंधित विशेष स्केलरची संच आहेत. या मूल्यांचा वापर मुख्यतः मॅट्रिक्स समीकरणांमध्ये केला जातो. म्हणून, ईगेन मूल्यांना "विशेष मूल्य" किंवा "विशेषांक" असेही संबोधले जाते. ईगेन मूल्य म्हणजे एक स्केलर जो ईगेन व्हेक्टरचे रूपांतर करण्यासाठी वापरला जातो. मूलभूत समीकरण असे आहे.

$$A \cdot V = \lambda \cdot V$$

येथे, "λ" हा स्केलर मूल्य मॅट्रिक्स A चे ईगेन मूल्य आहे.

ईगेन व्हेक्टर (Eigenvectors): ईगेन व्हेक्टर ही शून्य नसलेली व्हेक्टर आहेत, ज्यांचे दिशा कोणत्याही रैखिक रूपांतरणा नंतर बदलत नाही, परंतु फक्त स्केल होते. समजा, A हा "n × n" मॅट्रिक्स आहे आणि λ हा A चा ईगेन मूल्य आहे, तर V, एक शून्य नसलेला व्हेक्टर, हा ईगेन व्हेक्टर म्हणून ओळखला जातो, जर तो खालील समीकरण पूर्ण करतो.

$$A \cdot V = \lambda \cdot V$$

येथे, V हा मॅट्रिक्स A चा ईगेन व्हेक्टर आहे, ज्याचे संबंधित ईगेन मूल्य λ आहे.

ईगेन मूल्यांचे गुणधर्म(Properties of Eigen value)

1. ट्रेस (Trace) of A: A हा n x n मॅट्रिक्स असल्यास, त्याच्या मुख्य विकर्णावरील सर्व घटकांची बेरीज म्हणजे मॅट्रिक्स A चा ट्रेस असतो .

   $$\text{Trace of } A = a_{11} + a_{12} + a_{13} + ---------- + a_{nn}$$

2. मॅट्रिक्सच्या ईगेन मूल्यांची बेरीज मुख्य कर्णांच्या घटकाची बेरीज आहे.
3. अप्पर आणि लोअर चौरस मॅट्रिक्सची ईगेन मूल्ये मुख्य कर्णावरील घटक आहेत.
4. मॅट्रिक्सच्या ईगेन मूल्यांचे बेरीज मॅट्रिक्सच्या निर्धारकाच्या बरोबरीचे आहे.

   $$\lambda_1 \times \lambda_2 \ .... \times \lambda n = |A|$$

5. सममितीय मॅट्रिक्सचे ईगेन मूल्य वास्तविक आहे .
6. जर λ_1 , λ_2 , λ_3 ....λ_n मॅट्रिक्स A ची ईगेन मूल्ये आहे , तर $\frac{1}{\lambda_1}$ $\frac{1}{\lambda_2}$ … … … …. $\frac{1}{\lambda_n}$ A^{-1} ची ईगेन मूल्ये आहेत.
7. मॅट्रिक्स KA ची ईगेन मूल्ये $k\lambda_1$, k λ_2 , k λ_3 .... k λ_n असतात .
8. A आणि A^T ची ईगेन मूल्ये समान असतात.
9. मॅट्रिक्स A^m ची ईगेन मूल्ये λ_1^{m}, λ_2^{m} .... λn^{m} असतात .

ईगेन मूल्ये आणि ईगेन व्हेक्टर शोधण्याच्या पद्धती(Methods to find eigenvalue and eigen vector) :

a) मॅट्रिक्स ऑफ ऑर्डर 2 **आणि** 3

आपणस A ऑर्डर 2 चे चौरस मॅट्रिक्स आहे

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{bmatrix}$$

मग वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण : $|A - \lambda I| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

हे निर्धारक समीकरण सोडवू , आपल्यला λ_1 आणि λ_2 ची मूल्य मिळतील.

पर्यायी (Alternate): आपण खालील प्रकारेही ईगेन मूल्ये शोधू शकतो .
दिलेल्या 2x2 मॅट्रिक्स Aचे निर्धारण (determinant) काढा . $|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$
गणना करा : S_1 = मॅट्रिक्स A च्या मुख्य विकर्णावरील घटकांची बेरीज , $S_1 = a_{11} + a_{22}$
आता खालील प्रकारे λ मध्ये बहुपदी समीकरण तयार करा .

$$\lambda^2 - s_1\lambda + |A| = 0$$

हे समीकरण सोडवू , आपल्यला λ_1 आणि λ_2 ची मूल्य मिळतील.

b) मॅट्रिक्स ऑफ ऑर्डर 3 (Matrix of order 3) : जर A हा ऑर्डर 3X3 चे चौरस मॅट्रिक्स आहे.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

मग वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण : $|A - \lambda I| = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

हे समीकरण सोडवू , आपल्यला $\lambda_1 \lambda_2$ आणि λ_3 ची मूल्य मिळतील.

पर्यायी (Alternate): आपण खालील प्रकारेही ईगेन मूल्ये शोधू शकतो :

दिलेल्या 3x3 मॅट्रिक्स Aचे निर्धारण (determinant) मूल्य काढा .

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}[a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}] - a_{12}[a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}] \; a_{11}[a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}]$$

नंतर S_1 = च्या मुख्य विकर्णावरील घटकांची बेरीज .

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

नंतर $S_2 = a_{11}$ मायनरचे मूल्य $+ a_{22}$ मायनरचे मूल्य $+ a_{33}$ मायनरचे मूल्य .

$$= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

आता खालील प्रकारे λ मध्ये बहुपदी समीकरण तयार करा.

$$\lambda^3 - s_1\lambda^2 + s_2\lambda - |A| = 0$$

हे समीकरण सोडवू , $\lambda_1 \lambda_2$ आणि λ_3 ची मूल्य मिळतील .

उदाहरण 2.26 दिलेल्या मॅट्रिक्सचे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण शोधा : $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर: आपण प्रथम मॅट्रिक्स A चे निर्धारित मूल्य काढू

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (3)(-2) = 4 + 6 = 10$$

गणना करू : S_1 = A च्या मुख्य विकर्णावरील घटकांची बेरीज .

$S_1 = a_{11}$ घटक मूल्य $+ a_{22}$ घटक मूल्य

$= 1 + 4$

$= 5$

आता खालील प्रकारे λ मध्ये बहुपदी समीकरण तयार करू.

$$\lambda^2 - s_1\lambda + |A| = 0$$

$\lambda^2 -5\lambda +10 = 0$ हे मॅट्रिक्सचे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण आहे .

उदाहरण 2.27 दिलेल्या मॅट्रिक्सचे ईगेन मूल्ये शोधा : $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

उत्तर: आपण प्रथम वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण तयार करू

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (5 - \lambda)(5 - \lambda) - (2)(2) = 0$$

$$= 25 - 5\lambda - 5\lambda + \lambda 2 - 4 = 0$$

$$= \lambda 2 - 10\lambda + 21 = 0$$

$$= (\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3.$$

दिलेल्या मॅट्रिक्सचे $\lambda_1 = 7$ आणि $\lambda_2 = 3$ ईगेन मूल्ये आहेत

पर्यायी (Alternate): आपण खालील प्रकारेही ईगेन मूल्ये शोधू शकतो **.**

आपण प्रथम मॅट्रिक्स A चे निर्धारित मूल्य काढू

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (5)(5) - (2)(2) = 25 - 4 = 21$$

गणना करू : S_1 = मॅट्रिक्स A च्या मुख्य विकर्णावरील घटकांची बेरीज .

$S_1 = a_{11}$ घटक मूल्य $+a_{22}$ घटक मूल्य

$= 5 + 5 = 10$

आता खालील प्रकारे λ मध्ये बहुपदी समीकरण तयार करू.

$$\lambda^2 - s_1\lambda + |A| = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

बहुपदी समीकरण सोडवू,

$$(\lambda - 7)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3.$$

दिलेल्या मॅट्रिक्सचे $\lambda_1 = 7$ आणि $\lambda_2 = 3$ ईगेन मूल्ये आहेत

उदाहरण 2.28: दिलेल्या मॅट्रिक्सचे ईगेन मूल्ये शोधा $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर: दिलेल्या मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

गणना करू : S_1 = मॅट्रिक्स A च्या मुख्य विकर्णावरील घटकांची बेरीज

$S_1 = a_{11}$ घटक मूल्य $+a_{22}$ घटक मूल्य $+ a_{33}$ घटक मूल्य

$= 2 + 3 + 2 = 7$

S_2 $= a_{11}$ मायनरचे मूल्य $+a_{22}$ मायनरचे मूल्य $+ a_{33}$ मायनरचे मूल्य

$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= [(3)(2) - (2)(2)] + [(2)(2) - (1)(2)]\ [(2)(3) - (1)(2)]$

$= [6 - 2)] + [4 - 1]\ [6 - 2]$

$= 4 + 3 + 4 = 11$

दिलेल्या 3x3 मॅट्रिक्स A चे निर्धारण (determinant) मूल्य काढा .

$$|A| = 2\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 2[6-2] - 2[2-1] + 1[2-3]$$

$$= 2[4] - 2[1] + 1[-1]$$

$$= 8 - 2 - 1 = 5$$

आता खालील प्रकारे λ मध्ये बहुपदी समीकरण तयार करू,

$$\lambda^3 - s_1\lambda^2 + s_2\lambda - |A| = 0$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

बहुपदी समीकरण सोडवू $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$,

$$(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 5$$

दिलेल्या मॅट्रिक्सचे $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ आणि $\lambda_3 = 5$ ईगेन मूल्ये आहेत.

उदाहरण 2.29: दिलेल्या मॅट्रिक्सचे ईगेन मूल्ये (Eigen values) ईगेन व्हेक्टर (Eigen vectors) शोधा:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{4}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{bmatrix}$$

उत्तर: दिलेल्या मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}$

आपण प्रथम वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण तयार करू

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 2\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$(5 - \lambda)(2 - \lambda) - (4)(1) = 0$$

$$10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \qquad (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

$\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$. दिलेल्या मॅट्रिक्सचे $\lambda_1 = 1$ आणि $\lambda_2 = 6$ ईगेन मूल्ये आहेत

आता आपण दिलेल्या मॅट्रिक्सचे $\lambda_1 = 1$ आणि $\lambda_2 = 6$ ईगेन मूल्ये साठी ईगेन व्हेक्टर शोधु

ईगेन मूल्ये साठी $\lambda_1 = 1$

समजा $\lambda_1 = 1$ या ईगेन मूल्ये साठी , $v_1 = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ईगेन व्हेक्टर आहे .

$\lambda = 1$ हे मूल्य खाली दिलेल्या समीकरांमध्ये टाकू.

$$\begin{bmatrix}5-\lambda & 4\\1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0$$

आपल्याला मिळेल,

$$\begin{bmatrix}5-1 & 4\\1 & 2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}4 & 4\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to 4R_2 - R_1$

$$\begin{bmatrix}4 & 4\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$4x + 4y = 0$$

पंक्ती (Row) R_1 पासून $x + y = 0$

$y = t$ ठेऊ , आपल्याला $x = -t$ मिळेल .

म्हणून $\lambda_1 = 1$ या ईगेन मूल्ये साठी , $v_1 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}$ हा ईगेन व्हेक्टर तयार होता

$\lambda_1 = 1$, या ईगेन मूल्ये साठी , ईगेन व्हेक्टर $v_1 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 1$, या ईगेन मूल्ये साठी , ईगेन व्हेक्टर $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ हा आहे

ईगेन मूल्ये साठी $\lambda_2 = 6$

समजा $\lambda_2 = 6$ या ईगेन मूल्ये साठी , $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ईगेन व्हेक्टर आहे

$\lambda = 6$ हे मूल्य खाली दिलेल्या समीकरांमध्ये टाकू

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5-6 & 4 \\ 1 & 2-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

आपल्याला मिळेल,

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

अमलात आणा (Applying) $R_2 \to R_2 + R_1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

पंक्ती(Row) R_1 पासून , $-x + 4y = 0$

$y = t$ ठेऊ , आपल्याला $x = 4t$ मिळेल

म्हणून $\lambda_2 = 6$ या ईगेन मूल्ये साठी , $v_2 = \begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix}$ हा ईगेन व्हेक्टर तयार होता.

$\lambda_2 = 6$, या ईगेन मूल्ये साठी , ईगेन व्हेक्टर $v_2 = \begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 6$, या ईगेन मूल्ये साठी , ईगेन व्हेक्टर $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ हा आहे.

म्हणून दिलेल्या मॅट्रिक्सचे $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$ या ईगेन मूल्ये आहेत.

आणि $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ईगेन व्हेक्टर आहेत.

उदाहरण 2.30 दिलेल्या मॅट्रिक्सचे ईगेन मूल्ये शोधा $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$

उत्तर: दिलेल्या मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

गणना करू: S_1 = मॅट्रिक्स A च्या मुख्य विकर्णावरील घटकांची बेरीज .

$S_1 = a_{11}$ घटक मूल्य $+ a_{22}$ घटक मूल्य $+ a_{33}$ घटक मूल्य

$= 1 + 2 + 3 = 6$

$S_2 = a_{11}$ मायनरचे मूल्य $+ a_{22}$ मायनरचे मूल्य $+ a_{33}$ मायनरचे मूल्य

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= [6 - 2)] + [3 + 2] + [2 - 0]$

$= 4 + 5 + 2 = 11$

दिलेल्या 3x3 मॅट्रिक्स Aचे निर्धारण (determinant) मूल्य काढू.

$$|A| = 1\begin{vmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{vmatrix}$$

$= 1[6-2]\ -\ 0[3-2]\ +1[2-4]$

$= 1[4]\ -\ 0[1]\ -1[-2]$

$= 4+2 = 6$

आता खालील प्रकारे λ मध्ये बहुपदी समीकरण तयार करू .

$$\lambda^3 - s_1\lambda^2 + s_2\lambda - |A| = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda\ \ 6 = 0$$

बहुपदी समीकरण सोडवू, दिलेल्या मॅट्रिक्सचे $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ आणि $\lambda_3 = 5$ ईगेन मूल्ये आहेत

उदाहरण 2.31: दिलेल्या मॅट्रिक्सच्या दोन ईगेन मूल्यांचे गुणाकार 16 आहे, तर तिसरे ईगेन मूल्य शोधा:

$$A = \begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\-2 & 3 & -1\\2 & -1 & 3\end{bmatrix}.$$

उत्तर: दिलेल्या मॅट्रिक्स $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\-2 & 3 & -1\\2 & -1 & 3\end{bmatrix}$

समजा λ_1, λ_2 आणि λ_3 हे दिलेल्या मॅट्रिक्सच्या ईगेन मूल्ये आहेत.

परंतु आपल्याला माहित आहे कि, सर्व ईगेन मूल्याचे गुणाकार = मॅट्रिक्सच्या निर्धारकाचे मूल्य.

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = |A|$$

परंतु आपल्याला दिले आहे कि , $\lambda_1 \times \lambda_2 = 16$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = \begin{vmatrix}6 & -2 & 2\\-2 & 3 & -1\\2 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

$= 6[9-1]\ -(-2)\ [-6+2]\ +2[2-6]$

$= 6[8]\ +2[-4]\ +2[-4]$

$= 48 - 8 - 8$

$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 32$

$16 \times \lambda_3 = 32$

$\lambda_3 = \frac{32}{16} = 2$

तर दिलेल्या मॅट्रिक्स तिसरे ईगेन मूल्य $\lambda = 2$ आहे..

उदाहरण 2.32: दिलेल्या मॅट्रिक्सच्या दोन ईगेन मूल्य 1 आहे, तर A^{-1} या मॅट्रिक्सचे ईगेन मूल्य शोधा .

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{bmatrix}.$$

उत्तर: दिलेल्या मॅट्रिक्स $A = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

समजा λ_1, λ_2 आणि λ_3 हे दिलेल्या मॅट्रिक्सच्या ईगेन मूल्ये आहेत.

परंतु आपल्याला दिले आहे कि, दोन ईगेन मूल्य 1 आहे

$$,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

परंतु आपल्याला माहित आहे कि, ईगेन मूल्यांची बेरीज = मुख्य कर्ण घटकांची बेरीज

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 3 + 2$$

$$\lambda_1 + 1 + 1 = 2 + 3 + 2$$

$\lambda_1 + 2 = 7$ $\qquad$ $\lambda_1 = 7 - 2 = 5$

दिलेल्या मॅट्रिक्सच्या $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$आणि $\lambda_3 = 5$ ईगेन मूल्ये आहेत.
जर मॅट्रिक्स A ची ईगेन मूल्ये λ_1, λ_2 आणि λ_3 असतील , तर A^{-1} ची मूल्ये ईगेन $\frac{1}{\lambda 1}$, $\frac{1}{\lambda 2}$ आणि $\frac{1}{\lambda 3}$ असतात . A^{-1} ची मूल्ये ईगेन $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$ आणि $\frac{1}{5}$ आहेत.

सरावासाठी उदाहरणे

Q1. दिलेल्या मॅट्रिक्सचे वैशिष्ट्यपूर्ण समीकरण शोधा $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Q2. दिलेल्या मॅट्रिक्सचे ईगेन मूल्ये शोधा **:** $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Q3. दिलेल्या मॅट्रिक्सचे ईगेन मूल्ये (Eigen values) ईगेन व्हेक्टर (Eigen vectors) शोधा**:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

References:

1. Higher Engineering Mathematics by H. K. Dass, Er. Rajnish Verma [S. Chआणि Technical, ISBN: 9788121938907]
2. Higher Engineering Mathematics by Grewal B. S. [Tata McGraw Hill Education, New Delhi, ISBN: 9789386173522]
3. Engineering Mathematics by A. C. Shrivastava, P. K. Shrivastava [PHI Learning, New Delhi, ISBN:9788120342934]

युनिट -3
व्हेक्टर्स आणि टेन्सर्स
(Vectors and Tensors)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome):

CO3: व्हेक्टर आणि टेन्सरवर आधारित मूलभूत ऑपरेशन्स कार्यान्वित करण्यासाठी प्रोग्राम तयार करा.

घटक निष्पत्ती (Theory Learning outcome):

1. दिलेल्या व्हेक्टरचे मॅग्निट्यूड (Magnitude) आणि दिलेल्या व्हेक्टरला लंब (Perpendicular) असलेला युनिट व्हेक्टर शोधा.
2. व्हेक्टरचा दिशानिर्देश गुणोत्तर (Direction ratio) आणि दिशा कोसाइन्सची (Direction cosines) गणना करा.
3. दोन व्हेक्टरचा स्केलर डॉट (Scalar dot) प्रॉडक्ट शोधा.
4. दोन व्हेक्टरमधील कोन (Angle) स्केलर डॉट (Scalar dot) प्रॉडक्ट वापरून शोधा.
5. दुसऱ्या व्हेक्टरवर एका व्हेक्टरचे प्रोजेक्शन (Projection) शोधा.
6. दोन व्हेक्टरचा व्हेक्टर क्रॉस (Vector cross) प्रॉडक्ट शोधा.
7. दोन व्हेक्टरमधील कोन (Angle) व्हेक्टर क्रॉस (Vector cross) प्रॉडक्ट वापरून शोधा.
8. व्हेक्टरांचा स्केलर ट्रिपल (Scalar triple) प्रॉडक्ट शोधा.
9. वेगवेगळ्या प्रकारच्या टेन्सरची (Tensor) व्याख्या करा.

3.1 एआय (AI)आणि एमएल(ML) मधील व्हेक्टर आणि टेन्सरचा परिचय (Introduction to Vectors and Tensors in AI and ML)

अनेक डोमेनमध्ये कृत्रिम बुद्धिमत्ता (Atificial intelligence) आणि मशीन लर्निंग (Machine Learning) मध्ये व्हेक्टर महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावतात, व्हेक्टर इतके महत्त्वाचे का आहेत याची काही मुख्य कारणे येथे आहेत. विशेषत: संगणक दृष्टी (Computer vision), नैसर्गिक भाषा प्रक्रिया (Natural Language Processing), संख्यात्मक प्रतिनिधित्व (Numerical Representation), एम्बेडिंग डेटा समानता (Embedding Data Similarity) अंतर माप (Distance Measures), कार्यक्षम गणना (Efficient Computation), फिचर रूपांतर (Feature Transformation) लॅटंट स्पेस मध्ये प्रतिनिधित्व (Representation in Latent Space) आणि बरेच काही.

कृत्रिम बुद्धिमत्ता (Atificial intelligence)) आणि मशीन लर्निंग (Machine Learning) मध्ये टेन्सर आश्चर्यकारकपणे महत्त्वपूर्ण आहेत, विशेषत: सखोल शिक्षण (Deep Learning) आणि तंत्रिका नेटवर्क (Neural networks) मध्ये सोप्या भाषेत, टेन्सर हे मॅट्रिक्स (Matrix) आणि व्हेक्टर मल्टी डायमेनशनल सामान्यीकरण आहे. व्हेक्टर हे 1 डायमेनशनल अ‍ॅरे(array) आहेत आणि मॅट्रिक्स 2 डायमेनशनल अ‍ॅरे(array) आहेत. उच्च आयामिक (Higher Dimensional) डेटा हाताळण्याची ही क्षमता त्यांना आधुनिक एआय सिस्टममध्ये आवश्यक करते.

3.1.2 स्केलर आणि व्हेक्टर प्रमाणांचे व्याख्या (Definition of Scalar and Vector Quantities) .

a) स्केलर क्वान्टिटी (Scalar quantities): स्केलर क्वान्टिटी ही फिजिकल क्वान्टिटी आहे ज्यामध्ये फक्त मॅग्निट्यूड (Magnitute) असते आणि कोणतीही दिशा(Direction) नसते. स्केलर प्रमाण नॉर्मलसंख्यांप्रमाणेच बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार केली जाऊ शकतात.

उदाहरण 1 : खालील क्वान्टिटीचा विचार करा:

द्रव्यमान (5 किग्रॅ), तापमान (20°C), वेळ (10 सेकंद), वेग (50 मीटर/सेकंद), ऊर्जा (200 जूल्स),

उदाहरण 2: वास्तविक संख्या $5, -3, \ 0.75, \pi$ सर्व स्कॅलर्स आहेत कारण ती केवळ एकल संख्यात्मक मूल्ये आहेत ज्यामध्ये दिशा नाही.

उदाहरण 3: जटिल संख्या $3+4i$ (एक जटिल स्केलर) देखील काही गणिती सेटिंग्जमध्ये स्केलर म्हणून मानली जाऊ शकते.

b) व्हेक्टर क्वान्टिटी (Vector quantities) व्हेक्टर क्वान्टिटी ही फिजिकल क्वान्टिटी आहे ज्यामध्ये मॅग्निट्यूड (Magnitude) ते आणि दिशा(Direction) दोन्ही असतात. आणि ते संख्या किंवा बाणाच्या रूपात मांडले जातात, ज्यामध्ये लांबी (आकार) आणि दिशा (ओरिएंटेशन) दोन्ही असतात. व्हेक्टर सामान्यतः अशा प्रमाणांकांचे प्रतिनिधित्व करण्यासाठी वापरले जातात ज्यात अनेक

घटक असतात, जसे की स्थान, वेग, आणि अंतराळातील बल. व्हेक्टर आपसात जोडले जाऊ शकतात, वजावले जाऊ शकतात, आणि स्केलरद्वारे गुणिले जाऊ शकतात (स्केलर गुणाकार). त्यांना इतर व्हेक्टर सह डॉट प्रोडक्ट्स किंवा क्रॉस प्रोडक्ट्स (उच्च Dimention) वापरून गुणिले जाऊ शकते.

उदाहरण 1 : विस्थापन (displacement) (5 मीटर उत्तर दिशेने), वेग (velocity) (50 मी/सेकंद पूर्व दिशेने), बल(force) (20 न्यूटन खालील दिशेने), त्वरण (acceleration)(9.8 मी/से² खालील दिशेने), संवेग (10 किग्रॅ·मी/सेकंद पश्चिम दिशेने) ही सर्व व्हेक्टर प्रमाणांक आहेत ज्यामध्ये दिशा आणि मॅग्निट्यूड दोन्ही असतात.

उदाहरण 2 : 2D वेक्टर: V = (3, 4) हा 2D अंतराळातील वेक्टर दर्शवितो. घटक 3 आणि 4 म्हणजे x-ऍक्सिस (Axis) आणि y-ऍक्सिस (Axis) वर असलेली मापं.

उदाहरण 3 : 3D वेक्टर: u = (1, −2, 3) हा 3D अंतराळातील वेक्टर दर्शवितो ज्यामध्ये घटक x , y, आणि z ऍक्सिस (Axis) वर असतात.

3.1.3 रिप्रेझेंटेशन ऑफ व्हेक्टर (Representation of Vector)

कंपोनेंट फॉर्म (Component Form) गणितामध्ये, व्हेक्टर सामान्यतः संख्यांच्या क्रमित ट्यूपल (घटक) म्हणून दर्शविला जातो, ज्यातील प्रत्येक संख्या समन्वय प्रणालीतील (Co-ordinate system) विशिष्ट ऍक्सिसवर (axis), व्हेक्टरचे प्रक्षेपण (projection) दर्शवते.

1. 2D व्हेक्टर रिप्रेझेंटेशन (2D Vector Representation):
   उदाहरणार्थ: व्हेक्टर v = (3, 4) म्हणजे x-अक्षावर 3 युनिट आणि y-अक्षावर 4 युनिट आहेत.
2. 3D व्हेक्टर रिप्रेझेंटेशन (3D Vector Representation)
   उदाहरणार्थ : व्हेक्टर v = (1, −2, 5) म्हणजे x- ऍक्सिसवर 1 युनिट, y- ऍक्सिसवर −2 युनिट आणि z- ऍक्सिसवर 5 युनिट आहेत.

एक व्हेक्टर क्वान्टिटी एक सरळ रेषेच्या खंडाने दर्शवले जाते जसे की, $\overrightarrow{PQ}$. बाणाचा टोक P पासून Q पर्यंतची दिशा दर्शवते व्हेक्टरची लांबी त्याचे मॅग्निट्युड् दर्शवते. कधीकधी व्हेक्टर V किंवा $\vec{V}$ सारख्या एकाच अक्षराने दर्शविले जातात. व्हेक्टरचे मॅग्निट्युड् |V| किंवा फक्त V ने दर्शविले जाते, जिथे $|\vec{V}|$ म्हणजे मापांक (modulus) असते.

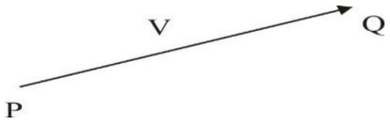


Fig.3.1: रिप्रेझेंटेशन ऑफ व्हेक्टर (Representation of Vector)

3.1.4 व्हेक्टरचे मॅग्निट्यूड किंवा मॉड्युलस (Magnitude or Modulus of a Vector) : समजा x, y आणि z हे खालील Fig.3.2 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे व्हेक्टर OA , OB and OC चे मॅग्निट्युड् आहेत. काटकोन त्रिकोण OAQ, मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार: $OQ^2 = x^2 + y^2$

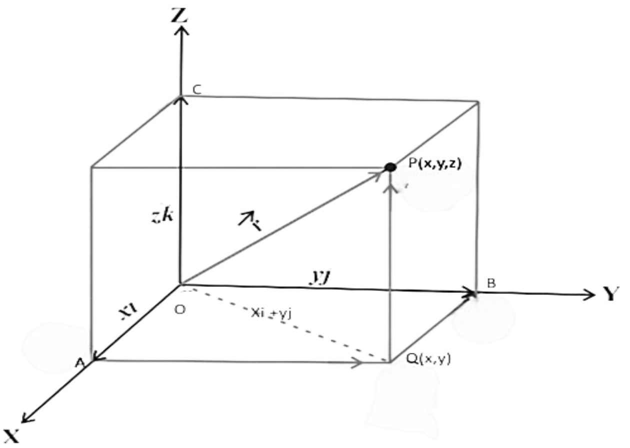


Fig.3.2: व्हेक्टरचे मॅग्निट्यूड किंवा मॉड्युलस (Magnitude or Modulus of a Vector)

तसेच, काटकोन त्रिकोण OQP मध्ये, आपल्याला मिळते:

$OP^2 = OQ^2 + QP^2 + \ OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$|r| = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

अशा प्रकारे जर. r = OP = xi + yj + zk

मग, मॅग्निट्युड् हे $|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ या सूत्राने काढले जाते.

जर $r = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$

तर $|r| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

3.1.5 X-Y प्लेन मधील व्हेक्टरच कॉम्पोनन्ट (**Component of vector in X-Y Plane):** X-Y प्लेनमधील व्हेक्टरचे दोन कॉम्पोनन्ट आहेत

1. हॉरीझॉन्टल कॉम्पोनन्ट (Horizontal Component)
2. व्हर्टिकल कॉम्पोनन्ट (Vertical Component)

समजा, खाली दिलेल्या आकृती- 3 मध्ये ,एक व्हेक्टर $r = \overrightarrow{PQ}$ ज्याचा पहिला बिंदू $P(x_1, y_1, z_1)$ वर आहे आणि दुसरा बिंदू $Q(x_2, y_2, z_2)$ वर आहे.

आता, X-ऍक्सिसवर PP^1 आणि QQ^1 या लंबांका रेषा काढुन घेऊ.

त्यानंतर P'Q' = $x_2 - x_1 = \overrightarrow{PQ}$ = r चा x-घटक आहे.

तसेच $P^o Q^o = y_2 - y_1 = \overrightarrow{PQ}$ = r चा y-घटक आहे.

त्याचप्रमाणे, $z_2 - z_1 = \overrightarrow{PQ}$ = r चा z- घटक आहे .

जर $\bar{r} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$ तर

$r = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

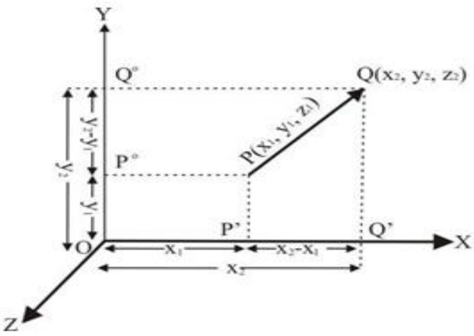


Fig.3.3: प्लेन मधील व्हेक्टरच कॉम्पोनन्ट

सोडवलेले उदाहरण (Examples):

उदाहरण 3.1: जर $P_1 = (3,6,-2)$ आणि $P_2 = (5,-4,3)$ असेल तर व्हेक्टर = $\overrightarrow{P_1P_2}$ चे घटक काय आहेत $\overrightarrow{P_1P_2}$ चे घटक i, j आणि k मध्ये एक्सप्रेस करा .

उत्तर: दिलेले $P_1 = (3,6,-2) = (x_1, y_1, z_1)$ णि $P_2 = (5,-4,3) = (x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ चा x-घटक $= x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ चा y-घटक $= y_2 - y_1 = -4 - 6 = -10$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ चा z-घटक $= z_2 - z_1 = 3 + 2 = 5$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ चे घटक i, j आणि k मध्ये एक्सप्रेस करू,

$\overline{p_1p_2} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$

$= 2i - 10j + 5k$

उदाहरण 3.2 दिलेल्या व्हेक्टरची मॅग्निट्युड् (Magnitude) शोधा: $\vec{a} = 2i + 3j + 5k$

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a} = 2i + 3j + 5k = xi + yj + zk$

$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 25}$

$\therefore |\bar{a}| = \sqrt{38}$

दिलेल्या व्हेक्टरची मॅग्निट्युड् (Magnitude) = $\sqrt{38}$ आहे .

3.1.5 व्हेक्टरचे दिशानिर्देश गुणोत्तर आणि दिशा कोसाइन्सची (Direction ratio and direction cosines of a vector)

1. **व्हेक्टरचे दिशानिर्देश गुणोत्तर (Direction ratio)** : जर एखादा व्हेक्टर $\bar{A}$ = ai+bj+ck दिलेले व्हेक्टर असेल तर येथे a, b, c अनुक्रमे x, y and z ऍक्सिस चे घटक आहेत, म्हणून $\bar{A}$ चे दिशानिर्देश गुणोत्तर (a, b, c)आहेत.
   उदाहरणार्थ: जर व्हेक्टर $\bar{A}$ =3i−4j+5k असेल तर त्याचे दिशानिर्देश गुणोत्तर (3,−4 , 5) आहेत.
2. **व्हेक्टरचे दिशा कोसाइन्सची (Direction cosines)** : जर एखादा व्हेक्टर $\bar{A}$ = ai + bj + ck म्हणून दिला गेला असेल, जिथे a, b आणि c हे अनुक्रमे x, y आणि z ऍक्सिस चे घटक आहेत, तर त्या व्हेक्टरचे दिशा कोसाइन खालीलप्रमाणे दिले जातात:
   खालील सूत्रे वापरून व्हेक्टरचे दिशा कोसाइन्स काढले जातात.
   $\cos\alpha = l = \frac{a}{r}$, $\cos\beta = m = \frac{b}{r}$, $\cos\gamma = n = \frac{c}{r}$

जेथे r ही व्हेक्टर $\bar{A}$ ची मॅग्निट्युड् आहे $r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

सोडवलेले उदाहरण (Examples):

उदाहरण 3.3: दिलेल्या व्हेक्टरची मॅग्निट्युड् (Magnitude) आणि दिशा कोसाइन्सची (Direction cosins) शोधा:

$\bar{\mathbf{A}}$ = **3i−4j+5k:**

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर $\bar{A}$ =3i−4j+5k:

मॅग्निट्युड् (Magnitude) : $r = \sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}$

$= \sqrt{9+16+25}$

$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

दिशा कोसाइन्स (Direction cosins) : $l = \frac{a}{r} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$,

$m = \frac{b}{r} = \frac{-4}{5\sqrt{2}}$,

$n = \frac{c}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}}$

∴ दिलेल्या व्हेक्टरची मॅग्निट्युड् (Magnitude) = $5\sqrt{2}$ आणि दिशा कोसाइन्सची (Direction cosines) $\frac{3}{5\sqrt{2}}$,$\frac{-4}{5\sqrt{2}}$, , $\frac{5}{5\sqrt{2}}$ आहेत.

उदाहरण 3.4: एक असा व्हेक्टर $\bar{V}$ शोधा कि ज्याची मॅग्निट्युड् (Magnitude) 32 आणि दिशा कोसाइन्स (Direction cosins) $\frac{5}{8}$, $\frac{-3}{8}$ आणि $\frac{7}{8}$ आहेत .

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर ची मॅग्निट्युड् r = 32

आणि दिशा कोसाइन्सची (Dirction cosins) $l = \frac{5}{8}$, $m = \frac{-3}{8}$ आणि $n = \frac{7}{8}$ आहेत .

$\cos\alpha = l = \frac{a}{r}$

$\frac{5}{8} = \frac{a}{32}$

$a = \frac{5}{8} \times 32 = 20$

तसेच $\cos\beta = m = \frac{b}{r}$

$-\frac{3}{8} = \frac{b}{32}$

$b = \frac{-3}{8} \times 32 = -12$

तसेच $\cos\gamma = n = \frac{c}{r}$

$\frac{7}{8} = \frac{b}{32}$

$$c = \frac{7}{8} \times 32 = 28$$

आपल्याला जे व्हेक्टर $\bar{V}$ काढायचे आहे त्याचे दिशानिर्देश गुणोत्तर (Dirction ratio) 20, -12 आणि 28 आहेत म्हणून आपल्याला जे व्हेक्टर $\bar{V}$ काढायचे ते = 20 i- 12 j + 28k आहे

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

Q.1: दिलेल्या व्हेक्टरची मॅग्निट्युड् (Magnitude) आणि दिशा कोसाइन्सची (Direction cosins) शोधा:

$$\bar{a} = 2\,i - 4j + 2k$$

Q.2: एक असा व्हेक्टर $\bar{V}$ शोधा कि ज्याची मॅग्निट्युड् (Magnitude) 25 आणि दिशा कोसाइन्स (Direction cosins) $\frac{2}{5}$, $\frac{-1}{5}$ आणि $\frac{4}{5}$ आहेत .

3.2 2 व्हेक्टरचे प्रकार (Types of vectors):

1. **शून्य व्हेक्टर (Zero Vector):** शून्य व्हेक्टर हा एक व्हेक्टर असतो ज्याची मॅग्निट्यूड (Magnitude) शून्य असते आणि व्हेक्टरचा प्रारंभ बिंदू आणि समाप्ती बिंदू एकसारखे असतात. दुसऱ्या शब्दांत $\overline{AB}$ साठी पॉईंट A चे कोऑर्डीनेट बिंदू B प्रमाणेच आहेत तर व्हेक्टर $\overline{AB}$ ला शून्य व्हेक्टर असल्याचे म्हटले जाते आणि शून्य व्हेक्टर $\bar{0}$ ने द्वारे दर्शविले जाते.
2. **युनिट व्हेक्टर (Unit Vector):** युनिट व्हेक्टर हा एक व्हेक्टर असतो ज्याची मॅग्निट्यूड (Magnitude) 1 असते बहुतेकदा ती मॅग्निट्युड् निर्दिष्ट न करता जागेत दिशा निर्दिष्ट करण्यासाठी वापरली जाते. युनिट व्हेक्टर सामान्यत: "हॅट" चिन्ह (^) किंवा लहान अक्षर म्हणून दर्शवले जातात ज्याची माप 1 असते. आपल्याकडे व्हेक्टर a = (x, y) असल्यास आपण त्यास त्याच्या मॅग्निट्युड्नुसार विभाजित करून युनिट वेक्टर बनवू शकता. दिलेल्या व्हेक्टर्सचे युनिट व्हेक्टर काढण्याचे सूत्र खालील प्रमाणे आहे.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

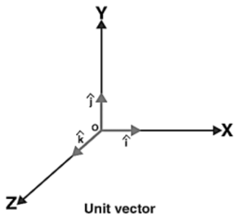


Fig.3.4: युनिट व्हेक्टर

3.पोजिशन वेक्टर (Position vectors : जर व्हेक्टर $\overrightarrow{OA}$ हे निर्दिष्ट करण्यासाठी वापरले जाते . A बिंदूची स्थिती दुसऱ्या बिंदू

O शी संबंधित आहे हे निर्दिष्ट करण्यासाठी वापरले जाते. या OA ला ओरिजिन म्हणून संदर्भित A चे पोझिशन व्हेक्टर म्हणतात. आकृती मध्ये $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ आणि $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ हे अनुक्रमे A आणि B पोजिशन व्हेक्टर आहेत. व्हेक्टर AB खालीलप्रमाणे निर्धारित करू शकतो.

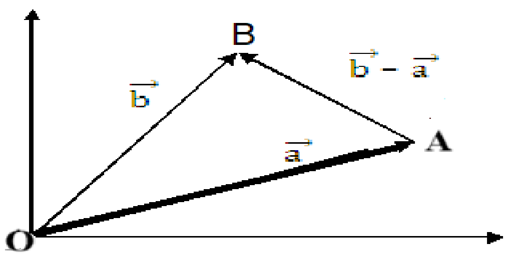


Fig.3.5: पोझिशन व्हेक्टर

आकृती- 5 वरून $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

3. **इक्वल व्हेक्टर (Equal vectors)** दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ त्यांच्याकडे इक्वल मॅग्निट्युड् आणि डायरेक्शन असल्यास इक्वल असल्याचे म्हटले जाते. जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ इक्वल व्हेक्टर असतील तर $\vec{a} = \vec{b}$
4. लाइक व्हेक्टर (Like Vector) : दिलेल्या व्हेक्टर्सला लाइक व्हेक्टर्स असे म्हणतात जेव्हा त्यांच्याकडे समान दिशा **(**same direction) असतात, त्यांचे मॅग्निट्युड् (*magnitude*) काहीही असू शकते . आकृती - 6-मध्ये $\overrightarrow{AB}$ आणि $\overrightarrow{CD}$ व्हेक्टर्स सारखे आहेत, जरी त्यांचे मॅग्निट्युड् सारखे नाही.
5. **व्हेक्टरचा नकारात्मक** (**Negative of a Vector**) : **):** $\overrightarrow{BA}$ ला $\overrightarrow{AB}$ व्हेक्टरचा नकारात्मक (Negative of a Vector) असे म्हणतात, जेव्हा दोन व्हेक्टरचेण समान असते, परंतु त्यांची दिशा एकमेकांच्या विरोधी असते.

   खाली दिलेल्या Fig.3.6 मध्ये , $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

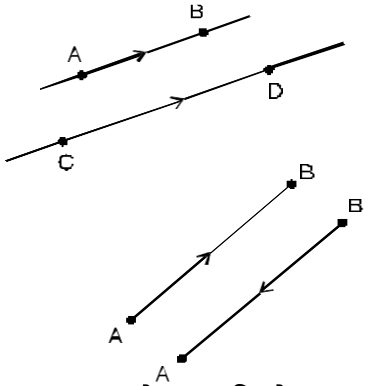


Fig.3.6: लाइक व्हेक्टर आणि व्हेक्टरचा नकारात्मक

6. **समानांतर आणि होमोजिनियस व्हेक्टर(Parallel and collinear vector)**: व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ समानांतर असतात जर कोणत्याही वास्तविक **n** संख्येसाठी पुढील संबंध लागू होत असेल ,n . $\vec{a}$ = n . $\vec{b}$
   a. n>0 असेल, तर व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ यांना समान दिशा असेल.
   b. n<0 असेल, तर व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ यांना विरोधी दिशा असेल.
7. **को-इनीशियल व्हेक्टर (Co –Initial Vectors):** को-इनीशियल व्हेक्टर हे व्हेक्टर असतात ज्यांचा प्रारंभ (सुरूवात) बिंदू समान असतो, पण त्यांची दिशा(Dirction) किंवा मापे (Magnitude) वेगळी असू शकतात. जर दोन किंवा अधिक व्हेक्टर समान बिंदूवरून सुरू होत असतील, तर त्यांना को-इनीशियल व्हेक्टर म्हणतात. उदाहरणार्थ, व्हेक्टर OA आणि OB हे को-इनीशियल आहेत कारण ते दोन्ही बिंदू O वरून सुरू होतात.

सोडवलेले उदाहरण (Examples)

उदाहरण 3.5: दिलेल्या व्हेक्टरच्या दिशेने असलेले युनिट व्हेक्टर (Unit Vector) शोधा: $\vec{a}$ = 4i + 3j + k

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a}$ = 4i + 3j + k = xi + yj + zk

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$= \sqrt{16 + 9 + 1}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{26}$$

दिलेल्या व्हेक्टर्सचे युनिट व्हेक्टर खालील प्रमाणे आहे.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{4i + 3j + k}{\sqrt{26}}$$
$$\hat{a} = \frac{4}{\sqrt{26}}i + \frac{4}{\sqrt{26}}j + \frac{4}{\sqrt{26}}k$$

उदाहरण 3.6: दिलेल्या व्हेक्टरच्या दिशेने असलेला परंतु ज्याचे मॅग्निट्युड् **12 आहे असा व्हेक्टर शोधा:**

$$\vec{a} = 2i - j + 2k$$

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a}$ = 2i - j +2 k = xi + yj + zk

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (1)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{4+1+4}$

$|\vec{a}| = \sqrt{9} \quad =3$

∴ दिलेल्या व्हेक्टर्सचे युनिट व्हेक्टर खालील प्रमाणे आहे.

$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\mathbf{2i - j + 2k}}{3}$

$= \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$

व्हेक्टर ज्याचे मॅग्निट्युड् 12 आहे **=** $12\hat{a}$

$12\hat{a} = 12(\frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k)$

$\vec{c} = 8i - 4j + 8k$

∴ $\vec{c} = 8i - 4j + 8k$ व्हेक्टर ज्याचे मॅग्निट्युड् 12 आहे

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

a) दिलेल्या व्हेक्टरच्या दिशेने असलेला परंतु ज्याचे मॅग्निट्युड् 7 आहे असा व्हेक्टर शोधा:

$\vec{a} = \mathbf{5i - j + 2k}$

b) जर P(1, 2, 3) आणि Q(4, 5, 6) हे बिंदू असतील, तर $\overrightarrow{PQ}$ व्हेक्टरच्या दिशेने असलेला युनिट वेक्टर शोधा:

3.3 व्हेक्टरचे बीजगणित (Algebra of vectors)

3.3.1 1 व्हेक्टर ची बेरीज (Addition of vector)

व्हेक्टर बेरजेचा त्रिकोण नियम (Triangle law of vector addition)

समजा Fig.3.7 मध्ये दाखवल्या प्रमाणे $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ कोणतेही दोन व्हेक्टर आहेत. बिंदू A निवडा जेणेकरून $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ आणि बिंदू C निवडाल तर $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ व्हेक्टर $\vec{a}$ and $\vec{b}$ ची बेरीज, $\vec{a} + \vec{b}$ ही व्हेक्टर $\overrightarrow{OC}$ आहे. अशा प्रकारे दोन व्हेक्टरची बेरीज $\vec{a}$ and $\vec{b}$ ही त्रिकोण नियम (Triangle Law of Addition) वापरून करू शकतो

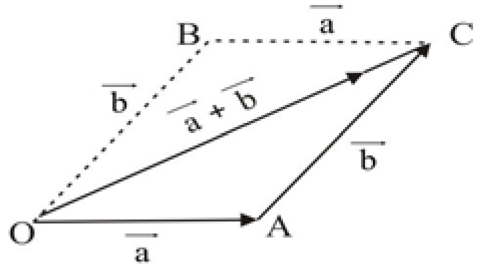


Fig.3.7: व्हेक्टर बेरजेचा त्रिकोण नियम

3.3.22 पॅरालेलोग्राम नियमानुसा बेरीज (Parallelogram Law of Addition of Vectors) जर दोन व्हेक्टर समान असतील, तर त्यांची *मॅग्निट्युड्* (Magnitude) आणि दिशा (Direction) दोन्ही समान असतात. परंतु ते एकमेकांच्या समांतर असतात. खाली दिलेला Fig.3.8 मध्ये पॅरालेलोग्राम OACB बघा, आपल्याकडे OA + AC = OC आहे, पण AC = OB आणि OA + OB = OC आहे. जर दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ हे समांतर आणि दिशामध्ये दर्शविल्यानुसार मॅग्निट्युड् (Magnitude) आणि दिशा (Direction) नुसार दोन जवळील बाजू रिप्रेझेन्ट करत असतील ,तर त्यांची बेरीज $\vec{a} + \vec{b}$ त्याच्या माप आणि दिशा मध्ये समानांतर चतुर्भुजाच्या तिरकस रेषेने दर्शवले जातात .

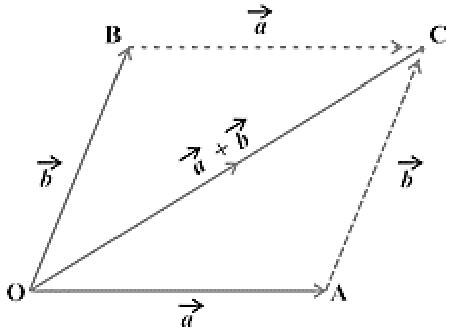


Fig.3.8: पॅरालेलोग्राम नियमानुसा बेरीज

3.2.3 व्हेक्टर वजाबाकी (Subtraction of Vectors): : समजा खाली दिलेल्या Fig.3.9 मध्ये दाखवल्या प्रमाणे जर व्हेक्टर $\vec{b}$ हे वेक्टर $\vec{a}$ कडून वजा करायचा असेल तर त्यांचा फरक व्हेक्टर $\vec{a}-\vec{b}$ मिळू शकतो., व्हेक्टर $\vec{a}$ and $-\vec{b}$ जोडून. व्हेक्टर $-\vec{b}$ एक व्हेक्टर आहे जो व्हेक्टरच्या समान आणि समांतर आहे परंतु त्याचा ॲरो → टोक विरुद्ध दिशेला दर्शविते आता व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $-\vec{b}$ हेड-टू-टेल नियमांद्वारे जोडले जाऊ शकते. म्हणून, रेषा AC, परिमाण आणि दिशा मध्ये, व्हेक्टरचे रिप्रेझेन्ट करते $\vec{a}-\vec{b}$.

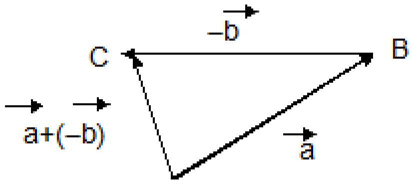


Fig.3.9: व्हेक्टर वजाबाकी

3.2.4 व्हेक्टरचे गुणाकार स्केलरसह (Multiplication of a Vector by a Scalar): एक $\vec{a}$ दिलेले व्हेक्टर आणि λ हा स्केलर आहे. तर $\lambda\vec{a}$, हा व्हेक्टरआणि स्केलर यांचा गुणाकार म्हणजेच $\vec{a}$ व्हेक्टर चा λ स्केलरने गुणाकार करणे.. हे लक्षात ठेवा की, $\lambda\vec{a}$ देखील एक व्हेक्टरआहे, जो, $\vec{a}$ व्हेक्टरसोबत समान रेषेत (Collinear) आहे . जेव्हा एक व्हेक्टर $\vec{a}$ एका स्केलर **λ** ने गुणाकार केला जातो, तेव्हा $\lambda\vec{a}$ हा व्हेक्टर त्या $\vec{a}$ व्हेक्टराच्या समान रेषेत (Collinear) असतो, परंतु त्याची दिशा **λ** च्या मूल्यावर अवलंबून असते: तसेच, व्हेक्टर $\lambda\vec{a}$ चा परिमाण $|\lambda|$ वेळा वेक्टर $\vec{a}$, च्या परिमाणाच्या बरोबरी असतो, म्हणजेच , $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ A स्केलरने एक सदिश गुणाकार करण्याचे भूमितिक दृश्य दिले जाते.

Fig.3.10: व्हेक्टरचे गुणाकार स्केलरसह

जेव्हा $\lambda = -1$, तेव्हा $\lambda\vec{a} = -\vec{a}$, जे एक सदिश आहे ज्याचे परिमाण $\vec{a}$ च्या परिमाण समान आहे आणि त्याची दिशा $\vec{a}$ च्या दिशेच्या उलट आहे. व्हेक्टर $-\vec{a}$ ला व्हेक्टर $\vec{a}$ चा नकारात्मक (एडिटिव्ह इनव्हर्स) व्हेक्टर म्हणतात आणि आपल्याला नेहमीच मिळते

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

सरावासाठी उदाहरणे

Q. दिलेल्या व्हेक्टरच्या बेरजेच्या दिशेने असलेले युनिट व्हेक्टर (Unit Vector) शोधा:

$\vec{a} = 2i - 2j + 5k \qquad \vec{b} = 2i - j + 3k$

3.4 दोन व्हेक्टरचा स्केलर (डॉट) प्रॉडक्ट (Scalar(dot) product of two vector):

जर $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ आणि $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ हे दोन व्हेक्टर आहेत .

तर $\vec{a}\,.\,\vec{b} = (a_1 i + a_2 j + a_3 k).(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = (a_1 i + a_2 j + a_3 k).(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

$$= a_1 b_2 (i.i) + a_1 b_2 (i.j) + a_1 b3 (i.k) + a_2 b_1 (j.i) + a_2 b_2 (j.j) + a_2 b_3 (j.k)$$

परस्पर लंब (Mutually perpendicular) युनिट व्हेक्टरसाठी:
$\hat{i}\,.\,\hat{i} = 1 \quad \hat{j}\,.\,\hat{j} = 1 \quad \hat{k}\,.\,\hat{k} = 1$
$\hat{i}\,.\,\hat{j} = 0 \quad \hat{j}\,.\,\hat{k} = 0 \quad \hat{k}\,.\,\hat{i} = 0$

$\vec{a}.\vec{b} = (a_1)(b_1) + (a_2)(b_2) + (a_3)(b_3)$

उदाहरण 3.7 : जर $\vec{a}$ = 2i -3j + 4 k आणि $\vec{b}$ = 3 i + 4j + 2 k तर शोधा: $\vec{a}\,.\,\vec{b}$

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a}$ = 2i -3j + 4k आणि $\vec{b}$ = 3i + 4j + 2k

Then $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = (2i -3j + 4k) (3 i + 4j + 2k)

= (2)(3) + (-3) (4) + (4)(2)

= 6 -12 + 8

$\vec{a}\,.\,\vec{b}$ = 2

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

1) जर $\vec{a}$ = 3i + 4j + 5k आणि $\vec{b}$ = i + 3j + k तर शोधा: $\vec{a}\,.\,\vec{b}$

2) जर $\vec{a}$ = 3i - j + k आणि $\vec{b}$ = i + 3j + k, तर शोधा: $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$

3.4.1 एका व्हेक्टरचा दुसऱ्या व्हेक्टर प्रोजेक्शन (Projection of one vector on another vector):

समजा खाली दिलेल्या Fig.3.11 मध्ये $\overrightarrow{PQ}$ व्हेक्टर दिलेल्या निर्देशांक रेषे l च्या दिशेशी θ कोन बनवितो, जो उलट्या दिशेने (Anticlockwise) आहे. तर, $\overrightarrow{PQ}$ व्हेक्टरचा रेषा l वरचा प्रोजेक्शन (Projection) $\vec{q}$ असेल. ज्याची मॅग्निट्युड् $|\overrightarrow{PQ}|\cos\theta$ असेल. तसेच, व्हेक्टर q चा दिशा रेषा l च्या दिशेशी समान असेल. प्रोजेक्शन व्हेक्टर हा θ कोनावर अवलंबून असतो, आणि $\vec{q}$ हा प्रोजेक्शन व्हेक्टर म्हणून ओळखला जातो.

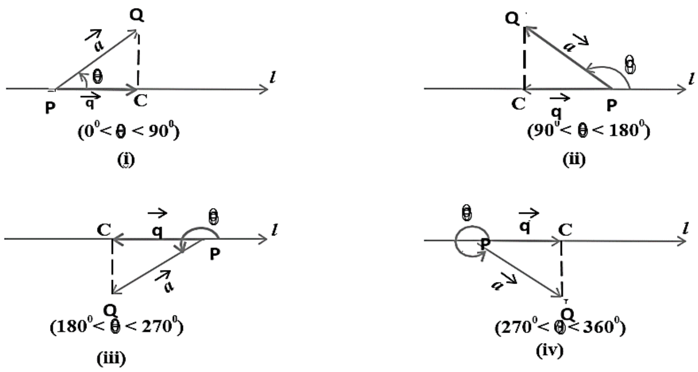


Fig.3.11: व्हेक्टर प्रोजेक्शन

लक्षात ठेवा(Remember):

1. जर व्हेक्टर $\overrightarrow{PQ}$ हा निर्देशांक रेषे l च्या दिशेशी θ = 0 कोन बनवित असेल, तर $\overrightarrow{PQ}$ चा प्रोजेक्शन व्हेक्टर $\overrightarrow{PQ}$ स्वतःच होईल.
2. जर व्हेक्टर $\overrightarrow{PQ}$ हा निर्देशांक रेषे l च्या दिशेशी θ = π कोन बनवित असेल, तर $\overrightarrow{PQ}$ चा प्रोजेक्शन व्हेक्टर $\overrightarrow{QP}$ होईल.
3. जर व्हेक्टर $\overrightarrow{PQ}$ हा निर्देशांक रेषे l च्या दिशेशी θ = $\frac{\pi}{2}$ θ = $\frac{3\pi}{2}$ कोन बनवित असेल, तर $\overrightarrow{PQ}$ चा प्रोजेक्शन व्हेक्टर शून्य होईल.
4. एक व्हेक्टरचे प्रोजेकशन दुसऱ्या व्हेक्टरवर खालील सूत्रे वापरून काढली जातात.

   i) व्हेक्टर $\vec{a}$ चे व्हेक्टर $\vec{b}$ वरील प्रोजेकशन $= \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{b}|}$

ii) व्हेक्टर $\vec{b}$ चे व्हेक्टर $\vec{a}$ वरील प्रोजेकशन $= \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|}$

सोडलेले उदाहरणे

उदाहरण 3.8: व्हेक्टर $\vec{a} = 2i - j + 3k$ चा दुसऱ्या वेक्टर $\vec{b} = i - 2j + 2k$ वरचा प्रोजेकशन काढा.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a} = 2i - j + 3k$ आणि $\vec{b} = i - 2j + 2k$

व्हेक्टर $\vec{a}$ चे व्हेक्टर $\vec{b}$ वरील प्रोजेकशन $= \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{b}|}$

,

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+4}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{9} = 3$$

तसेच $\vec{a}\,.\,\vec{b} = (2i - j + 3k)(i - 2j + 2k)$

$= (2)(1) + (-1)(-2) + (3)(2)$

$= 2 + 2 + 6$

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = 10$

व्हेक्टर $\vec{a}$ चे व्हेक्टर $\vec{b}$ वरील प्रोजेकशन $= \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$\therefore$ व्हेक्टर $\vec{a}$ चे व्हेक्टर $\vec{b}$ वरील प्रोजेकशन $= \frac{10}{3}$

उदाहरण 3.9: जर $\vec{a} = i + j + k$ आणि $\vec{b} = i - j - k$ दिलेले व्हेक्टर असतील तर व्हेक्टर $\vec{b}$ चे व्हेक्टर $\vec{a}$ वरील प्रोजेकशन काढा

उत्तर: : दिलेले व्हेक्टर $\vec{a} = i + j + k$ आणि $\vec{b} = i - j - k$

व्हेक्टर $\vec{b}$ चे व्हेक्टर $\vec{a}$ वरील प्रोजेकशन $= \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{1+1+1}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{3}$$

तसेच $\vec{a}\,.\,\vec{b} = (i + j + k)(i - j - k)$

$= (1)(1) + (1)(-1) + (1)(-1)$

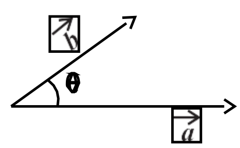
$= 1 - 1 - 1$

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = -1$

व्हेक्टर $\vec{b}$ चे व्हेक्टर $\vec{a}$ वरील प्रोजेकशन $= \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|}$

$\therefore$ व्हेक्टर $\vec{b}$ चे व्हेक्टर $\vec{a}$ वरील प्रोजेकशन $= \frac{-1}{\sqrt{3}}$

3.4.2 दोन व्हेक्टर **मधील कोन स्केलर (डॉट) गुणाकाराचा वापर करून(Angle between two vector using scalar (dot) product)**:



दोन नॉन-झिरो वेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ चा स्केलर गुणाकार (dot product)

पुढीलप्रमाणे दर्शविला जातो: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$

इथे θ हा वेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ कोन आहे. θ चा श्रेणी (range) $0 \le \theta \le \pi$ असते.

लक्षात ठेवा(Remember):

a. दोन व्हेक्टरचा स्केलर डॉट (**Scalar dot**) प्रॉडक्ट हा एक स्केलर असतो**.**

$\vec{a}\,.\,\vec{b}$ स्केलर आहे. कारण $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos\theta$ हे सर्व स्केलर आहेत.

b) जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ हे दोन नॉन-झिरो व्हेक्टर असतील, आणि जर $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ असेल तर दिलेले व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ एकमेकांना लंब (perpendicular) असतात .

a. दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ मधील कोन θ खालील सूत्र वापरून काढला जातो :

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{or} \quad \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right]$$

सोडलेले उदाहरणे

उदाहरण 3.10: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a} = 4i - 3j + 2k$ आणि $\vec{b} = i + 4j + 4k$ एकमेकांना लंब (Perpendicular) आहेत असे दाखवा.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a} = 4i - 3j + 2k$ आणि $\vec{b} = i + 4j + 4k$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4i - 3j + 2k)(i + 4j + 4k)$$
$$= (4)(1) + (-3)(4) + (2)(-4)$$
$$= 4 - 12 + 8$$
$$= 0$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ चे स्केलर डॉट (Scalar dot) प्रॉडक्ट शून्य आहे .

∴ दोन व्हेक्टर एकमेकांना लंब (Perpendicular) आहेत.

उदाहरण 3.11: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a} = i - j + \beta k$ आणि $\vec{b} = i + 2j - k$ एकमेकांना लंब (Perpendicular) असतील तर β चे मूल्य काढा .

उत्तर : दिलेले व्हेक्टर $\vec{a} = i - j + k$, $\vec{b} = i + 2j - k$

जर $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ असेल तर दिलेले व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ एकमेकांना लंब (Perpendicular) असतात

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (i - j + \beta k)(i + 2j - k) = 0$$
$$(1)(1) + (-1)(2) + (\beta)(-1) = 0$$
$$1 - 2 - \beta = 0$$
$$-1 - \beta = 0$$
$$\therefore \beta = -1$$

∴ $\beta = -1$ या मूल्यसाठी दिलेले व्हेक्टर्स एकमेकांना लंब असतील

उदाहरण 3.12: दोन व्हेक्टर्स $\vec{a} = i - j + k$ आणि $\vec{b} = i + j - k$ यांमधील कोनाचा कोसाइन (cosine) काढा.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर $\vec{a} = i - j + k$ आणि $\vec{b} = i + j - k$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 1 +}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{3}$$

तसेच $|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}$

$$= \sqrt{1 + 1 + 1}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{3}$$

तसेच $\vec{a} \cdot \vec{b} = (i - j + k)(i + j - k)$

$$= (1)(1) + (-1)(1) + (1)(-1)$$
$$= 1 - 1 - 1$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$$

दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ मधील कोन θ खालील सूत्र वापरून काढला जातो.

$\text{Cos } \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$= \frac{-1}{.\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{-1}{3}$ $\qquad \sqrt{a}\sqrt{a} = a$

$\text{Cos } \theta = \frac{-1}{3}$

$\theta = cos^{-1}\left[\frac{-1}{3}\right]$

दो न व्हेक्टर $\vec{a}$ णि $\vec{b}$ मधील कोन $\theta = cos^{-1}\left[\frac{-1}{3}\right]$ आहे

सरावासाठी उदाहरणे

1. दोन व्हेक्टर्स $\vec{a}$ = **i -2 j +3 k** आणि $\vec{b}$ = **3i - 2j + k** यांमधील कोनाचा कोसाइन (cosine) काढा.

3.4.3 स्केलर डॉट प्रॉडक्टचे गुणधर्म (Properties of scalar product):

1. स्केलर डॉट (Scalar dot) प्रॉडक्ट कम्युटेटिव आहे (Scalar product is commutative)

   i.e. $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. स्केलर डॉट (Scalar dot) प्रॉडक्टॲडिशनवर वितरीत होतो (Scalar product is distributing over addition)

   $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3 जेव्हा कोणत्याही दोन व्हेक्टरस् $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ असतात, आणि कोणतीही स्केलर संख्येची λ तेव्हा:

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

सोडलेले उदाहरणे

उदाहरण: जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ दिलेले व्हेक्टर्स असतील , $|\vec{a}|$ =2 , $|\vec{b}|$ =3 आणि $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 4 तर $|\vec{a} - \vec{b}|$ चे मूल्य काढा.

उत्तर: दिलेले $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ आणि $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$

$= \vec{a}\,\vec{a} - \overrightarrow{ab} - b\vec{a} + \vec{b}\,\vec{b}$

$= |a|^2 - \overrightarrow{ab} - \vec{a}\,b + |b|^2$ by commutative properties

$= |a|^2 - 2\,\vec{a}\,b + |b|^2$

$= 2^2 - 2(4) + 3^2$

$= 4 - 8 + 9$

$= 5$

$\therefore |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 5$

$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$

सरावासाठी उदाहरणे

Q.1 जर $\vec{a}$ = i - 3j + 3 k आणि $\vec{b}$ = 3 i + j - 5 k तर व्हेरिफाय करा $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Q.2 जर $\vec{a}$ = i - 3j + 3 k आणि $\vec{b}$ = 3 i + j - 5 k आणि $\vec{c}$ = i + j + k तर व्हेरिफाय करा

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Q.3 जर $\vec{a}$ हा युनिट व्हेक्टर आहे आणि $(\vec{x} - \vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) = 8$ तर $|\vec{x}|$ चे मूल्य शोधा ,

5.5 व्हेक्टर (क्रॉस) प्रॉडक्ट (Vector (cross) product of vector): जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ हे दोन व्हेक्टर असतील तर क्रॉस प्रॉडक्ट $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}$ असतो आणि तो खालीलप्रमाणे दिला जातो

$\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$

$\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) x (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$

$= a_1b_2(i \times i) + a_1b_2(i \times j) + a_1b3(i \times k) + a_2b_1(j \times i) + a_2b_2(j \times j) + a_2b_3(j \times k)$

$+ a_3b_1(k \times i) + a_3b_2(k \times j) + a_3b_3(k \times k)$

but $i \times i = 0$, $j \times j = 0$, $k \times k = 0$

also $i \times j = k$, $j \times k = I$, $k \times i = j$ जर दिशा घड्याळाच्या विरोधी दिशेने

$j \times i = -k$, $k \times j = -i$ $i \times k = -j$ जर दिशा घड्याळाच्या दिशेने

$= a_1b_2(0) + a_1b_2(k) + a_1b3(-j) + a_2b_1(-k) + a_2b_2(0) + a_2b_3(i) + a_3b_1(j) + a_3b_2(-i) + a_3b_3(0)$

$= a_2b_3(i) + a_3b_2(-i) + a_3b_1(j) + a_1b3(-j) + a_1b_2(k) + a_2b_1(-k)$

$= [a_2b_3 - a_3b_2](i) + [a_3b_1 - a_1b_3](j) + [a_1b_2 \ a_2b_1]k$

$= [a_2b_3 - a_3b_2](i) - [a_1b_3 - a_3b_1](j) + [a_1b_2 \ a_2b_1]k$

आम्ही असे समीकरण म्हणून निर्धारक स्वरूपात लिहितो

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

उदाहरण.3.13: जर $\vec{a}$ = 2i + 4j +2k आणि $\vec{b}$ = 2i + 3j + k दिलेले व्हेक्टर्स असतील तर $\vec{a} \times \vec{b}$ शोधा.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स $\vec{a}$ = 2i + 4j +2k आणि $\vec{b}$ = 2i + 3j + k

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= [(4)(1) - (3)(2)]\, i - [(2)(1) - (2)(2)]\, j + [(2)(3) - (2)(4)]k$

$= [4 - 6]\, i - [2 - 4]\, j + [6 - 8]\, k$

$\vec{a} \times \vec{b} = -2\, I - 2j - 2k$

उदाहरण 3.14: समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ शोधा ज्याच्या ऍडजेसन्ट बाजूचे व्हेक्टर खालीलप्रमाणे दिले आहेत $\vec{a}$ = i - 2 j +3k आणि $\vec{b}$ = 2i +j - 4k.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स

$\vec{a}$ = i - 2 j +3k आणि $\vec{b}$ = 2i +j - 4 k

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$= [(-2)(-4) - (1)(3)]\, i - [(-4)(1) - (2)(3)]\, j + [(1)(1) - (2)(-2)]k$

$= [8 - 3]\, i - [-4 - 6]\, j + [1 + 4]\, k$

$= [5]\, i - [-10]\, j + [5]\, k$

$= 5\, i + 10\, j + 5\, k = xi + yj + zk$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + 10^2 + 5^2}$

$= \sqrt{25 + 100 + 25}$

$= \sqrt{150}$

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (Area of parallelogram) = $5\sqrt{6}$

उदाहरण 3.15: जर $\vec{a}$ = i + 2 j +3k आणि b = 2i + 3 j + 5 k दिलेले व्हेक्टर्स असतील तर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ व्हेक्टर यांना लंब (Perpendicular) असलेला युनिट व्हेक्टर शोधा.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स $\vec{a}$ = i + 2 j +3k आणि $\vec{b}$ = 2i + 3 j + 5 k

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

= [10 - 9]i - [5 - 6]j + [3 - 4]k

= i + j – k = xi + yj +zk

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 1}$$

$$= \sqrt{3}$$

दोन्ही व्हेक्टरला लंब (Perpendicular)असलेला व्हेक्टर $= \hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

$$= \frac{i + j - k}{\sqrt{3}}$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} i + \frac{1}{\sqrt{3}} j - \frac{1}{\sqrt{3}} k$$

उदाहरण 3.16 खाली दिलेल्या दोन्ही व्हेक्टरला लंब (Perpendicular) असलेला, ज्याची मॅग्निट्यूड (Magnitude) 18 आहे असा व्हेक्टर शोधा. $\vec{a}$ = 3 i + j -4k आणि $\vec{b}$ = 6i +5j - 2k.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स $\vec{a}$ = 4 i - j + 3k आणि $\vec{b}$ = - 2i + j -2 k

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

= [2- 3] i - [- 8 + 6] j + [4 - 2] k

= -1 i + 2 j +2 k = xi + yj +zk

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + 4}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

दोन्ही व्हेक्टरला लंब (Perpendicular)असलेला व्हेक्टर $\hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

$$= \frac{-1\ i\ +2\ j\ +2\ k}{3}$$

मॅग्निट्यूड (Magnitude) 18 असलेला एक व्हेक्टर जो दोन्ही व्हेक्टरला लंब आहे = 18 $\hat{n}$

$$18\hat{n} = 18 \left[\frac{-1\ i\ +2\ j\ +2\ k}{3}\right]$$

= 6 [- i + 2 j + 2 k]

= - 6i +12j + 12k

मॅग्निट्यूड (Magnitude) 18 असलेला $\vec{c}$ = - 6i +12j + 12k व्हेक्टर जो दोन्ही व्हेक्टरला लंब आहे

सरावासाठी उदाहरणे

Q.1 जर $\vec{a}$ = 2i + 3j + k आणि $\vec{b}$ = i - 3j + 2k तर शोधा: $\vec{a} \times \vec{b}$ आणि $|\vec{a} \times \vec{b}|$

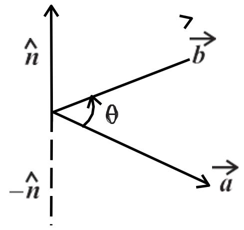
Q.2 जर $\vec{a}$ = i + j + k आणि $\vec{b}$ = i _+2j +3k दिलेले व्हेक्टर्स असतील तर ($\vec{a} + \vec{b}$) आणि ($\vec{a} - \vec{b}$) व्हेक्टर यांना लंब (Perpendicular) असलेला युनिट व्हेक्टर शोधा.

Q.3 खाली दिलेल्या दोन्ही व्हेक्टरला लंब (Perpendicular) असलेला, ज्याची मॅग्निट्यूड (Magnitude) 3आहे. असा व्हेक्टर शोधा. $\vec{a}$ = 3 i + j -4k आणि $\vec{b}$ = 6i +5j - 2k

3.5.2 क्रॉस प्रॉडक्ट वापरुन दोन व्हेक्टरमधील कोन (Angle between two vector using Vector (cross) product)

जर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ हे दोन व्हेक्टर असतील तर क्रॉस प्रॉडक्ट

$\vec{a} \times \vec{b}$ असतो आणि तो खालीलप्रमाणे दिला जातो.



$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta\ \hat{n}$

जिथे **θ** हा $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ यामधील कोन (Angle) आहे.

आणि **θ** हा कोन 0 ते π दरम्यान असतो.

$\hat{n}$ हे दोन्ही व्हेक्टरला लंब (Perpendicular) असलेले युनिट व्हेक्टर आहे.

लक्षात ठेवा(Remember):

1. दोन व्हेक्टरचा व्हेक्टर प्रॉडक्ट पुन्हा एक व्हेक्टर असतो.
2. दोन व्हेक्टर समांतर (Parallel) असतात जेव्हा त्यांचा व्हेक्टर प्रॉडक्ट शून्य असेल.
   $$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$
3. एक युनिट व्हेक्टर (Unit vector) जो $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ या दोन्ही व्हेक्टरला लंब (Perpendicular) असतो, तो खालीलप्रमाणे दिला जातो
   $$\hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$
4. व्हेक्टर प्रॉडक्टच्या दृष्टिकोनातून, दोन व्हेक्टर $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ यामधील कोनाचा साइन खालीलप्रमाणे दिला जातो.
   $$\text{Sin}\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \quad \text{or} \quad \theta = sin^{-1}\left[\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right]$$
5. समांतर(parallel) व्हेक्टरसाठी $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ एक व्हेक्टर हा दुसऱ्या व्हेक्टरचा स्केलर गुणाकार म्हणून व्यक्त केला जातो.
   $\vec{a} = \lambda\ \vec{b}$

उदाहरण 3.17 दाखवा की व्हेक्टर $\vec{a}$ = -6i + 9j -12 k आणि $\vec{b}$ 2 i - 3j +4k एकमेकांच्या समांतर (Parallel) आहेत.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स $\vec{a}$ = -6i + 9j -12 k आणि $\vec{b}$ = 2 i - 3j +4k

आपल्याला माहित आहे की दिलेले व्हेक्टर एकमेकांच्या समांतर असतात जर, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 9 & -12 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

= [36 - 36] i - [-24 +24] j + [18-18] k

= 0 i + 0 j + 0 k = 0

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$

∴ म्हणून दिलेले व्हेक्टर्स एकमेकांना समांतर आहेत.

उदाहरण 3.18: जर $\vec{a}$ = 3i +2j + 9 k आणि $\vec{b}$ = i + mj +3k व्हेक्टर समांतर (parallel)आहेत तर m चे मूल्य शोधा.

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स $\vec{a}$ = 3i +2j +-9 k आणि $\vec{b}$ = i + mj +3k

समांतर व्हेक्टरसाठी $\vec{a}$ आणि $\vec{b}$ एक व्हेक्टर दुसऱ्या व्हेक्टरचा स्केलर गुणाकार म्हणून व्यक्त केला जातो

$\vec{a} = \lambda\vec{b}$

3i +2j + 9 k = λ(i + mj +3k)

3i +2j + 9 k = λ i + mλj +3λk

i आणि j च्या गुणांकांना समतोल करून आपल्याला मिळते

λ = 3

mλ = 2 -- --- -1

समीकरण 1 मध्ये λ = 3 टाकू

m(3) = 2,

m = $\frac{2}{3}$

म्हणून m = $\frac{2}{3}$ या मूल्यासाठी व्हेक्टर समांतर होतील

उदाहरण 3.19: खाली दिलेल्या व्हेक्टरमधील साइनअँगल थिटा (sinθ) शोधून काढा .

$\vec{a}$ = 2i - 2j + 1k आणि $\vec{b}$ = i -2j +2k

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स $\vec{a}$ = 2i - 2j + 1 k आणि $\vec{b}$ = i -2j +2k

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2^2+(-2)^2+(1)^2}$$
$$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1^2+(-2)^2+(2)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

आता
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$
= [-4 +2] i - [4 - 1] j + [-4 +2] k

= - 2 i - 3 j - 2 k

$\vec{a} \times \vec{b}$ = - 2 i - 3 j - 2 k

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-2)^2}$$
$$= \sqrt{4+9+4}$$
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{17}$$

जर दोन व्हेक्टरमधील अँगल θ असेल, तर दोन व्हेक्टर $\vec{a}$आणि $\vec{b}$ यांच्यातील साइनअँगल थिटा (sinθ) दिला जातो:

$$\text{Sin}\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$
$$= \frac{\sqrt{17}}{3\times3}$$
$$\text{Sin}\theta = \frac{\sqrt{17}}{9}$$
$$\therefore \theta = sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{17}}{9}\right]$$

दोन व्हेक्टरमधील अँगल θ , $\theta = sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{17}}{9}\right]$ आहे .

सरावासाठी उदाहरणे

Q.1 दाखवा की व्हेक्टर $\vec{a}$ = i +j + k आणि $\vec{b}$ = 2 i + 2j +2k एकमेकांच्या समांतर (parallel)आहेत.

Q.2 जर $\vec{a}$ =2 i + λj + k and $\vec{b}$ = i - 2 j +k व्हेक्टर समांतर(parallel) आहेत तर λ चे मूल्य शोधा .

Q.3 दिलेल्या व्हेक्टरमधील साइनअँगल थिटा (sinθ) शोधून काढा .

$\vec{a}$ =3 i - 4 j + 5 k and $\vec{b}$ = i - j + k

5.5.3 व्हेक्टर प्रॉडक्टचे गुणधर्म:(Properties of vector product)

1. व्हेक्टर प्रॉडक्ट दोन व्हेक्टरचा कम्युटेटिव्ह नसतो (Vector product of two vector are non -commutative)

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

2. व्हेक्टर प्रॉडक्ट ॲडिशनवर वितरित होतो (Vector productive is distributive over addition)

$$\vec{a} \times (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

सरावासाठी उदाहरणे

Q.1 जर $\vec{a}$ = 2i - 4 j + 5 k आणि $\vec{b}$ = 2i - j + k तर पडताळणी करा $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

Q.2 जर $\vec{a}$ = i - 3 j + k आणि $\vec{b}$ = 2i - 2j + k आणि $\vec{c}$ = i - j + k

तर पडताळणी करा $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

5.6 स्केलर ट्रिपल प्रॉडक्ट्स (Scalar triple products)

जर $\vec{a} = a_1 i\ a_2 j + a_3 k$ आणि $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ आणि $\vec{c} = c_1 i + c_2 j + c_2 k$, तर स्केलर ट्रिपल प्रॉडक्ट खालीलप्रमाणे दर्शवला जातो:

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

लक्षात ठेवा:

1. तीन व्हेक्टरचा स्केलर ट्रिपल प्रॉडक्ट हा एक स्केलर असतो
2. $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})$ या सर्वांचे मूल्य समान असते.
3. तीन व्हेक्टर्स कोप्लानार आहेत तर $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$
4. पॅरेललिपिपेडाचा घनफळ $= \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$

उदाहरण 3.20: जर $\vec{a}$ = i -2j -3k आणि $\vec{b}$ = 2i+ 1j - k आणि $\vec{c}$ = i + 3 j -2k तर $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ मूल्य शोधा

उत्तर: : दिलेले व्हेक्टर्स

$\vec{a}$ = i -2 j -3k आणि $\vec{b}$ = 2i+ 1 j - k आणि $\vec{c}$ = i + 3j - 2k

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 1 [-2+ 3] -(-2) [-4 + 1] +(-3) [6 - 1] k$

$= 1 [1] +2 [-3] - 3 [5]$

$= 1 - 6 -15$

$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = -20$

उदाहरण 3.21: खाली दिलेले व्हेक्टर्स कोप्लानार (Coplanar) आहेत हे दाखवा.

$\vec{a}$ = 5i + 6j +7k आणि $\vec{b}$ = 7i - 8 j + 9k आणि $\vec{c}$ = 3i + 20 j + 5k

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स

$\vec{a}$ = 5i + 6j +7 k आणि $\vec{b}$ = 7i - 8 j + 9 k आणि $\vec{c}$ = 3i + 20 j + 5 k

तीन व्हेक्टर्स कोप्लानर आहेत तर $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & -8 & 9 \\ 3 & 20 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 5 [-40 - 180] -6 [35 - 27] +7 [140+24]$

$= 5 [-220] -6 [8] + 7 [164]$

$= -1100 - 48 +1148$

$= 0$

$\therefore \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

. म्हणून दिलेले व्हेक्टर्स कोप्लानार आहेत

उदाहरण 3.22: खाली दिलेले व्हेक्टर्स कोप्लानार (coplanar) असल्यास m चे मूल्य शोधा.

$\vec{a}$ = 2i -4j +5k आणि $\vec{b}$ = i - m j + 1k आणि $\vec{c}$ = 3i + 2 j - 5k

उत्तर: दिलेले व्हेक्टर्स

$\vec{a}$ = 2 i -4j +5k आणि $\vec{b}$ = i - mj + 1k आणि $\vec{c}$ = 3i + 2j - 5k

तीन व्हेक्टर्स कोप्लानार आहेत तर $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & -m & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

2[5m - 2] + 4[-5 - 3] +5 [2+3m] = 0

10m - 4 - 32 +10 +15m = 0

25m - 26 = 0

25m = 26

$m = \frac{26}{25}$

$m = \frac{26}{25}$ साठी दिलेले व्हेक्टर्स कोप्लानार असतील.

सरावासाठी उदाहरणे

Q1 जर $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ $\vec{a}$ = 2i + 6j +3 k आणि $\vec{b}$ = 3i - j + 2 k आणि $\vec{c}$ = i + j + 3 k

तर $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ मूल्य शोधा.

Q2 **खाली दिलेले व्हेक्टर्स कोप्लानर**(coplanar) **असल्यास** λ **चे मूल्य शोधा**.

$\vec{a}$ = i + j + k आणि $\vec{b}$ = 2i - 4 k आणि $\vec{c}$ = i + λ j + 3 k

3.7 टेन्सर्स (Tensors)

गणितात, टेन्सर हे एक मल्टि-डायमेंशनल (Multi-dimentional) सरणी किंवा भूमितीय वस्तू आहे जी स्कॅलर्स, व्हेक्टर आणि मॅट्रिसेस यांच्या संकल्पनांचा सामान्यीकरण करते. याचा वापर विविध क्षेत्रांमध्ये केला जातो, जसे की भौतिकशास्त्र, अभियांत्रिकी, आणि मशीन लर्निंग, डेटा आणि रूपांतरणे दर्शविण्यासाठी. येथे टेन्सर इतर गणिती वस्तूंशी कसे संबंधित आहेत याचे विश्लेषण दिले आहे:

1. **स्केलर टेन्सर (ScalarTensor)**: स्केलर टेन्सर एकाच संख्येचा टेन्सर असतो.
2. **व्हेक्टर टेन्सर (VectorTensor)**: व्हेक्टर टेन्सर संख्यांचा एक यादी (जसे की अॅरे किंवा कॉलम असते)
3. **मॅट्रिक्स टेन्सर (Matrix Tensor) :** मॅट्रिक्स टेन्सर संख्यांचा आयताकार यादी (रो आणि कॉलम) असते
4. **हाय डायमेंशनल टेन्सर (Higher-dimensional tensors)** : 3 किंवा अधिक आयाम(Dimentinal) असलेले टेन्सर, जसे की 3D अॅरे (जे एक व्हॉल्यूम किंवा अधिक जटिल डेटा दर्शवू शकतात).

टेन्सर म्हणजे व्हेक्टरला दुसऱ्या व्हेक्टरमध्ये मॅप (Map) करणारी फंक्शन्स म्हणून विचार केली जाऊ शकतात. ते विशिष्ट नियमांनुसार निर्देशांक बदलांखाली रूपांतरित होतात, जे त्यांना भौतिकशास्त्र (उदाहरणार्थ, ताण, तणाव, किंवा अवकाश- कालाचे वक्रता) आणि मशीन लर्निंग (उदाहरणार्थ, डीप लर्निंगमध्ये, जिथे टेन्सर न्यूरल नेटवर्कमध्ये डेटा ठेवतात) यांसारख्या क्षेत्रांमध्ये खूप उपयुक्त बनवते. अधिक औपचारिक पद्धतीने, टेन्सरला निर्देशांक-स्वतंत्र पद्धतीने परिभाषित केले जाऊ शकते, ज्याचे स्वरूप असे असते की ते घटकांच्या एक बेरीज म्हणून लिहिता येते जे निर्देशांक बदलांखाली विशिष्ट नियमांनुसार रूपांतरित होतात. टेन्सर बहुधा त्यांचे रँक (आयामांची संख्या) आणि ऑर्डर (त्यांना वर्णन करण्यासाठी आवश्यक असलेल्या निर्देशांकांची संख्या) वापरून अभ्यासले जातात. सारांश, सांगायचे तर टेन्सर हा संख्यांचे, व्हेक्टरचे आणि मॅट्रिक्सचे सामान्यीकृत संकल्पना आहे, ज्याचे विविध वैज्ञानिक आणि अभियांत्रिक शास्त्रात अनुप्रयोग आहेत.

1. स्केलर (झिरो ऑर्डर टेन्सर) : स्केलर हा एकाच संख्येचा असतो आणि तो रँक 0 चा टेन्सर मानला जातो.

ट्रान्सफॉर्मशन (Transformation) : स्केलर निर्देशांक बदलांखाली बदलत नाही. ते अपरिवर्तनीय असतात, म्हणजेच त्यांचा कोणताही दिशाच नाही.

- उदाहरण: तापमान, मास, किंवा कोणतीही भौतिक मात्रा जी एकाच संख्येने व्यक्त केली जाते.

2. व्हेक्टर (पहिल्या ऑर्डरचा टेन्सर) : व्हेक्टर हा 1-डायमेंशनल (Dimentional) टेन्सर आहे जो संख्यांचा एक सूची किंवा अॅरे म्हणून दर्शविला जाऊ शकतो. त्याला माप आणि दिशा दोन्ही असतात.

ट्रान्सफॉर्मशन (Transformation): व्हेक्टर एक विशिष्ट प्रकारे समन्वय प्रणाली बदलल्यावर रूपांतरित होतो.

जर तुम्ही समन्वय प्रणाली बदलली, तर व्हेक्टरच्या घटकांचे रूपांतर नियमांनुसार होईल.
• उदाहरण: वेग, बल, किंवा स्थान.

3. **मॅट्रिक्स (द्वितीयक- ऑर्डरचा टेन्सर):** मॅट्रिक्स हा एक 2-डायमेंशनल (Dimentional) टेन्सर आहे, ज्याला पंक्तीं आणि स्तंभांमध्ये मांडलेले संख्यांचे जाळे म्हणून पाहता येते.
   ट्रान्सफॉर्मशन (Transformation) : मॅट्रिक्स विशिष्ट नियमांनुसार रूपांतरित होतात जेव्हा व्हेक्टर अवकाशाचा आधार बदलतो. हे रेषीय रूपांतरणे आणि समीकरण प्रणाली दर्शवण्यासाठी वापरले जातात.
   • उदाहरण: रेषीय रचनाशास्त्रातील रूपांतरण मॅट्रिक्स, समीकरण प्रणालींचे रूपांतरण.

4. **उच्च- ऑर्डरचा टेन्सर (3^{rd}- ऑर्डर आणि त्यापुढे)**
   उच्च-आदेशीय टेन्सर हे दोनपेक्षा अधिक निर्देशांक असलेले टेन्सर असतात. 3rd-आदेशीय टेन्सर म्हणजे 3-डायमेंशनल सरणी, आणि 4^{th}-आदेशीय टेन्सरमध्ये चार निर्देशांक असतात, आणि असेच पुढे.
   ट्रान्सफॉर्मशन (Transformation): उच्च-आदेशीय टेन्सर अनेक निर्देशांकांचा समावेश असलेल्या जटिल नियमांनुसार रूपांतरित होतात. हे अधिक जटिल प्रणा ली आणि रूपांतरणे दर्शवण्यासाठी वापरले जातात.
   • उदाहरण: यांत्रिकीतील ताण टेन्सर (द्वितीयक-आदेशीय टेन्सर), संगणक दृश्यामधील प्रतिमा डेटा (3rd-आदेशीय टेन्सर), किंवा डीप लर्निंगमधील डेटा (जो 4th-आदेशीय टेन्सरमध्ये असू शकतो).

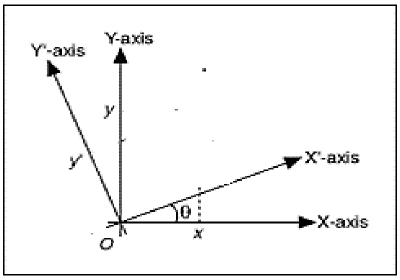
ट्रान्सफॉर्मशन ऑफ कोऑर्डिनेट (Transformation of coordinate) : आपण दोन-डायमेंशनल (Two Dimentional) समन्वयांच्या रूपांतरणाचा विचार करतो, जिथे X आणि Y अक्षांचे फिरवलेले रूप आहे.

जर आपल्याकडे अंतर्गत रूपांतरित समन्वय $(x^1 \;,\; x^2)$ = (x^1 म्हणून x समन्वय आणि x^2 म्हणून y समन्वय) असतील तर फ्रेम समन्वय फिरवल्यानंतर $x^1 = (x^{-1})$ आणि $x^2 = (x^{-2})$ असे बदल होतात $(\bar{x}^1 \;, \bar{x}^2)$

आपल्याला समीकरणे तयार होतात

$\bar{x}^1 = x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta$ ----1

$\bar{x}^2 = - x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta$ ----2



वरील समीकरणाचा मॅट्रिक्स रूप

$$\begin{bmatrix}\bar{x}^1\\ \bar{x}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\end{bmatrix} \quad \text{--------3}$$

डिफरंशिएटिंग 1 ,2 पार्शली विथ रीस्पेक्टिव्ह टु . x^1 आणि x^2

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} = \cos\theta \qquad \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} = -\sin\theta \qquad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} = \cos\theta$$

समीकरण 1 आणि 2 हे असे लिहिले जाऊ शकते.

$$\begin{bmatrix}\bar{x}^1\\ \bar{x}^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\end{bmatrix}$$ ------ हे रूपांतराचे जॅकोबियन आहे.

संक्षेपात, आपण वरील प्रमाणे लिहितो

$$\bar{x}^i = \sum_{i.k}^{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} x^k \qquad \bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} x^k$$

दोन्ही बाजूंचे आंशिक वेगळेपण केल्यास, आपल्याला मिळते

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} dx^k$$

ही सूत्र टेन्सर विश्लेषणासाठी उपयुक्त आहे.

3.7.1 टेन्सरचे प्रकार (Types of tensors)

1. **सिमेट्रिक टेन्सर (Symmetric Tensor)** : एक सिमेट्रिक टेन्सर हा असा टेन्सर आहे जो त्याचे निर्देशांक स्वॅप केल्यावर बदलत नाही. दुसऱ्या शब्दांत, तो ही अटी पूर्ण करतो: Tij = Tji

उदाहरणे: भौतिकशास्त्रातील जडत्वाचा टेन्सर सिमेट्रिक टेन्सर आहे.

2. **एंटी- सिमेट्रिक टेन्सर (Anti-symmetric or Skew-symmetricTensor):**
एक एंटी सिमेट्रिक टेन्सर हा असा टेन्सर आहे जो त्याचे निर्देशांक स्वॅप केल्यावर चिन्ह बदलतो. दुसऱ्या शब्दांत, तो ही अटी पूर्ण करतो : $T_{ij} = -T_{ji}$.
उदाहरण: भौतिकशास्त्रातील इलेक्ट्रोमॅग्नेटिक क्षेत्र सामर्थ्य टेन्सर हा एक एंटी-सामंजस्यपूर्ण टेन्सर आहे.

3. **कोव्हारीअंट टेन्सर (Covariant Tensor):** कोव्हारीअंट टेन्सर समन्वय बदलांवर एक विशिष्ट प्रकारे रूपांतरित होतात. हे समन्वय प्रणालीच्या आधार व्हेक्टरच्या प्रमाणेच रूपांतरित होतात. त्याचे घटक एका विशिष्ट दिशेने बदलतात.
उदाहरण: एक स्केलेर क्षेत्राचा ग्रेडियंट, जिथे घटक आधार व्हेक्टरसाठी रूपांतर नियमांनुसार बदलतात.

4. **कंट्राव्हारीअंट टेन्सर(Contra variant Tensor)** : कंट्राव्हारीअंट टेन्सर समन्वय बदलांवर आधार व्हेक्टरच्या विरुद्ध दिशेने रूपांतरित होतात. याचा अर्थ, कंट्राव्हारीअंट टेन्सरचे घटक आधार व्हेक्टरच्या दिशेच्या विरुद्ध दिशेने बदलतात.
उदाहरण: व्हेक्टर स्वतःच कंट्राव्हारीअंट टेन्सर आहेत.

5. **मिक्सड टेन्सर (Mixed Tensor)**: एक मिक्सड टेन्सरमध्ये कोव्हारीअंट आणि कंट्राव्हारीअंट निर्देशांक दोन्ही असतात.
हे टेन्सर समन्वय रूपांतरणांमध्ये कोव्हारीअंट आणि कंट्राव्हारीअंट टेन्सरचे मिश्रण म्हणून वागतात.
उदाहरण: भौतिकशास्त्रातील ताण-ऊर्जा टेन्सर हा मिक्सड टेन्सरचा एक उदाहरण आहे, जिथे काही घटक कोव्हारीअंट असतात आणि इतर कंट्राव्हारीअंट असतात.

6. **मेट्रिक टेन्सर (Metric Tensor) :** एक विशेष प्रकारचा टेन्सर जो अवकाशाच्या भूमितीय गुणधर्मांचे वर्णन करतो. तो अंतर आणि कोन मोजतो. तो सामंजस्यपूर्ण असतो आणि इतर टेन्सरच्या निर्देशांकांना उचलण्यास किंवा खाली करण्यास आवश्यक माहिती प्रदान करतो.
उदाहरण: नॉर्मलसापेक्षतेमध्ये, मेट्रिक टेन्सर काल-स्थानाच्या वक्रतेचे वर्णन करतो.

7. **आयडेंटिटी टेन्सर (Identity Tensor) :** ओळख टेन्सर एक विशेष प्रकारचा टेन्सर आहे जो इतर टेन्सरला अपरिवर्तित ठेवतो जेव्हा तो गुणाकारासारख्या कार्यांमध्ये वापरला जातो. हा स्केलेर अंकगणितातील 1 प्रमाणे कार्य करतो.
उदाहरण: मॅट्रिक्स गुणाकारात, ओळख मॅट्रिक्स हा ओळख टेन्सरचा एक उदाहरण आहे.

3.7.3. विविध संदर्भात टेन्सरचे रँक (Rank of a Tensor in Various Contexts):

1. **इंडेक्सची संख्या म्हणून रँक (Rank as the Number of Indices)**:
   - **स्केलर (रँक 0)**: स्केलर हे एकच संख्या असते, त्यामुळे त्याला ० इंडेक्स असतो. हे रँक 0 चा टेन्सर मानले जाते.
   - **व्हेक्टर (रँक 1):** व्हेक्टर हा एक- डायमेंशनल (1 Dimention) अॅरे आहे आणि त्याला 1 इंडेक्स असतो. हा रँक टेन्सर आहे.
   - **मॅट्रिक्स (रँक 2):** मॅट्रिक्स हा दोन- डायमेंशनल (2 Dimention) अॅरे आहे आणि त्याला २ इंडेक्स असतात (रो आणि कॉलम). हा रँक २ टेन्सर आहे.
   - **उच्च-ऑर्डर टेन्सर (रँक ३ आणि त्यापुढे);** टेन्सर जे दोन पेक्षा जास्त इंडेक्स असतात, जसे की 3 डी अॅरे (3 इंडेक्स), ते रँक 3 टेन्सर असतात, आणि असेच पुढे. हे अधिक जटिल संरचनांना व्यक्त करू शकतात, जसे की मल्टी-डायमेंशनल (Multidimential Data) डेटा.

विविध रँक असलेल्या टेन्सरचे उदाहरण (Example of Tensors with Different Ranks):

1. **रँक 0 (स्केलर)**: एक स्केलर, जसे की तापमानाची किंमत, ही एकच संख्या असते आणि त्यात कोणतेही डायमेंशन (Dimension) नाहीत.
2. **रँक 1 (व्हेक्टर):** एक व्हेक्टर वेग, विस्थापन किंवा बल यासारख्या मात्रांना दर्शवू शकतो. एक 3-डायमेंशनल व्हेक्टर असा दिसू शकतो: $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ (3 घटक असलेला व्हेक्टर)
3. **रँक २ (मॅट्रिक्स):** मॅट्रिक्समध्ये दोन इंडेक्स असतात, जे सहसा रेषीय रूपांतरणांसाठी (Linear transformation) वापरले जातात. एक 3x3 मॅट्रिक्स असा दिसू शकतो:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ (2 इंडेक्स असलेली मॅट्रिक्स)

4. **रँक 3 (3D टेन्सर):** एक ३D टेन्सरमध्ये तीन इंडेक्स असतात आणि त्यास क्यूब किंवा मल्टी-डायमेंशनल ॲरे म्हणून दृश्यात आणता येते. उदाहरणार्थ, एक 3x3x3 टेन्सर:

$$T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{111} & t_{112} & t_{113} \\ t_{121} & t_{122} & t_{123} \\ t_{131} & t_{132} & t_{133} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{211} & t_{212} & t_{213} \\ t_{221} & t_{222} & t_{223} \\ t_{231} & t_{232} & t_{233} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{311} & t_{312} & t_{313} \\ t_{321} & t_{322} & t_{323} \\ t_{331} & t_{332} & t_{333} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

3.7.4 टेन्सरचे बीजगणित (Algebra of tensors):

a) **दोन टेन्सरचे बेरीज आणि वजाबाकी (Addition and subtraction of two tensors)**: टेन्सरची बेरीज आणि वजाबाकी फक्त त्या टेन्सरच्या रँक आणि प्रकार सारखे असलेल्या टेन्सरच्या बाबतीत परिभाषित केली जाते. "सारखा प्रकार" म्हणजे समान संख्या असलेल्या कंट्राव्हेरियंट आणि कोव्हेरियंट इंडेक्स असणे. दोन टेन्सरची बेरीज किंवा वजाबाकी, व्हेक्टरप्रमाणे, त्यातील व्यक्तिगत घटकांसोबत केली जाते. दोन टेन्सर जोडण्यासाठी किंवा वजाबाकी करण्यासाठी, संबंधित घटकांची बेरीज किंवा वजाबाकी केली जाते. समान रँक आणि समान प्रकार असलेल्या दोन टेन्सरचे बेरीज किंवा फरक देखील समान रँक आणि समान प्रकार असलेला एक टेन्सर असतो.

1. उदाहरणार्थ

जर दोन टेन्सर A_K^{IJ} आणि B_k^{ij} समान रँक आणि समान प्रकाराचे असतील, तर बेरीज आणि वजाबाकीचे नियम खालीलप्रमाणे दिले जातात:

$$A_K^{IJ} + B_k^{ij} = C_K^{IJ}$$ (बेरीज)

$$A_K^{IJ} - B_k^{ij} = D_K^{IJ}\text{i}$$ (वजाबाकी).

जिथे C_K^{IJ} आणि D_K^{IJ} हे दिलेल्या टेन्सरसारखेच समान रँक आणि समान प्रकाराचे टेन्सर आहेत.

2. उदाहरणार्थ :ट्रान्सफॉर्म फॉर्म (Transform form) - जर $\bar{A}_R^{PQ}$ आणि $\bar{B}_R^{PQ}$ हे समान रँक असलेले दोन टेन्सर असतील.

$$\bar{A}_R^{PQ} = \frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^S} \frac{\partial \bar{x}^Q}{\partial x^T} \frac{\partial x^U}{\partial \bar{x}^R} A_U^{ST} \quad \text{--------------1}$$

$$\bar{B}_R^{PQ} = \frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^S} \frac{\partial \bar{x}^Q}{\partial x^T} \frac{\partial x^U}{\partial \bar{x}^R} B_U^{ST} \quad \text{-------------2}$$

1 आणि 2 ची बेरीज करू , आपल्याला मिळते

$$\bar{A}_R^{PQ} + \bar{B}_R^{PQ} = \frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^S} \frac{\partial \bar{x}^Q}{\partial x^T} \frac{\partial x^U}{\partial \bar{x}^R} [A_U^{ST} + B_U^{ST}]$$

1 आणि 2 ची वजाबाकी करू , आपल्याला मिळते

$$\bar{A}_R^{PQ} - \bar{B}_R^{PQ} = \frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^S} \frac{\partial \bar{x}^Q}{\partial x^T} \frac{\partial x^U}{\partial \bar{x}^R} [A_U^{ST} - B_U^{ST}]$$

b) टेन्सर कॉन्ट्रॅक्शन (Contraction of tensors): एक मिश्रित टेन्सरचा रँक दोनाने कमी करण्यासाठी केलेली गणितीय क्रिया कॉन्ट्रॅक्शन म्हणून ओळखली जाते. कॉन्ट्रॅक्शन प्रक्रियेत, एक कंट्राव्हेरियंट इंडेक्स आणि एक कोव्हेरियंट इंडेक्स समान ठरवले जातात आणि पुनरावृत्त इंडेक्सवर बेरीज केली जाते. परिणामी, त्या टेन्सरचा रँक मूळ टेन्सरपेक्षा दोनाने कमी होतो.

1. **उदाहरणार्थ**

   समजा एक मिश्रित टेन्सर $A_{lm}^{I,J,m} = A_l^{ij}$ जो रँक ३ चा टेन्सर आहे. या टेन्सरमध्ये, एक कंट्राव्हेरियंट आणि एक कोव्हेरियंट इंडेक्स समान ठरवले जातात, ज्याला टेन्सरचे कॉन्ट्रॅक्शन म्हणतात.

2. **उदाहरणार्थ:** . ट्रान्सफॉर्म फॉर्म (Transform form):

   चार ऑर्डरचा टेन्सरचा विचार करा $\bar{A}_{Rs}^{PQ}$

$$\bar{A}_{Rs}^{PQ} = \frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^Q}{\partial x^n} \frac{\partial x^C}{\partial \bar{x}^R} \frac{\partial x^D}{\partial \bar{x}^S} A_{CD}^{mn}$$

जर आपण Q = S आणि n = D ठरवले, तर.

$$\bar{A}_{RQ}^{PQ} = \frac{\partial \bar{x}^P}{\partial x^m} \frac{\partial x^C}{\partial \bar{x}^R} A_{Cn}^{mn}$$

$\bar{A}_{RQ}^{PQ} = \bar{A}_R^P$ and $A_{Cn}^{mn} = A_C^m$ जो रँक 2 चा टेन्सर आहे.

कॉन्ट्रॅक्शन मुळे चार ऑर्डरचा टेन्सर दोन ऑर्डरमध्ये कमी होऊ शकतो. म्हणजेच, टेन्सरचे संकुचन टेन्सरचा रँक दोनाने कमी करते.

c) टेन्सरचा आउटर प्रॉडक्ट (Outer product of tensor) : दोन टेन्सरचा आउटर प्रॉडक्ट म्हणजे एक टेन्सर ज्याचा रँक दिलेल्या टेन्सरच्या रँकचे बेरीज असतो. म्हणजेच, जर r आणि r_1 हे दोन टेन्सरचे रँक असतील, तर त्यांचा आउटर प्रॉडक्ट रँक $(r + r_1)$ असलेला एक टेन्सर असेल.

उदाहरणार्थ

1. जर A_k^{ij} आणि B_m^l हे दोन टेन्सर रँक 3 आणि 2 अनुक्रमे असतील, तर

   $(A_k^{ij})(B_m^l) = C_{km}^{i,j\,l}$ हा रँक 5 चा टेन्सर आहे.

2. जर A_{RST}^{PQ} , A_{lm}^K हे टेन्सर अनुक्रमे रँक 5 आणि 3 असतील, तर दोन्ही टेन्सरचा आउटर प्रॉडक्ट असेल

   $A_{RST}^{PQ} \;.\; A_{lm}^K = c_{RSTlm}^{PQk}$ हा रँक ८ चा टेन्सर आहे.

d) टेन्सरचा इनर प्रॉडक्ट (Inner product of tensor): दोन टेन्सरचा इनर प्रॉडक्ट आणि त्यानंतर संकुचन केल्यास एक नवीन टेन्सर तयार होतो, ज्याला दोन टेन्सरचा इनर प्रॉडक्ट म्हणतात आणि ही प्रक्रिया दोन टेन्सरचे इनर गुणाकार म्हणून ओळखली जाते.

1 . उदाहरणार्थ: समजा दोन टेन्सरA_k^{ij} आणि B_m^l आहेत

या दोन टेन्सरचा आउटर प्रॉडक्ट असा आहे: $(A_k^{ij})(B_m^l) = C_{km}^{ij\,l}$

संकुचन प्रक्रिया लागू करून, m = i सेट केल्यास, आपण प्राप्त करतो

$(A_k^{ij})(B_m^l) = C_{km}^{i,j\,l} = D_k^{j\,l}$ (एक नवीन टेन्सर)

नवीन टेन्सर $D_k^{j\,l}$ हा दोन टेन्सर A_k^{ij} आणि B_m^l चा इनर प्रॉडक्ट (Inner product)आहे.

2. जर A_{RST}^{PQ} , A_{nQ}^{MT} हे दोन टेन्सर असतील, तर इनर प्रॉडक्ट असा दिला जातो:

   $A_{RST}^{PQ} \;.\; A_{nQ}^{MT} = C_{RSTnQ}^{PQMT} = C_{RSn}^{Pm}$ जो दोन टेन्सरचा इनर प्रॉडक्ट आहे.

e) . टेन्सरचा ट्रेस (Trace of tensor) : एका मिश्रित टेन्सरच्या ऑर्डर मध्ये, जर कंट्राव्हेरियंट आणि कोव्हेरियंट इंडेक्स समान ठरवले, तर आपण टेन्सरचा ट्रेस मिळवतो.

$$R_p^P = R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + R_n^n = \mathrm{R}$$

Reference:

1. Higher Engineering Mathematics by H. K. Dass, Er. Rajnish Verma [S. Chआणि Technical, ISBN: 9788121938907]
2. Higher Engineering Mathematics by Grewal B. S. [Tata McGraw Hill Education, New Delhi, ISBN : 9789386173522]
3. Engineering Mathematics by A. C. Shrivastava, P. K. Shrivastava [PHI Learning, New Delhi, ISBN:9788120342934]

युनिट -4
न्यूमेरिकल डिफरेन्शिएशन आणि इंटिग्रेशन
(Numerical Differentiation and Integration)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome):

CO4: दिलेल्या फंक्शन्सचे संख्यात्मक विभेदन (Numerical Differentiation) आणि संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) मूल्यांकन करा.

घटक निष्पत्ती (Theory Learning outcome):

1. फॉरवर्ड आणि बॅकवर्ड इंटरपोलेशन (Forward and backward interpolation) वापरुन प्रथम ऑर्डर डेरिव्हेटिव्ह शोधा.
2. ट्रॅपेझोइडल नियम (Trapezoidal Rule) वापरून संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) मूल्यांकन करा.
3. सिम्पसनचा एक तृतीयांश नियम (Simpson's One-Third Rule) वापरून संख्यात्मक समाकलन ((Numerical Integration) मूल्यांकन करा.
4. सिम्पसनच्या तीन आठ नियमांचा (Simpson's Three-Eighth Rule) वापर करून संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) मूल्यांकन करा.

परिचय (Introduction) :

संख्यात्मक विभेदन (Numerical Differentiation) आणि संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) ही मूलभूत गणितीय क्रिया आहेत, ज्यांचा विविध शास्त्र आणि अभियांत्रिकीच्या क्षेत्रात विस्तृत प्रमाणावर उपयोग केला जातो. साधी सतत असलेली बीजगणितीय किंवा अपरिमेय फंक्शन थेट विभेदन (डेरिव्हेटिव्ह) किंवा समाकलन (इंटिग्रेशन) केली जाऊ शकतात . या अध्यायात, आम्ही फंक्शनच्या डेरिव्हेटिव्ह्जचे अंदाजे मार्ग विकसित करतो, जेव्हा केवळ डेटा पॉईंट्स दिले जातात आणि विशिष्ट मार्गांनी वक्र अंतर्गत क्षेत्र विभाजित करून संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) कसे करायचे हे शिकू .

4.1 संख्यात्मक विभेदन आणि संख्यात्मक समाकलन ((Numerical Differentiation and Numerical Integration):

4.1.1 संख्यात्मक विभेदन (Numerical Differentiation):

संख्यात्मक विभेदन (Numerical Differentiation) ही एक प्रक्रिया आहे कि ज्यात दिलेल्या विवक्षित डेटा बिंदूंवर आधारित स्पष्टपणे न ओळखल्या गेलेल्या फंक्शनच्या डेरिव्हेटिव्ह्जचे मूल्य काढले जाते. सर्वप्रथम आम्ही एक इंटरपोलेटिंग बहुपदी ठरवतो आणि नंतर दिलेल्या बिंदूवर अंदाजे डेरिव्हेटिव्ह्ज काढतो.

1. जर डेटा बिंदू समान अंतराने (equispaced) असतील.
   i. न्यूटनच्या फॉरवर्ड इंटरपोलेशन (Newton forward interpolation) सूत्राचा वापर टेबलच्या सुरुवातीच्या भागात डेरिव्हेटिव्ह्ज शोधण्यासाठी केला जातो.
   ii. न्यूटनच्या बॅकवर्ड इंटरपोलेशन (Newton backward interpolation) सूत्राचा वापर टेबलच्या शेवटच्या भागात डेरिव्हेटिव्ह्ज काढण्यासाठी केला जातो.
2. जर डेटा बिंदू समान अंतराने नसतील तर आपण न्यूटनच्या विभागीय फरक पद्धती किंवा लाग्रेंजच्या इंटरपोलेशन सूत्रचा वापर करून डेरिव्हेटिव्ह्ज शोधू शकतो आणि नंतर ते आवश्यकतेनुसार अनेक वेळा भिन्न करू शकतो.

4.1.2: **संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration)**: संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) म्हणजे वक्राखालील क्षेत्र काढणे किंवा एखाद्या क्षेत्रामध्ये प्रमाणांचा संचय करण्याची प्रक्रिया. संख्यात्मक समाकलन पद्धतींनी आपल्याला अंदाजे संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration मूल्य काढता येते, जेव्हा फंक्शनच्या अचूक रूप जटिल किंवा अज्ञात असते.

संख्यात्मक समाकलन खालील गोष्टींचा समावेश होतो:

a. ट्रॅपिझॉइडल नियम (Trapezoidal rule)
b. सिम्पसन एक तृतीयक नियम (Simpson’s one third rule)
c. सिम्पसन तीन आठवा नियम (Simpson’s three third rule).

4.2 न्यूटनच्या इंटरपोलेशन सूत्राचा वापर करून डेरिव्हेटिव्ह्ज (Derivatives Using Newton's Interpolation Formula):

4.2.1 न्यूटनच्या फॉरवर्ड इंटरपोलेशन सूत्राचा वापर करून डेरिव्हेटिव्ह्ज:

(Derivatives Using Newton's forward Interpolation Formula)

न्यूटनच्या फॉरवर्ड इंटरपोलेशन सूत्र पुढीलप्रमाणे आहे

$$y = y_0 + m\,\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \text{-------} \quad 1$$

येथे $m = \frac{x-x_0}{h}$ -----------2

डिफरंशिएटिंग 1 विथ रीस्पेक्टिव्ह टु m (Differentiating 1 w.r.t. m)

$$\frac{dy}{dm} = 0 + \Delta y_0 + \frac{2m-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3m^2-6m+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4m^3-18m^2+22m-6}{4!} + \Delta^4 y_0 + \text{------------} \; 3$$

डिफरंशिएटिंग 1 विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x (Differentiating 1 w.r.t. x)

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{h} \quad \text{-------------}4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm} \times \frac{dm}{dx} \qquad \text{chain rule}$$

समीकरण 3 आणि 4 वरून

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm} \times \frac{dm}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2m-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3m^2-6m+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4m^3-18m^2+22m-6}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \text{------}5$$

आता x = x_0 आणि m = 0 साठी, आपल्याला मिळेल

$$\boxed{\frac{dy}{dx}_{at\ x=0} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]} \quad -$$

पुन्हा एकदा डिफरंशिएटिंग 5 विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dm}\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \frac{dm}{dx} \qquad \text{Chain rule}$$

$$= \frac{d}{dm}\left[\frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2m-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3m^2-6m+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4m^3-18m^2+22m-6}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]\right] \times \frac{dm}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{d}{dm}\left[\Delta y_0 + \frac{2m-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3m^2-6m+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{4m^3-18m^2+22m-6}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[0 + \Delta^2 y_0 + \frac{6m-6}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{12m^2-36m+22}{24}\Delta^4 y_0 + \cdots\right]$$

आता x = x_0 आणि m = 0, साठी, आपल्याला मिळेल

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}_{at\ x=0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right]} \text{------}6$$

हे न्यूटनचे फॉरवर्ड इंटरपोलेशन सूत्र आहे जे टेबलच्या सुरुवातीस जवळच्या बिंदूवर डेरिव्हेटिव्ह्ज शोधण्यासाठी वापरले जाते.

सोडलेले उदाहरणे (Solved Examples)

उदाहरण 4.1: खालील डेटा पॉईंटसह बहुपदीचे घन दिले आहे

x	0	1	2	3
f(x)	5	6	3	8

$\frac{dy}{dx}$ ***and*** $\frac{d^2y}{dx^2}$ **चे मूल्य x=0 या मूल्यांसाठी शोधा .**

उत्तर: टेबलाच्या सुरवातीला **x=0** मूल्य आहे, म्हणून आपण न्यूटन फॉरवर्ड फॉर्मुला वापरून डेरिव्हेटिव्ह्ज काढणार आहोत. आपण प्रथम न्यूटन फॉरवर्ड डिफरेन्स टेबल तयार करू.

x	f(x)	$\Delta f(x))$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x))$
0	5			
		1		
1	6		-4	
		-3		12
2	3		8	
		5		
3	8			

आपल्याकडे न्यूटनचा फॉरवर्ड फॉर्मुला वापरून प्रथम डेरिव्हेटिव्ह्ज काढण्याचे फॉर्मुला खालील आहे

$$\frac{dy}{dx}_{at\ x=0} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \quad \text{----------1}$$

टेबल मध्ये **x= 0** ला खालील मूल्य आहे

$\Delta f(x)) = 1$, $\Delta^2 f(x) = -4$ आणि $\Delta^3 f(x)) = 12$ आणि h =1

दिलेले सर्व मूल्य समीकरण 1 मध्ये टाकू, आपल्याला मिळेल,

$$\frac{dy}{dx}_{at\ x=0} = \frac{1}{1}\left[1 - \frac{1}{2}(-4) + \frac{1}{3}(12)\right]$$

$$= [1 - (-2) + (4)]$$

$$= [1 + 2 + 4]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}_{at\ x=0} = 7$$

$\frac{dy}{dx}$ चे मूल्य **x=0** या मूल्यांसाठी **7** आहे

आपल्याकडे न्यूटनचा फॉरवर्ड फॉर्मुला वापरून दुसरा डेरिव्हेटिव्ह्ज काढण्याचे फॉर्मुला खालील आहे

$$\frac{d^2y}{dx^2}_{at\ x=0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{1^2}[-4 - 12 + 0 - 0 + \cdots]$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}_{at\ x=0} = -16$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ चे मूल्य **x=0** या मूल्यांसाठी **- 16** आहे

सरावासाठी उदाहरणे(Examples for Practice):

Q1. खालील उदाहरणे सोडावा

a) दिलेले :

x	0	1	2	3	4	5
y	3	6	11	18	27	38

शोधा: y '(0) आणि y''(0)

b) दिलेले:

x	0	1	2	3	4
y	1	3	15	43	93

शोधा: $\frac{dy}{dx}$ आणि $\frac{d^2y}{dx^2}$ at x = 0

c) दिलेले :

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	7.989	8.403	8.781	9.129	9.451	9.750	10.031

शोधा: $\frac{dy}{dx}$ आणि $\frac{d^2y}{dx^2}$ at x = 1.1

4.2.2 न्यूटनच्या बॅकवर्ड इंटरपोलेशन सूत्राचा वापर करून डेरिव्हेटिव्ह्ज(Derivatives Using Newton's Backward Interpolation Formula):

न्यूटनच्या बॅकवर्ड इंटरपोलेशन सूत्र पुढीलप्रमाणे आहे.

$$y = y_n + m\,\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_n \text{ -----1}$$

येथे $m = \frac{x-x_n}{h}$ ----------2

डिफरंशिएटिंग 1 विथ रीस्पेक्टिव्ह टु m(Differentiating w.r.t. m)

$$\frac{dy}{dm} = 0+\nabla y_n + \frac{2m+1}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{3m^2+6m+2}{3!}\nabla^3 y_n + \frac{4m^3+18m^2+22m+6}{4!} + \nabla^4 y_n + \text{------ 3}$$

डिफरंशिएटिंग 2 विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x (Differentiating w.r.t. x)

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{h} \quad \text{------ 4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm} \times \frac{dm}{dx} \qquad \text{Chain rule}$$

समीकरण 3 आणि 4 वरून

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm} \times \frac{dm}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{2m+1}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{3m^2+6m+2}{3!}\nabla^3 y_n + \frac{4m^3+18m^2+22m+6}{4!}\nabla^4 y_n + \cdots\right] \text{ ----5}$$

आता $x = x_n$ आणि m = 0 साठी, आपल्याला मिळेल.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{at\ x=x_n} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \frac{1}{4}\nabla^4 y_n + \cdots\right]$$

पुन्हा एकदा डिफरंशिएटिंग 5 विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dm}\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \frac{dm}{dx} \qquad \text{Chain rule}$$

$$= \frac{d}{dm}\left[\frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{2m+1}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{3m^2+6m+2}{3!}\nabla^3 y_n + \frac{4m^3+18m^2+22m-6}{4!}\nabla^4 y_n + \cdots\right]\right] \times \frac{dm}{dx}$$

$$= \frac{1}{h}\frac{d}{dm}\left[\nabla y_n + \frac{2m+1}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{3m^2+6m+2}{3!}\nabla^3 y_n + \frac{4m^3+18m^2+22m-6}{4!}\nabla^4 y_n + \cdots\right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[0 + \nabla^2 y_n + \frac{6m+6}{6}\nabla^3 y_n + \frac{12m^2+36m+22}{24}\nabla^4 y_n + \cdots\right]$$

आता $x = x_n$ आणि m = 0 साठी, आपल्याला मिळेल

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{at\ x=xn} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + \frac{5}{6}\nabla^5 y_n + \cdots\right]$$

हे न्यूटनचे बॅकवर्ड इंटरपोलेशन इंटरपोलेशन सूत्र आहे जे टेबलच्या शेवटी बिंदूवर डेरिव्हेटिव्ह्ज शोधण्यासाठी वापरले जाते .

उदाहरण 4.2: पुढील तक्ता 1961 ते 2001 या वर्षात राज्याची जनगणना लोकसंख्या देते.

वर्ष(Year)	1961	1971	1981	1991	2001
लोकसंख्या(Population)	19.96	36.65	58.81	77.21	94.61

2001 मधील लोकसंख्येच्या वाढीचा दर शोधा

उत्तर: टेबलाच्या शेवटी **x = 2001** मूल्य आहे, म्हणून आपण बॅकवर्ड इंटरपोलेशन फॉर्मुला वापरून डेरिव्हेटिव्ह्ज काढणार आहोत.

आपण प्रथम न्यूटन बॅकवर्ड डिफरेन्स टेबल तयार करू.

x	f(x)	$\nabla f(x))$	$\nabla^2 f(x)$	$\nabla^3 f(x))$	$\nabla^4 f(x))$
1961	19.96				
		16.69			
1971	36.65		5.47		
		22.16		-9,23	
1981	58.61	`	-3.76		11.99
		18.40		2.76	
1991	77.21		-1.00		
		17.40			
2001	94.62				

आपल्याकडे न्यूटनचा बॅकवर्ड फॉर्मुला वापरून प्रथम डेरीवेटीव्ह काढण्याचे फॉर्मुला खालील आहे

$$\frac{dy}{dx}_{at\ x=x_n} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \frac{1}{4}\nabla^4 y_n + \cdots\right]$$

टेबल मध्ये **x= 2001** ला खालील मूल्य आहे.

$\nabla f(x)) = 17.40$, $\nabla^2 f(x) = -1.00$, $\nabla^3 f(x)) = 2.76$, $\nabla^4 f(x) = 11.99$ आणि h=10

दिलेले सर्व मूल्य समीकरण 1 मध्ये टाकू, आपल्याला मिळेल

$$\frac{dy}{dx}_{at\ x=2001} = \frac{1}{10}\left[17.40 + \frac{1}{2}(-1.00) + \frac{1}{3}(2.76) + \frac{1}{4}(11.99)\right]$$

$$= \frac{1}{10}[17.40 - 0.5 + 0.92 + 2.9975]$$

$$= \frac{1}{10}[20.8175]$$

$$= 2.08175$$

$$\frac{dy}{dx}_{at\ x=2001} = 2.08175$$

$\frac{dy}{dx}$ चे मूल्य x=2001 या मूल्यांसाठी 2.08175 आहे.

2001 मधील लोकसंख्येच्या वाढीचा दर 2.08175 आहे .

आपल्याकडे न्यूटनचा बॅकवर्ड फॉर्मुला वापरून दुसरा डेरीवेटीव्ह काढण्याचे फॉर्मुला खालील आहे.

$$\frac{d^2y}{dx^2}_{at\ x=2001} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + \frac{5}{6}\nabla^5 y_n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{(10)^2}\left[-1.00 + (2,76) + \frac{11}{12}(11.99) + 0 +\right]$$

$$= \frac{1}{100}[-1.00 + (2,76) + 10.9908 + 0 +]$$

$$= \frac{1}{100}[12.7508]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}_{at\ x=2001} = 0.127508$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ चे मूल्य **x=2001** या मूल्यांसाठी **0.127508** आहे.

सरावाची उदाहरणे (Examples for Practice)

Q.1 खालील डेटा पॉइंट्ससह बहुपदी दिली आहे :

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	1	3	7	13	21	31

शोधा: $\frac{dy}{dx}$ आणि $\frac{d^2y}{dx^2}$ at x = 5

Q.1 दिलेले

x	0	1	2	3	4
y	1	3	11	31	69

शोधा: $\frac{dy}{dx}$ आणि $\frac{d^2y}{dx^2}$ at x = 3. 5

Q.3 खालील तक्त्यात दिलेले तापमान θ (डिग्री सेल्सियस मध्ये), एक थंड होत असलेल्या शरीराचे वेगवेगळ्या वेळेच्या क्षणी मोजलेले आहे

x	1	3	5	7	9
y	85.3	74.5	67.0	60.05	54.3

t = 8 सेकंद वर थंड होण्याचा अंदाजे दर काढा .

4.3 संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration):

4.3.1 नॉर्मल वर्गीकरण सूत्र (General Quadrature Formula): सांख्यिकीय समाकलन म्हणजेच निश्चित इंटिग्रल $\int_a^b ydx$ चे मूल्य काढण्याची प्रक्रिया, जेव्हा फंक्शन दिलेल्या डेटा बिंदूंमध्ये (xi, yi) दिले जाते. जर y=f(x) दिलेले फंक्शन असेल, तर y चे मूल्य y_0, y_1, y_2, y_3,…,y_n आणि x चे मूल्य a = x_0, x_1 ,x_2, x_3,...,x_n =b दिलेले आहेत.

इंटिग्रल $\int_a^b ydx$ काढण्यासाठी, प्रथम अंतराल (a, b) ला n समान भागांमध्ये विभागा, ज्यांचा रुंदाई h असेल, असे की

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <= \cdots < x_n = b$$

$$I = \int_a^b y\,dx \quad I = \int_{x_0}^{x_0+nh} ydx$$

येथे $x_0 = a$, $a + nh = x_0 + nh$

आपण घेऊ , $m = \frac{x-x_0}{h}$ -

$x - x_0 = hm$ ----------1

डिफरंशिएटिंग 1 विथ रीस्पेक्टिव्ह टु x (Differentiation w.r.t. x)

$\therefore dx = hdm$

जेंव्हा $x \to x_0$ तेंव्हा $m \to 0$ आणि जेंव्हा $x \to x_0 + nh$ तेंव्हा $m \to n$

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx$$

$$= \int_0^n \left[yo + m\,\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots\right] hdm$$

$$= h\int_0^n \left[y_0 + m\,\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots\right] dm$$

$$=h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\,\Delta y_{0+}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0 + \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots \ (n+1)\ \text{term}\right]$$

नॉर्मलवर्गीकरण सूत्र (General Quadrature formula) असे म्हणतात.

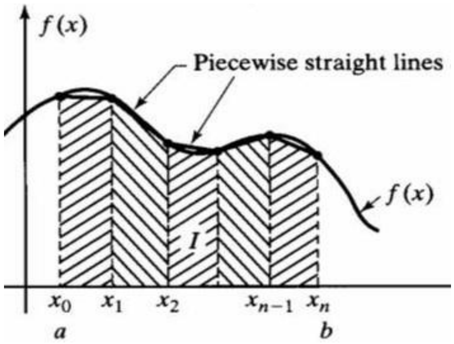
4.3.1 ट्रॅपिझॉइडल नियम (Trapezoidal rule) :

जर आपण न्यूटनच्या नॉर्मलवर्गीकरण(General Qudrature) सूत्रात n = 1 ठेवले, तर आपणास मिळालेलं वक्र (x_0, y_0) आणि (x_1, y_1) या दोन्ही बिंदूंनी सरळ रेषा होते, आणि ते एक रेषीय समीकरण बनवते. यामध्ये दुसरी आणि उच्च क्रमाची फरक (difference) शून्य असतात.

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y dx$$

$$= h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\,\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0 + \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 y_0 + \; - \text{to } (n+1) \text{ term}\right]$$

खालील प्रकारचे इंटिग्रेशन तयार होतात.



$$\int_{x_0}^{x_0+h} y dx = h\left(y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0\right)$$

$$= h\left[y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0)\right]$$

$$= h\left[\frac{y_0 + y_1}{2}\right]$$

तसेच $$\int_{x_{0+h}}^{x_0+2h} y dx = h\left(y_1 + \frac{1}{2}\Delta y_1\right)$$

$$= h\left[y_1 + \frac{1}{2}(y_2 + y_1)\right]$$

$$\int_{x_{0+h}}^{x_0+2h} y dx = h\left[\frac{y_1 + y_2}{2}\right]$$

तसेच $$\int_{x_{0+2h}}^{x_0+3h} y dx = h\left[\frac{y_2 + y_3}{2}\right]$$

$$\int_{x_{0+3h}}^{x_0+4h} y dx = h\left[\frac{y_4 + y_3}{2}\right]$$

तसेच $$\int_{x_{0+(n-1)h}}^{x_0+nh} y dx = h\left[\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right]$$

आपण सर्व n इंटिग्रेशन बेरीज करू, आपल्याला मिळेल.

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y dx = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx + \int_{x_{0+h}}^{x_0+2h} y dx + \int_{x_0+2h}^{x_0+3h} y dx + \ldots \int_{x_{0+(n-1)h}}^{x_0+nh} y dx$$

$$= h\left[\frac{y_0 + y_1}{2}\right] + h\left[\frac{y_1 + y_2}{2}\right] + h\left[\frac{y_2 + y_3}{2}\right] + \ldots h\left[\frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right]$$

$$I = \int_a^b y\, dx = \int_{x_0}^{x_0+nh} y dx = \frac{h}{2}\left[(y_0 + y_n) + 2\left(y_1 + y_2 + y_2 + \cdots y_{n-1}\right]\right.$$

हे निर्धारित इंटिग्रेशन (Definite integral) मूल्यांकन करण्यासाठी ट्रॅपेझोइडल नियम म्हणून ओळखले जाते.

सोडलेले उदाहरणे (Solved Examples)

उदाहरण 4.3: खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनचे n = 4 घेऊन ट्रॅपिझॉइडलचा नियम वापरून मूल्यांकन करा.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

उत्तर: दिलेले $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ a == 0 आणि b = 1, n = 4

$$\therefore\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y=$\frac{1}{1+x^2}$	1	$\frac{16}{17}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{2}$
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

ट्रॅपिझॉइडलचा नियम,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[(y_0 + y_n) + 2\left(y_1 + y_2 + y_2 + \cdots y_{n-1}\right]\right.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{h}{2}\ [(y_0 + y_4) +\ 2\,(\,y_1 + y_2 + y_3]$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{2}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) +\ 2\,(\frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25})\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{3}{2}\right) +\ 2\,(\frac{400+340+272}{425}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{3}{2}\right) +\ (\frac{2024}{425}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{5323}{850}\right]$$

$$= \left[\frac{5323}{6800}\right] \qquad \therefore\ \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \ = \ \mathbf{0.7828}$$

ट्रॅपिझॉइडलचा नियम वापरून दिलेल्या इंटिग्रेशनचे चे मूल्य 0.7828 आहे .

उदाहरण 4.4 खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनचे n=3 घेऊन ट्रॅपिझॉइडलचा नियम वापरून 4 दशांश पर्यंतचे मूल्यांकन करा.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} dx\,.$$

उत्तर: दिलेले $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx$, f(x) = $\boldsymbol{e^{cosx}}$ a =0 आणि b = $\frac{\pi}{2}$, n = 3

$$\therefore\ h = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{3} = \frac{\pi}{6}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y= e^{cosx}	2.71828	2.37744	1.64872	1
	y_0	y_1	y_2	y_3

ट्रॅपिझॉइडलचा नियम ,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\ [(y_0 + y_n) +\ 2\,(\,y_1 + y_2 + y_2 + \cdots y_{n-1}]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx}dx = \frac{h}{2}\ [(y_0 + y_3) +\ 2\,(\,y_1 + y_2]$$

$$= \frac{\frac{\pi}{6}}{2}\ [(2.71828 + 1\,) +\ 2\,(\,2.37744 + 1.64872)]$$

$$= \frac{\pi}{12}\ [(3.71828) +\ 2\,(\,4.02616]$$

$$= \frac{\pi}{12}\ [(3.71828) + 8.05232]$$

$$= \frac{\pi}{12}\ [11.7706]$$

$$= \ 3.0815 \qquad \therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx}dx \ = \ 3.0815$$

ट्रॅपिझॉइडलचा नियम वापरून दिलेल्या इंटिग्रेशनचे 4 दशांश पर्यंतचे मूल्य 3.0815 आहे .

सरावासाठी उदाहरणे

(a) खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी ट्रॅपिझॉइडलचा नियम वापरा, आणि [2, 7] या अंतरालाला पाच समान उपअंतरालात विभाजित करा. .

$$\int_2^7 \frac{1}{x}\ dx$$

(b) खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी ट्रॅपिझॉइडलचा नियम वापरा, आणि [0, $\frac{\pi}{2}$] या अंतरालाला समान तीन समान भागांमध्ये करा.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\ dx$$

(c) एका नदीची लांबी 100 मीटर आहे आणि ती नदीच्या विविध बिंदूंवर खोली मोजली गेली आहे.

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	0	3	7	9	12	15	14	10	8	6	2

नदीच्या क्रॉस-सेक्शनचा क्षेत्रफळ ट्रॅपिझॉइडलचा नियमाचा वापर करून शोधा.

4.4 सिम्पसन एक तृतीयक नियम (Simpsons one- third rule):

जर आपण न्यूटनच्या नॉर्मलवर्गीकरण सूत्रामध्ये (Newton's General Quadrature Formula) n= 2 मूल्ये ठेवली, तर आपल्याला (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) बिंदूंमधून जाणारा एक वक्र मिळेल, जो एक पराबोलिक आकृती असतो आणि हा वक्र एक द्विआधारी समीकरण (quadratic equation) असतो. त्यामध्ये तिसरे आणि त्यापुढील फरक शून्य असतात.

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y dx$$

$$= h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\,\Delta y_0 \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0 + \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 y_0 + -\text{ to } (n+1) \text{ term}\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} y dx = h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\,\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0\right]$$

$$= h\left[2y_0 + \frac{2^2}{2}\,\Delta y_0 + \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0\right]$$

$$= h\left[2y_0 + \frac{4}{2}(y_1 - y_0) + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right)\frac{1}{2!}(\Delta y_1 - \Delta y_0)\right]$$

$$= h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \left(\frac{8}{3} - 2\right)\frac{1}{2}[y_2 - y_1 - (y_1 - y_0]\right]$$

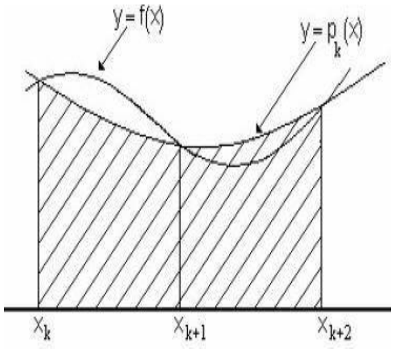
$$= h\left[2y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}[y_2 - 2y_1 + y_0]\right]$$

$$= h\left[2y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \frac{1}{3}[y_2 - 2y_1 + y_0]\right]$$

$$= h\left[2y_0 + 2y_1 - 2y_0 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}2y_1 + \frac{1}{3}y_0\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{3}y_0 + 2y_1 - \frac{1}{3}2y_1 + \frac{1}{3}y_2\right]$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] \therefore$$



तसेच $\int_{x_0}^{x_0+2h} y\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$

तसेच $\int_{x_0+3h}^{x_0+4h} y\,dx = \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4]$

$\int_{x_0+4h}^{x_0+6h} y\,dx = \frac{h}{3}[y_4 + 4y_5 + y_6]$

तसेच $\int_{x_0+(n-2)h}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$

आपण सर्व n इंटिग्रेशचे बेरीज करू. आपल्याला मिळेल

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{h}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \frac{h}{3}[y_4 + 4y_5 + y_6]$$

$$------ + \frac{h}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

सोपं केल्यावर, आपल्याला मिळतं .

$$= \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots .. + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_n)]$$

$$I = \int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}[(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots .. + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_n)]$$

हे निर्धारित इंटिग्रेशन (Definite integral) मूल्यांकन करण्यासाठी सिम्पसन एक तृतीयक नियम (Simpsons one third rule) म्हणून ओळखले जाते.

सोडलेले उदाहरणे (Solved Examples)

उदाहरण 4.5: खाली दिलेल्या इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी सिम्पसन एक तृतीयक नियम (simpson's one third rule) वापरा, आणि [0, 2] या अंतराला चार समान भागांमध्ये विभाजित करा.

$$\int_0^2 e^{-x}\,dx$$

उत्तर: दिलेले $I = \int_0^2 e^{-x}\,dx$, $f(x) = e^{-x}$ a =0 आणि b =2 , n = 4

$\therefore$ h = $\frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2
Y=e^{cosx}	1	0.6064	0.3676	0.2231	0.1353
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

सिम्पसन एक तृतीयक नियम,

$$I= \int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}[\,(y_0+y_n) + 4(y_1+y_3+y_5+\cdots..+y_{n-1}) + 2(y_2+y_4+\cdots+y_n\ )\,]$$

$$I= \int_0^2 e^{-x}\,dx = \frac{0.5}{3}[\,(y_0+y_4) + 4(y_1+y_3) + 2(y_2)\,]$$

$$= \frac{0.5}{3}[\,(1+0.1353) + 4(0.6064+0.2231) + 2(0.3676)\,]$$

$$= \frac{0.5}{3}[\,(1.1353) + 4(0.8295) + 0.7352)\,]$$

$$= \frac{0.5}{3}[\,5.1885]$$

$$I= \int_0^2 e^{-x} = 0.86475$$

सिम्पसन एक तृतीयक नियम वापरून दिलेल्या इंटिग्रेशनचे मूल्य 0.86475 आहे

उदाहरण 4.6 एक विमान ज्याची गती प्रारंभात विश्रांतीतून सुरु होते, ती वेळेच्या ठराविक अंतरावर दिली आहे, जसे की खाली दाखवले आहे:

t **वेळ (minutes)**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
v गती (Velocity)	**8**	**17**	**24**	**28**	**30**	**20**	**12**	**6**	**2**	**0**

सिम्पसन एक तृतीयांश नियमाचा (Simpson's 1/3 Rule) वापर करून विमान 20 मिनिटांमध्ये किती अंतर पार करेल याचा अंदाज करा.

उत्तर: समजा मानूया की S हे विमानाने 20 मिनिटांत पार केलेले अंतर आहे. विमानाची गती (v) जी विश्रांतीतून सुरू होते, ती वेळेच्या ठराविक अंतरालांवर दिली आहे. आपल्याला माहीत आहे की गती (velocity) म्हणजे:

$$v = \frac{dS}{dt}$$

जिथे, $\frac{dS}{dt}$ हे स्थानाच्या बदलाचे दर (rate of change of displacement) वेळेसंबंधी दिलेले आहे

$$ds = v\,dt$$

दोन्ही बाजूचे इंटिग्रेशन करून $\int_0^{20} ds = \int_0^{20} v\,dt$ here h = 2

t वेळ (minutes)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v गती (Velocity)	8	17	24	28	30	20	12	6	2	0
	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9

$$S = \int_0^{20} v\, dt$$
$$= \frac{h}{3}[(V_0 + V_9) + 4(V_1 + V_3 + V_5 + V_7) + 2(V_2 + V_4 + V_6 + V_8)]$$
$$= \frac{2}{3}[(8 + 0) + 4(17 + 28 + 20 + 6) + 2(24 + 30 + 12 + 2)]$$
$$= \frac{2}{3}[(8) + 284 + 136]$$
$$= \frac{2}{3}[428]$$
S = 285.3333 km

सिम्पसन एक तृतीयांश नियमाचा (Simpson's 1/3 Rule) वापर करून विमान 20 मिनिटांमध्ये 285.3333 km अंतर पार करेल.

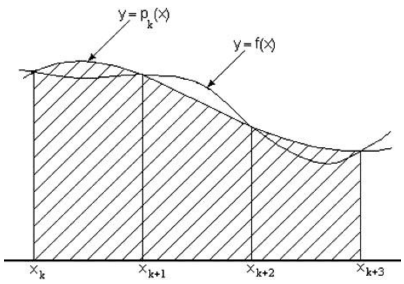
सरावासाठी उदाहरणे

a. खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी सिम्पसन एक तृतीयांश नियम वापरा, आणि [0,4] या अंतरालाला समान उपअंतरात विभाजित करा.
$$\int_0^4 e^x\, dx$$
b. खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी सिम्पसन एक तृतीयांश नियम वापरा, आणि $[0, \frac{\pi}{2}]$ या अंतरालाला समान 8 उपअंतरात विभाजित करा .
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\ dx \ .$$
c. खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी सिम्पसन एक तृतीयांश नियम वापरा, आणि $[0, \pi]$ या अंतरालाला समान 4 अंतरात विभाजित करा.
$$\int_0^{\pi} sinx \quad dx \quad (x_3, y_3)$$

4.5 सिम्पसन तीन आठवा नियम (Simpson's three- eight rule) :

जर आपण न्यूटनच्या नॉर्मलवर्गीकरण (General Qudrature) सूत्रात n= 3 मूल्ये ठेवली तर आपल्याला (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) (x_3, y_3) बिंदूंमधून जाणारा एक वक्र मिळेल, आणि हा वक्र एक (cubic equation) समीकरण असतो. त्यामध्ये चौथे आणि त्यापुढील फरक शून्य असतात.

$$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\, dx =$$
$$= h\left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0 + \left(\frac{n^4}{4} - n^3 + n^2\right)\frac{1}{3!}\Delta^3 y_0 + --\text{up}\right.$$



n = 3 टाकू

$$I = \int_{x_0}^{x_0+3h} y\, dx$$
$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{2}\right)\frac{1}{2!}\Delta^2 y_0 + \left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\frac{1}{6}\Delta^3 y_0\right]$$
$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{4}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{81}{4} - 27 + 9\right)\frac{1}{6}\Delta^3 y_0\right]$$
$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(\Delta y_1 - \Delta y_0) + \frac{3}{8}(\Delta^2 y_1 - (\Delta^2 y_0\right]$$
$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1) - \frac{9}{2}(y_0) + \frac{9}{4}\left((y_2 - y_1) - (y_1 - y_{0)}\right) + \frac{3}{8}\{(\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0)\}\right]$$
$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}y_1 - \frac{9}{2}y_0 + \frac{9}{4}y_2 - \frac{9}{2}y_1 + \frac{9}{4}y_0 + \frac{3}{8}\{(y_3 - y_2) - 2(y_2 - y_1) + (y_1 - y_0)\}\right]$$
$$= h\left[\frac{3}{4}y_0 + \frac{9}{4}y_2 + \frac{3}{8}y_3 - \frac{9}{8}y_2 + \frac{9}{8}y_1 - \frac{3}{8}y_0\right]$$
$$= h\left[\frac{3}{8}y_0 + \frac{9}{8}y_1 + \frac{9}{8}y_2 + \frac{3}{8}y_3\right]$$
$$= \frac{3}{8}h\left[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right]$$

$\int_{x_0}^{x_0+3h} y\,dx = \frac{3}{8}h\,[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$ ------------1

तसेच $\int_{x_0+3h}^{x_0+6h} y\,dx = \frac{3}{8}h\,[y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6]$ ----------2

तसेच $\int_{x_0+6h}^{x_0+9h} y\,dx = \frac{3}{8}h\,[y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9]$ ----------3

तसेच $\int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3}{8}h\,[y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$

आपण सर्व इंटिग्रेशन ची बेरीज करू आपल्याला मिळेल,

$I = \int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \int_{x_0}^{x_0+3h} y\,dx + \int_{x_0+3h}^{x_0+6h} y\,dx + \ldots \int_{x_0+(n-1)h}^{x_0+nh} y\,dx$

$= \frac{3}{8}h\,[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3] + \frac{3}{8}h\,[y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6] + \frac{3}{8}h\,[y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9]$

$\ldots + \frac{3}{8}h\,[y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$

, सोपं केल्यावर आपल्याला मिळते,

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} y\,dx = \frac{3}{8}h\,[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + y_8 + \cdots]$$
$$+ 2[y_3 + y_6 + y_9 + \ldots + y_{n-3}]$$

हे निर्धारित इंटिग्रेशन (Definite integral) मूल्यांकन करण्यासाठी सिम्पसन तीन आठवा नियम (Simpsons three – eight rule) म्हणून ओळखले जाते.

सोडलेले उदाहरणे (Solved Examples)

उदाहरण 4.7 : खाली दिलेल्या इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी सिम्पसन तीन आठवा नियम वापरा, आणि [0, 3] या अंतराला 7 समान उपअंतरालात विभाजित करा.

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x} dx \quad .$$

उत्तर: दिलेले $I = \int_0^3 \frac{1}{1+x} dx$

$y = f(x) = \frac{1}{1+x}$ a = 0 आणि b =3 , n = 6 , आमच्याकडे 7 ऑर्डिनेट आहे

$\therefore h = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	1	0.6667	0.5	0.4	0.3333	0.2857	0.25
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

सिम्पसन तीन आठवा नियम,

$I = \int_a^b y\,dx = \frac{3h}{8}[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 \ldots\ldots) + 2(y_3 + y_6 + y_9 \ldots)]$

$= \frac{3h}{8}[(y_0 + y_6) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5) + 2(y_3)]$

$= \frac{3(0.5)}{8}[(1 + 0.25) + 3(0.6667 + 0.5 + 0.3333 + 0.2857) + 2(0.4)]$

$= \frac{3(0.5)}{8}[(1.25) + 3(1.7857) + 2(0.4)]$

$= \frac{1.5}{8}[7.4071)]$

$= \frac{11.11065}{8}$

$\int_0^3 \frac{1}{1+x} dx = 1.3888$

सिम्पसन तीन आठवा नियम वापरून दिलेल्या इंटिग्रेशनचे मूल्य 1.3888 आहे

उदाहरण 4.8: दिलेल्या डेटा नुसार, खालील तक्त्यात वेळेच्या (t) आणि त्यासाठी संबंधित तापमान f(t)) चे मूल्य दिलेले आहेत

Time	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Temperature	**81**	**75**	**80**	**83**	**78**	**70**	**60**

दिलेल्या इंटिग्रेशन च्या मूल्यमापनासाठी सिम्पसन तीन आठवा वापरा नियम वापरा, $\int_1^7 \boldsymbol{f(t)dt}$

उत्तर: दिलेले $I = \int_1^7 f(t)dt$

a = 1, b = 7 n= number of interval = 6 ∴ **h =** $\frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = \mathbf{1}$

वेळ (Time)	1	2	3	4	5	6	7
तापमान (Temperature)	81	75	80	83	78	70	60
	$\boldsymbol{t_0}$	$\boldsymbol{t_1}$	$\boldsymbol{t_2}$	$\boldsymbol{t_3}$	$\boldsymbol{t_4}$	$\boldsymbol{t_5}$	$\boldsymbol{t_6}$

सिम्पसन तीन आठवा नियम,

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{3h}{8}[(t_0 + t_n) + 3(t_1 + t_2 + t_4 + t_5 \ldots\ldots) + 2(t_3 + t_6 + t_9 \ldots)]$$

$$\int_1^7 f(t)dt = \frac{3h}{8}[(t_0 + t_6) + 3(t_1 + t_2 + t_4 + t_5) + 2(t_3)]$$

$$= \frac{3(1)}{8}[(81 + 60) + 3(75 + 80 + 78 + 70) + 2(83)]$$

$$= \frac{3(1)}{8}[(141) + 909 + 166]$$

$$= \frac{3}{8}[1216]$$

$$= \frac{3648}{8}$$

$$\int_1^7 f(t)dt = 456$$

सिम्पसन तीन आठवा नियम वापरून दिलेल्या इंटिग्रेशनचे मूल्य 456 आहे

सरावासाठी उदाहरणे

a) खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी सिम्पसन तीन आठवा नियम वापरा, आणि [0,6] या अंतराला समान 6 उपअंतरात विभाजित करा. $\int_0^6 \frac{1}{1+x} dx$

b) खाली दिलेल्या निर्धारित इंटिग्रेशनच्या मूल्यमापनासाठी सिम्पसन तीन आठवा नियम वापरा, आणि [0, $\frac{\pi}{2}$] या अंतराला समान 8 उपअंतरालात विभाजित करा. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sinx + cosx}$ dx

References:

1. Higher Engineering Mathematics by H. K. Dass, Er. Rajnish Verma [S. Chआणि Technical, ISBN: 9788121938907]
2. Higher Engineering Mathematics by Grewal B. S. [Tata McGraw Hill Education, New Delhi, ISBN : 9789386173522]
3. Engineering Mathematics by A. C. Shrivastava, P. K. Shrivastava [PHI Learning, New Delhi, ISBN:9788120342934]

युनिट-5
लिनिअर प्रोग्रामिंग प्रॉब्लेम
(Linear Programming Problems)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome):

CO5: ऑप्टिमल सोलुशन (Optimal solution) प्राप्त करण्यासाठी लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम(LPP) संकल्पना लागू करा.

घटक निष्पत्ती (Theory Learning outcome):

1. दिलेल्या समस्येचे लिनियर प्रोग्रॅमिंगमध्ये प्रॉब्लेम रूपांतर करणे.
2. ग्राफिकल पद्धतीचा (Graphical Method) वापर करून लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेमचे ऑप्टिमल सोलुशन (Optimal solution) शोधणे.
3. सिम्प्लेक्स पद्धतीचा (Simplex Method) वापर करून लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेमचे ऑप्टिमल सोलुशन (Optimal solution) शोधणे.

5.1 परिचय (Introduction):

लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (Linear Programming Problem) हा ऑपरेशन्स रिसर्चचा एक विशेष प्रकार आहे. ऑपरेशन्स रिसर्च ही एक शास्त्रशुद्ध पद्धत आहे, जी वास्तविक जीवनातील समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी वापरली जाते. हे आपल्याला सर्वोत्तम निर्णय घेण्यासाठी मदत करते. यामध्ये चार मुख्य भाग आहेत:

1. निर्णय चल - (Decision Variables)
2. उद्दिष्ट कार्य - (Objective Function)
3. रेखीय बंधने - (Linear Constraints / Inequalities)
4. नॉन-नेगेटिव्ह बंधन - (Non-negative Constraints)

प्रथम, आपल्याला निर्णय चल लिहायचे असतात, दुसरे म्हणजे उद्दिष्ट कार्य जे वाढवायचे किंवा कमी करायचे असते. तिसरे म्हणजे रेखीय बंधनांचा संच, ज्यामध्ये समस्येच्या तांत्रिक तपशीलांचा समावेश असतो, जो दिलेल्या संसाधनांच्या किंवा आवश्यकतांच्या संदर्भात असतो, आणि चौथे म्हणजे नॉन-नेगेटिव्ह बंधनांचा संच. लिनियर प्रोग्रॅमिंग विविध क्षेत्रांमध्ये वापरले जाते, जसे की लष्करी, वित्तीय, विपणन, लेखाकाय आणि कृषी समस्या. लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम निराकरण करण्यासाठी सर्वात नॉर्मलपद्धती म्हणजे

1) ग्राफिकल पद्धत (Graphical method)
2) सिंप्लेक्स पद्धत (Simplex method)

ग्राफिकल पद्धत ही लिनियर प्रोग्रॅमिंग समस्यांचे निराकरण करण्याची सर्वात मूलभूत पद्धत आहे, ज्याद्वारे आपण सर्वोत्तम सोलुशन (Optimal Solution) शोधतो. या पद्धतीद्वारे, आपण एक वास्तविक जीवनातील समस्या गणितीय मॉडेलमध्ये रूपांतरित करू शकतो. ती दोन चल असलेल्या लिनियर प्रोग्रॅमिंग समस्यांसाठी वापरली जाते.

5.1.2 लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेमची मूलभूत परिभाषा (LPP)(Basic definitions)

1 . निर्णय चल (Decision Variables):

जे चल उद्दिष्ट कार्यात (objective function) मध्ये दिसतात, त्यांना निर्णय चल (Decision variables) म्हणतात. निर्णय चल नेहमी नॉन-नेगेटिव्ह मूल्य घेतात, म्हणजेच ते शून्य किंवा त्याहून मोठे असावे लागतात. हे ते चल आहेत, ज्यांचे गुणात्मक मूल्य मॉडेलच्या उत्तरातून(solution) शोधले जाते, जेणेकरून उद्दिष्ट कार्य कमाल किंवा किमान केले जाऊ शकेल. निर्णय चल सामान्यत $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. ने दर्शवले जातात हे नियंत्रित किंवा अप्रतिबंधित असू शकतात. नियंत्रित चल त्या असतात ज्यांचे मूल्य निर्णय घेणाऱ्यांच्या नियंत्रणात असते. अप्रतिबंधित चल त्या असतात ज्यांचे मूल्य नियंत्रणात नसते.

2. उद्दिष्ट कार्य (Objective Function):

रेषीय कार्य, जे ऑप्टिमाइझ (कमाल किंवा किमान) केले जाते, त्याला उद्दिष्ट कार्य (Objective Function) म्हणतात. उद्दिष्ट कार्यात प्रति युनिट उत्पादनाच्या नफ्याचे किंवा खर्चाचे गुणांक असणे आवश्यक आहे. ते z ने दर्शवले जाते. उद्दिष्ट कार्य खालील प्रकारे व्यक्त करता येईल:

कमाल किंवा किमान z (Max z or min z) $= c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_n\, x_n$

3. **बंधने (Constraints Inequalities)**: बंधने ही निर्णय चलांवर लादलेली मर्यादा असतात. ती कच्च्या वस्तूंच्या उपलब्धतेच्या संदर्भात असू शकतात

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq)\ b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{mn}x_n \leq, =, \geq b_m$

4. **नॉन-नेगेटिव्ह बंधन (Non negative constraint) :** $x_1, x_2, x_3 \dots \quad x_n \geq 0.$

5.2 रेखीय प्रोग्रॅमिंग समस्येची (LPP) रचना (Formation of Linear Programming Problems (LPP):

लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) रचना म्हणजे वास्तविक जगातील परिस्थितीला एक गणितीय मॉडेलमध्ये रूपांतरित करणे, ज्यामध्ये उद्दिष्ट कार्य, बंधने आणि नॉन-नेगेटिव्ह बंधनांचा समावेश असतो. खाली LPP तयार करण्याची एक चरणबद्ध प्रक्रिया दिली आहे.

लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम गणितीय रचना (Mathematical Formulation of Linear Programming Problems):

रेखीय प्रोग्रॅमिंग मॉडेल तयार करण्यासाठी, नेहमी खालील पद्धतींचा वापर करा.

चरण 1: निर्णय चल (Decision Variables): पहिला चरण म्हणजे तुम्हाला जे प्रमाणे ठरवायचे आहे ते ओळखणे. हे चल म्हणून दर्शवले जातात. समजा x_1आणि x_2 हे दोन उत्पादनांच्या एककांच्या संख्येसाठी प्रतिनिधित्व करतात (निर्णय चल ओळखा).)

चरण 2: उद्दिष्ट कार्य (Objective Function): तुम्हाला काय ऑप्टिमाइझ करायचं आहे ते ठरवा, कमाल (उदाहरणार्थ, नफा) किंवा किमान (उदाहरणार्थ, खर्च). उद्दिष्ट कार्य निर्णय चलांच्या रेषीय समीकरण म्हणून लिहा.

कमाल किंवा किमान z (Maximize(minimize) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

जिथे Z हे उद्दिष्ट कार्य आहे आणि $c_1, c_2, \dots, c_n$ हे गुणांक आहेत (उदाहरणार्थ, प्रति युनिट नफा किंवा प्रति युनिट खर्च). म्हणजेच उद्दिष्ट कार्य निर्णय चलांच्या स्वरूपात व्यक्त करा.

चरण 3: बंधने (Constraints): बंधने ही निर्णय चलांनी (decision variables) पाळावयाच्या मर्यादा किंवा बंधनांची यादी करा. बंधने रेषीय असमानतांद्वारे किंवा समीकरणांच्या रूपात लिहिली जातात.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq)\ b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{mn}x_n \leq, =, \geq b_m$

म्हणजेच, उद्दिष्ट कार्य ऑप्टिमाइझ करण्यासाठी आवश्यक असलेल्या बंधनांचे लेखन करा.

चरण 4: नॉन-नेगेटिव्ह बंधन (Non-negative Constraints): नॉन-नेगेटिव्ह बंधन लिहा.

$$x_1 \geq 0, x_2 ___ , \geq \text{xn} \ \geq 0$$

चरण 5: लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) रचना(Formation of linear programming problem (LPP) model):

शेवटी, संपूर्ण लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) ला स्टँडर्ड (standard) रूपात लिहा.

Maximize(Minimize) $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$

Subject to the constraints,

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq)\ b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \dots \dots \dots \dots . + a_{mn}x_n \leq, =, \geq b_m$

$x_1, \ , \ x_2, \ , \ x_3 \dots \quad x_n \geq 0.$

चला काही लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम ची उदाहरणे सोडवून (LPP) रचना कशी करायची हे शिकूया.

सोडलेले उदाहरणे (Solved Examples) [formation of LPP]

उदाहरण 5.1: दोन टेलर A आणि B दररोज अनुक्रमे 150 रुपये आणि 200 रुपये कमावतात. A दररोज 6 शर्ट आणि 4 पँट्स शिवू शकतो, तर B दररोज 10 शर्ट आणि 4 पँट्स शिवू शकतो. किमान 60 शर्ट्स आणि 32 पँट्स तयार करण्यासाठी कामाचा खर्च किमान करण्यासाठी लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम तयार करा.

उत्तर: दिलेली माहिती सारणी स्वरूपात दिली जाऊ शकते.

टेलर (Tailor) / शिवण" (stitch	A	B	किमान आवश्यकता Minimum requirement
शर्ट (Shirts)	6	10	60
पँट्स (Pants)	4	04	32
दैनंदिन उत्पन्न (Earning per day)	Rs. 150	Rs. 200	

चरण 1: निर्णय चल (Decision Variables): समजा टेलर A हा x दिवस काम करेल आणि टेलर B हा y दिवस काम करेल.

चरण 2: उद्दिष्ट कार्य (Objective Function): टेलर A च्या x दिवसांसाठी मजुरीचा खर्च Rs. 150 आहे आणि टेलर B च्या y दिवसांसाठी खर्च Rs. 200 आहे. टेलर A आणि B च्या काम करण्याच्या एकूण मजुरीचा खर्च

Rs. (150x + 200y) , समजा Z हे किमान(Minimum) मजुरीचा खर्च आहे,

किमान(Minimize) $Z = 150x + 200y$

चरण 3: बंधने (Constraints):

i)शर्टची किमान (minimum) आवश्यकता 60 आहे.

टेलर A हा एका दिवशी 6 शर्ट शिवतो म्हणून टेलर A हा x दिवशी 6x शर्ट शिवेल.

टेलर B हा एका दिवशी 10 शर्ट शिवतो म्हणून टेलर B हा y दिवशी 10y शर्ट शिवेल

म्हणून प्रथम शर्ट चे बंधन (constraint) $6x + 10y \geq 60$ आहे.

(ii) पँटची किमान आवश्यकता 32 आहे.

टेलर A हा एका दिवशी 4 पँट शिवतो, म्हणून टेलर A हा x दिवशी 4x पँट शिवेल.

टेलर B हा एका दिवशी 4 पँट शिवतो,, म्हणून टेलर B हा y दिवशी 4y पँट शिवेल.

म्हणून दुसरे पँटचे बंधन(constraint) $4x + 4y \geq 32$ आहे .

चरण 4: नॉन-नेगेटिव्ह बंधन (Non-negative Constraints):

$x \geq 0$ आणि $y \geq 0$

चरण 5: लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) रचना (Formation of linear programming problem),

शेवटी, पूर्ण लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) स्टँडर्ड स्वरूपात खालील प्रकारे लिहू

किमान (Minimize) Z 150x + 200y

बंधनाच्या अधीन (Subject to the constraints) :

$$6x + 10y \geq 60$$

$$4x + 4y \geq 32$$

$$x \geq 0 \text{ आणि } y \geq 0$$

उदाहरण 5.2: एक निर्माता दोन प्रकारच्या मॉडेल्स M_1 आणि M_2 तयार करतो, प्रत्येक M_1 प्रकाराच्या मॉडेलला 4 तास घर्षण (Grinding) आणि 2 तास पॉलिशिंगला (Polishing) लागतात, तर प्रत्येक M_2 प्रकाराच्या मॉडेलला 2 तास घर्षण आणि 5 तास पॉलिशिंगला लागतात. निर्मात्याजवळ 2 घर्षक आणि 3 पॉलिशर आहेत. प्रत्येक घर्षक एका आठवड्यात 40 तास काम करतो आणि प्रत्येक पॉलिशर एका आठवड्यात 60 तास काम करतो. मॉडेल M_1 वर नफा 3 रुपये आहे आणि मॉडेल M_2 वर नफा 4 रुपये आहे.

जे काही तयार केले जाते ते बाजारात विकले जाते. निर्माता त्याच्या उत्पादन क्षमतेचे दोन्ही मॉडेल्समध्ये कसे वाटप करावे जेणेकरून तो एका आठवड्यात कमाल (Maximum profit) नफा मिळवू शकेल.

उत्तर: दिलेली माहिती सारणी स्वरूपात दिली जाऊ शकते

यंत्र (Machine)	मॉडेल(Model M_1)	मॉडेल(Model M_2)	यंत्राची मर्यादा (Limit OF Machine)
घर्षण (Grinding)	4	2	$2\times 40 = 80$
पॉलिशिंग(Polishing)	2	5	$3 \times 60 = 180$
नफा (Profit)	Rs 3.00	Rs4.00	

चरण 1: निर्णय चल (Decision Variables): समजा x आणि y हे M_1 आणि M_2 मॉडेल्सच्या युनिट्सची संख्या आहेत.

चरण 2: उद्दिष्ट कार्य (Objective Function): M_1 मॉडेलवर नफा 3 रुपये आहे आणि M_2 मॉडेलवर नफा 4 रुपये आहे, M_1मॉडेल आणि M_2 मॉडेलचा एकूण नफा 3x + 4y आहे. आपल्याला नफा कमाल (maximum) करायचा आहे. ∴ कमाल (Maximize) $z = 3x + 4y$

चरण 3: बंधने (Constraints):

i) घर्षण बंधन (Grinding constraint): प्रत्येक घर्षकाला एका आठवड्यात 40 तास उपलब्ध आहेत, दोन घर्षक आहेत, त्यामुळे निर्माता कडे जास्तीत जास्त 2 x 80 = 80 तास घर्षणासाठी आहेत. दिल्यानुसार M_1 ला 4 तास घर्षण लागतो आणि M_2 ला 2 तास घर्षण लागतो. घर्षण बंधन (constraint) असे दिले आहे: $4x + 2y \le 80$

ii) **पॉलिशिंग बंधन (Polishing constraint**): प्रत्येक पॉलिशरला एका आठवड्यात 60 तास उपलब्ध आहेत, तीन पॉलिशर आहेत, त्यामुळे निर्माता कडे जास्तीत जास्त 3 x 60 = 180 तास पॉलिशिंगसाठी उपलब्ध आहेत. दिल्यानुसार M_1 ला 2 तास पॉलिशिंग लागते आणि M_2 ला 5 तास पॉलिशिंग लागते पॉलिशिंग बंधन असे दिले आहे: $2x + 5y \le 180$

चरण 4: नॉन-नेगेटिव्ह बंधन (Non-negative Constraints**):** $x \ge 0$ आणि $y \ge 0$

चरण 5: लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) रचना(Formation of linear programming problem) ,
शेवटी, पूर्ण लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) स्टँडर्ड स्वरूपात खालील प्रकारे लिहू .

कमाल (Maximiz) $Z = 3x+4y$

बंधनाच्या अधीन (Subject to the constraints) :

$$4x + 2y \le 80$$
$$2x + 5y \le 180$$
$$x \ge 0 \text{ आणि } y \ge 0$$

उदाहरण 5.3: एक उद्यानीक तज्ञ दोन ब्रँडच्या खतांचे मिश्रण तयार करायचे आहे. ज्यामुळे किमान 15 युनिट पोटॅश, 20 युनिट नाइट्रेट आणि 24 युनिट फॉस्फेट मिळतील. ब्रँड A हे 3 युनिट पोटॅश, 1 युनिट नाइट्रेट, 3 युनिट फॉस्फेट प्रदान करते. ब्रँड B हे 1 युनिट पोटॅश, 5 युनिट नाइट्रेट आणि 2 युनिट फॉस्फेट प्रदान करते. ब्रँड A हे Rs. 120 प्रति युनिट खर्च करते आणि ब्रँड B हे Rs. 60 प्रति युनिट खर्च करते. खर्च कमी करण्यासाठी या समस्येचे लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (L.P.P.) म्हणून रूपांतरण करा.

उत्तर: दिलेली माहिती सारणी स्वरूपात दिली जाऊ शकते

ब्रँड / सामग्री (Content)	प्रति युनिट (I per Unit)	प्रति युनिट (II per unit)	किमान आवश्यकता Minimum Requirement
पोटॅश,(Potash)	3	1	15
नाइट्रेट (Nitrate)	1	5	20
फॉस्फेट (Phosphate)	3	2	24
एकूण खर्च (Total cost)	Rs. 120	Rs.60	

समजा z हे मिश्रणाचे खर्च आहे . जे x युनिट ब्रँड A आणि y युनिट ब्रँड B एकत्र करून तयार केले आहे.

चरण 1: निर्णय चल (Decision Variables): समजा x हे 1 युनिट ब्रँड A चे खत आहे आणि y हे 1 युनिट ब्रँड B चे खत आहे .

चरण 2: उद्दिष्ट कार्य (Objective Function): ब्रँड A चे 1 युनिट Rs. 120 खर्च करते आणि ब्रँड B चे 1 युनिट Rs. 60 खर्च करते. एकूण *किमान*(Minimize) खर्च $120x + 60y$ आहे. आपल्याला खर्च कमी (minimize) करायचा आहे

किमान(Minimiz) $Z = 120x + 60y$

चरण 3: बंधने (Constraints):

i. पोटॅशचे बंधन (Constraint of potash)- ब्रँड A चे 1 युनिट चे 3 युनिट पोटॅश प्रदान करते, ब्रँड B चे 1 युनिटचे 1 युनिट पोटॅश प्रदान करते. पण खतांच्या ब्रँड्सने किमान 15 युनिट पोटॅश प्रदान करणे आवश्यक आहे,
पोटॅशचे बंधन $3x + y \geq 15$ हे आहे .

ii. नाइट्रेटचे बंधन (Constraint of Nitrate)- ब्रँड A चे 1 युनिटचे 1 युनिट नाइट्रेट प्रदान करते, ब्रँड B चे 1 युनिटचे 5 युनिट नाइट्रेट प्रदान करते. पण खतांच्या ब्रँड्सने किमान 20 युनिट नाइट्रेट प्रदान करणे आवश्यक आहे
नाइट्रेटचे बंधन $x+5y \geq 20$ हे आहे.

iii. फॉस्फेटचे बंधन (Constraint of phosphate) - ब्रँड A चे 1 युनिटचे 3 युनिट फॉस्फेट प्रदान करते, ब्रँड B चे 1 युनिटचे 2 युनिट फॉस्फेट प्रदान करते. पण खतांच्या ब्रँड्सने किमान 24 युनिट फॉस्फेट प्रदान करणे आवश्यक आहे
फॉस्फेटचे बंधन $3x + 2y \geq 24$ हे आहे.

चरण 4: नॉन-नेगेटिव्ह बंधन (Non-negative Constraints**):**

$x \geq 0$ आणि $y \geq 0$

चरण 5: लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) रचना(Formation of linear programming problem) ,

शेवटी, पूर्ण लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) स्टँडर्ड स्वरूपात खालील प्रकारे लिहू

किमान(Minimiz) $Z = 120x + 60y$

बंधनाच्या अधीन (Subject to the constraints) :

$$3x + y \geq 15$$
$$x + 5y \geq 20$$
$$3x + 2y \geq 24$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

1. एक कंपनी दोन प्रकारांच्या खेळण्यांची A आणि B निर्माण करते. प्रकार A चे प्रत्येक खेळणं कटिंगसाठी 2 मिनिटं आणि अ‍ॅसेंबलिंगसाठी 1 मिनिट लागते. प्रकार B चे प्रत्येक खेळणं कटिंगसाठी 3 मिनिटं आणि अ‍ॅसेंबलिंगसाठी 4 मिनिटं लागतात. कटिंगसाठी 3 तास उपलब्ध आहेत आणि अ‍ॅसेंबलिंगसाठी 2 तास उपलब्ध आहेत. प्रकार A चं खेळणं विकल्यावर कंपनीला Rs. 10 नफा मिळतो आणि प्रकार B च्या खेळण्यावर Rs. 20 नफा मिळतो. नफा कमाल करण्यासाठी लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (L.P.P.) तयार करा.
2. एका शेतकऱ्याकडे 10 एकर जमीन आहे. ते गहू आणि बार्ली (सुर्यफूल) उगवू शकतात. गहूच्या प्रत्येक एकरावर \$200 नफा मिळतो, आणि बार्लीच्या प्रत्येक एकरावर \$300 नफा मिळतो. शेतकऱ्याला 12 तासांपेक्षा जास्त श्रम खर्च करता येणार नाहीत, आणि गहूच्या प्रत्येक एकरासाठी 1 तास आणि बार्लीच्या प्रत्येक एकरासाठी 2 तास श्रम लागतात. शेतकऱ्याने नफा कमाल करण्यासाठी जमिन कशी वाटप करावी या समस्यांचे लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेममध्ये (L.P.P.) रूपांतरित करा.
3. एक निर्माण कंपनी दोन प्रकारच्या गॅझेट्स A आणि B निर्माण करते, जे प्रथम सपाटी (foundry कारखाना मध्ये प्रक्रिया केल्यानंतर मशीन शॉप (Machine shop) मध्ये फिनिशिंगसाठी पाठवले जातात. A आणि B च्या उत्पादनासाठी प्रत्येक शॉपमध्ये लागणारे मॅन ऑवर्स आणि कंपनीसाठी उपलब्ध मॅन ऑवर्स खालील प्रमाणे आहेत:

गॅझेट्स(Gadgets)	फाउंड्री(Foundry)	मशीन शॉप (Machine Shop)
A	10	5
B	6	4
उपलब्ध वेळ (तास)Time Available(Hour)	60	35

A च्या विक्रीवर नफा Rs. 30 आहे आणि B च्या विक्रीवर नफा Rs. 20 प्रति युनिट आहे. नफा कमाल करण्यासाठी या समस्यांचे लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेममध्ये (L.P.P.) रूपांतरित करा. L.P.P. तयार करा.

5.3लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम सोडवण्याची पद्धत (दोन व्हेरिएबल्समधील दोन समीकरणे):

(Method of solving Linear Programming Problems (Two equations in two variables):

लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (L.P.P.) सोलुशन (solution) शोधण्यासाठी दोन पद्धती आहेत.

1. ग्राफिकल पद्धत(Graphical method)
2. सिंप्लेक्स पद्धत (Simplex method)

5.3.1 लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम संबंधित औपचारिक परिभाषा (Formal definitions related to L.P.P.)

1. **लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (LPP) चे सोलुशन (Solution of L.P.P.):** निर्णय चल $x_1, x_2, \dots, x_n$ यांच्या मूल्यांचा एक सेट, जो दिलेल्या लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेमच्या अटी पूर्ण करतो, त्याला त्या समस्येचे सोलुशन (Solution) म्हणतात.
2. **फिजिबल सोलुशन (Feasible solution) :** एक सोलुशन (solution) जे दिलेल्या बंधनांना (constraint) पूर्ण करते, त्याला फिजिबल सोलुशन म्हणतात.
3. **ऑप्टिमल सोलुशन (Optimal solution):** एक जे ऑप्टिमल सोलुशन उद्देश कार्याला (Objective function) आवश्यकतेनुसार जास्तीत जास्त किंवा कमी करतो, त्याला ऑप्टिमल सोलुशन असे म्हणतात.
4. **फिजिबल रिजन(क्षेत्र)(Feasible region) :** लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (L.P.P.)च्या सर्व बंधनांनी(constraints) ठरवलेला क्षेत्रस फिजिबल रिजन (region) असे म्हणतात.
5. **बाऊण्डेड रिजन (Bounded region)** लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (L.P.P.) साठी एक सोलुशन (solution) जे बंधित असते असे मानले जाते, जर फिजिबल रिजन बंद असले आणि तर उद्देश कार्याला (objevtive function) एक मर्यादित आदर्श मूल्य मिळते. या बाबतीत असे बंधन आहेत जे निर्णय चलांचे (decigion varaibles) मूल्य मर्यादित करतात, ज्यामुळे उद्देश कार्य अनियंत्रितपणे वाढू किंवा कमी होऊ शकत नाही.
6. **अनबाऊण्डेड रिजन (Unbounded region) :** लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (L.P.P.) साठी एक समाधान (solution) जे अनबाऊण्डेड असते, असे मानले जाते, जर साध्य क्षेत्र(Feasible region) किमान एका दिशेने अनंतापर्यंत विस्तारित होत असेल, ज्यामुळे उद्देश कार्य(objective function) अनियंत्रितपणे वाढू किंवा कमी होऊ शकते. याचा अर्थ असा आहे की साध्य क्षेत्रामध्ये (Feasible region उद्देश कार्यासाठी (objective function) कोणताही मर्यादित जास्तीत जास्त किंवा कमी मूल्य नाही.

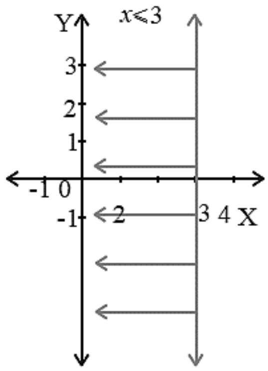
- **सिद्धांत (Theorem):** लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम (L.P.P). चा उद्देश कार्य (objective function) त्याच्या आदर्श मूल्य (optimal solution) (किंवा जास्तीत जास्त किंवा कमी) किमान एका कोपऱ्यावर मिळवते. हे कर्व्ह पॉलिगॉन (curve polygon) सिद्धांत म्हणून ओळखले जाते.

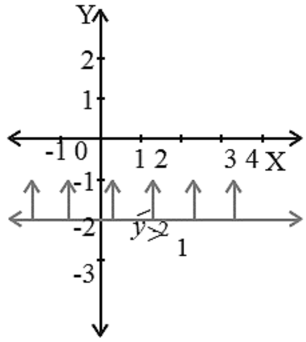
समजा, आपल्याला दिलेल्या उद्देश कार्य (objevtive function) z = ax + by ला साध्य क्षेत्रामध्ये (fesible region) जास्तीत जास्त किंवा कमी करायचे आहे. साध्य क्षेत्र (feasible region) हे एक कर्व्ह क्षेत्र आहे जे सरळ रेषांनी बंद केले आहे. जर कोणतेही रेषीय कार्य z = ax + by, साध्य क्षेत्रामध्ये काही बिंदूवर जास्तीत जास्त केले असेल, तर तो बिंदू पॉलिगॉनचा कोपरा असतो.
हे ax + by = c रेष रेखाटून सत्यापित केले जाऊ शकते,

उदाहरण 5.4: खाली दिलेली असमानता ग्राफिकली दाखवा:

(i)$x \le 3$ (ii) $y \ge -2$

उत्तर: दिलेली रेषा x = 3, X - Y समन्वयक्षेत्रात (x-y plain) काढू .
दिलेली रेषा y =-2 , X - Y समन्वयक्षेत्रात (x-y plain) काढू .





ii दिलेली रेषा $2x - 3y \geq -6$,

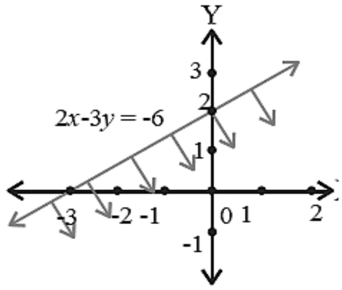
उत्तर: दिलेली रेषा $2x - 3y \geq -6$, X - Y समन्वयक्षेत्रात (x-y plain) काढू यासाठी दिलेल्या समीकरणात X=0 ,Y=0 टाकू , आपल्याला मिळेल

$$2(0)-3(0) \geq -6$$

$$0 \geq -6$$ खरे आहे (true)

जे खरे आहे, म्हणून फिजिबल रिजन ओरिजिनचा(origin) च्या दिशेने आहे .

X	Y	Point
0	2	(0,2)
-3	0	(-3,0)



टीप (Note) – जर वरील अट खोटी असेल, तर फिजिबल रिजन ओरिजिनचा (origin) च्या विरुद्ध दिशेने आहे

ग्राफिकल पद्धत (Graphical method) :

स्टेप-1 (Step-1) : सर्व असमानतांना समिकरणांमध्ये रूपांतर करा (covert all inequalities in to equalities)

स्टेप-2 (Step-2) : X - Y समन्वयक्षेत्रात रेषा काढा,

1. X-इंटरसेप्ट (x-intercept) आणि y-इंटरसेप्ट (y-intercept) शोधा: या साठी x=0 दिलेल्या समीकरणात x = 0 टाका आणि y चे मूल्य काढा , पुन्हा y=0 टाकून x चे मूल्य काढा , आपल्यला (0,a) आणि (b,0) असा प्रकारचे बिंदू मिळतील .
2. या बिंदूंना ग्राफवर प्लॉट करा आणि रेषा (line) काढा.

स्टेप-3 (Step-3) : बंधनांद्वारे निर्देशित फिजिबल रिजन (Feasible region) ठरवा. हे नॉर्मलक्षेत्र सुसंगत क्षेत्र आहे.

स्टेप-4 (Step-4) : फिजिबल रिजन (Feasible region)चे शिखर बिंदू शोधा.

स्टेप-5 (Step-5) : फिजिबल रिजन (Feasible region) क्षेत्रातील सर्व शिखर बिंदूंवर उद्दीष्ट कार्य (objective function) z चे मूल्य शोधा.

सोडलेले उदाहरणे (Solved Examples)

उदाहरण 5.5: खालील दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम ग्राफिकल पद्धतीचा उपयोग करून सोडवा.

कमाल (Maximize) $z = 9x + 13y$

बंधनाच्या अधीन (subject to constraint)

$$2x + 3y \leq 18$$

$$2x + y \leq 10,$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

उत्तर:-

स्टेप-1(Step-1): सर्व असमानतांना समिकरणांमध्ये रूपांतर करू

(convert all inequalities in to equalities)

$$2x + 3y = 18,$$

$$2x + y = 10$$

स्टेप-2(Step-2):

i) दिलेली रेषा $2x + 3y = 18$ X-Y समन्वयक्षेत्रात मध्ये काढण्यासाठी रेषेवरील बिंदूकाढून घेऊ.

x	y	बिंदू (Point)	क्षेत्र (Region)
0	6	(0,6)	ओरिजिनच्या दिशेने असेल (Origin side)
9	0	(9,0)	

(0, 6) आणि (9, 0) बिंदूंना जोडणारी रेषा(Line) X-Y समन्वयक्षेत्रात काढू .

ii) दिलेली रेषा $2x + y = 10$ X-Y समन्वयक्षेत्रात काढण्यासाठी रेषेवरील बिंदू काढून घेऊ,

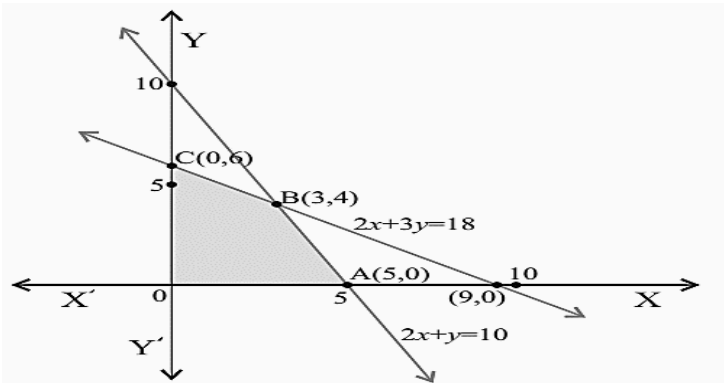
x	y	बिंदू (Point)	क्षेत्र (Region)
0	10	(0,10)	ओरिजिनच्या दिशेने असेल (Origin side)
5	0	(5,0)	

(0, 10) आणि (5, 0) बिंदूंना जोडणारी रेषा(Line) X-Y समन्वयक्षेत्रात काढू.

तसेच, $x \geq 0$, $y \geq 0$ हे दर्शविते की सोल्यूशन सेट पूर्णपणे I-चतुर्थकात असतो.

दोन रेषांच्या छेदन बिंदू(Intersection point) B काढण्यासाठी दोन रेषांच्या समीकरणांना आपण सोडवू, आपल्याला x = 3 आणि y = 4 मिळते, म्हणून छेदन बिंदू(Intersection point) B(3, 4).

स्टेप-3 (Step-3):बंधनेद्वारे(constraints)सूचित केलेल्या नॉर्मलक्षेत्राचे(Feasible region)स्थान ग्राफद्वारे काढू



स्टेप-4(Step-4): फिजिबल रिजन (Feasible region) हे छायांकित केलेले क्षेत्र O A B C O आहे, जे सुसंगत क्षेत्र आहे आणि त्याचे शिखर बिंदू 0(0, 0), A(5, 0), B(3, 4), C(0, 6) आहेत

स्टेप-5(Step-4): फिजिबल रिजन (Feasible region) मधील सर्व शिखर बिंदूंवर उद्दीष्ट कार्य (objective function) z चे मूल्य खाली दिलेल्या टेबले मध्ये काढू.

नॉर्मलक्षेत्राचे (Feasible region) शिखर बिंदू Vertex of common region(x, y)	z चे मूल्य , Z = 9x + 13y at (x, y)
O(0,0)	Z = 9(0) + 13(0) = 0
A(5,0)	Z = 9(5) + 13(0) = 45
B(3,4)	Z = 9(3) + 13(4) = 79 कमाल किंमत(maximum value)
C(0,6)	Z = 9(0) + 13(6) = 78

टेबलवरून, Z चे ची कमाल मूल्य 79 आहे, कमाल मूल्य बिंदू B (3, 4) येथे होते, म्हणजेच जेव्हा x = 3 आणि y = 4. तेंव्हा Z चे कमाल. मूल्य 79 आहे म्हणजेच, आपला ऑप्टिमल सोल्यूशन बिंदू B(3, 4) येथे आहे आणि Z चे कमाल मूल्य 79 आहे.

उदाहरण 5.6: खालील दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम ग्राफिकल पद्धतीचा उपयोग करून सोडवा .

कमाल (Maximize) $z = 5x + 2y$

बंधनाच्या अधीन (subject to constraint)

$$5x + y \geq 10,$$
$$x + y \geq 6,$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

स्टेप-1(Step-1): सर्व असमानतांना समिकरणांमध्ये रूपांतर करू (covert all inequalities in to equalities)

$$5x + y = 10 \text{ आणि } x + y = 6.$$

स्टेप-2(Step-2):

i) दिलेली रेषा $5x + y = 10$, X-Y समन्वयक्षेत्रात मध्ये काढण्यासाठी रेषेवरील बिंदू काढून घेऊ

x	y	बिंदू (Point)	क्षेत्र (Region)
0	10	(0,10)	ओरिजिनच्या विरुद्ध दिशेने असेल (Non-Origin side)
2	0	(2,0)	

(0, 10) आणि (2, 0) बिंदूंना जोडणारी रेषा(line) , X-Y समन्वयक्षेत्रात काढू .

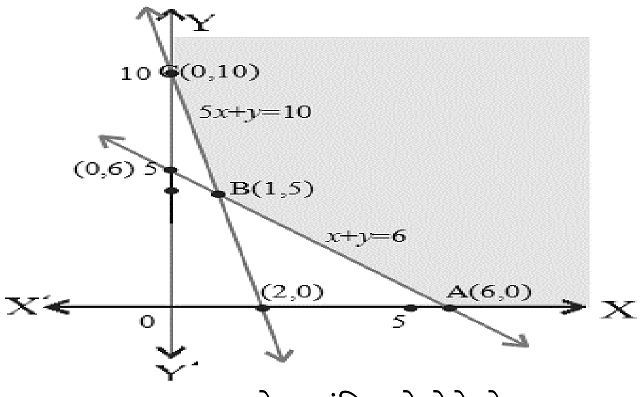
ii) दिलेली रेषा , $x + y = 6.$ X-Y समन्वयक्षेत्रात मध्ये काढण्यासाठी रेषेवरील बिंदू काढून घेऊ .

x	y	बिंदू (Point)	क्षेत्र (Region)
0	6	(0,6)	ओरिजिनच्या विरुद्ध दिशेने असेल (Non-Origin side)
6	0	(6,0)	

(0, 6) आणि (6, 0) बिंदूंना जोडणारी रेषा X-Y समन्वयक्षेत्रात काढू

तसेच, $x \geq 0$, $y \geq 0$ हे दर्शविते की सोल्यूशन सेट पूर्णपणे I-चतुर्थकात असतो. दोन रेषांच्या छेदन बिंदू (Intersection point) B काढण्यासाठी दोन रेषांच्या समीकरणांना आपण सोडवू, आपल्याला x = 1 आणि y = 5 मिळते, म्हणून छेदन बिंदू (Intersection point) B(1, 5).

स्टेप-3(Step-3): बंधनेद्वारे (constraints) सूचित केलेल्या नॉर्मलक्षेत्राचे (Feasible region) स्थान ग्राफद्वारे काढू.



स्टेप-4(Step-4): फिजिबल रिजन (Feasible region) हे छायांकित केलेले क्षेत्र A B C ओरिजिनच्या विरुद्ध दिशेने आहे, जे सुसंगत क्षेत्र आहे आणि त्याचे शिखर बिंदू A(6, 0), B(1,5), C(0,10) आहेत

स्टेप-5(Step-5): फिजिबल रिजन (Feasible region) मधील सर्व शिखर बिंदूंवर उद्दीष्ट कार्य (objective function) z चे मूल्य खाली दिलेल्या टेबले मध्ये काढू.

नॉर्मलक्षेत्राचे शिखर बिंदू Vertex of common region(x, y)	उद्दीष्ट कार्य z चे मूल्य (Value of Z = 9x + 13y at(x, y)
A (6,0)	Z = 5(6) + 2(0) = 30
B (1,5)	Z = 5(1) + 2(5) = 15 किमान किंमत (Minimum value)
C (0,10)	Z = 5(0) + 2(10) = 20

टेबलवरून, Z चे किमान मूल्य (Minimum value) 15 आहे, किमान मूल्य बिंदू B (1, 5) येथे होते, म्हणजेच, जेव्हा x = 1 आणि y = 5. तेंव्हा Z चे किमान मूल्य 15 आहे म्हणजेच आपला ऑप्टिमल सोल्यूशन बिंदू B(1, 5) येथे आहे आणि Z चे किमान मूल्य 15 आहे.

उदाहरण 5.7: खालील दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम ग्राफिकल पद्धतीचा उपयोग करून सोडवा.

कमाल (Maximize) $z = 3x + 4y$

बंधनाच्या अधीन (subject to constraint)

$x - y \geq 0,$

$-x + 3y \leq 3$

$x \geq 0, y \geq 0$

उत्तर:

स्टेप-1(Step-1): सर्व असमानतांना समिकरणांमध्ये रूपांतर करू(covert all inequalities in to equal)

$x - y = 0$ आणि $-x + 3y = 3$

स्टेप-2(Step-2):

i)दिलेली रेषा $x - y = 0$,X-Y समन्वयक्षेत्रात मध्ये काढण्यासाठी रेषेवरील बिंदू काढून घेऊ.

X	Y	बिंदू (Point)	क्षेत्र (Region)
0	0	(0,0)	On a side
1	1	(1,1)	

(0, 0) आणि (1,1) बिंदूंना जोडणारी रेषा X-Y समन्वयक्षेत्रात काढू

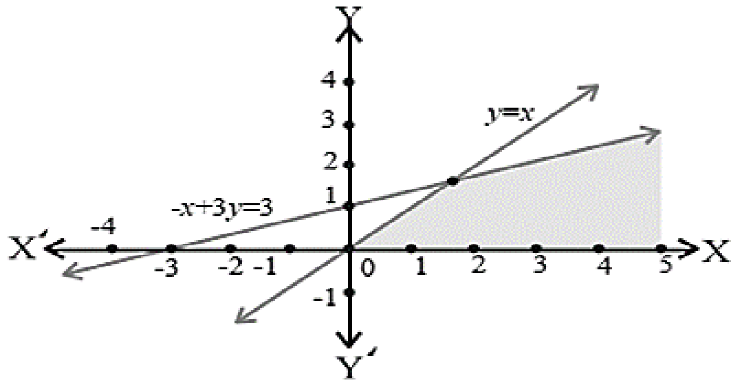
ii) दिलेली रेषा $x + 3y = 3$, X-Y समन्वयक्षेत्रात मध्ये काढण्यासाठी रेषेवरील बिंदू काढून घेऊ

X	Y	बिंदू (Point)	क्षेत्र (Region)
0	1	(0,1)	Origin side of line
3	0	(3,0)	

(0, 1) आणि (1,0) बिंदूंना जोडणारी रेषा X-Y समन्वयक्षेत्रात काढू

तसेच, x ≥ 0, y ≥ 0 हे दर्शविते की सोल्यूशन सेट पूर्णपणे I-चतुर्थकात असतो.

स्टेप-3(Step-3): बंधनेद्वारे (constraints) सूचित केलेल्या नॉर्मलक्षेत्राचे (Feasible region) स्थान ग्राफद्वारे काढू



ग्राफमधून, आपल्याला दिसते की नॉर्मलछायांकित (Feasible region) क्षेत्र म्हणजे सुलभ क्षेत्र जे अन-बद्ध आहे (पॉलीगॉन नाही). अशा प्रकरणांमध्ये, आयसो-प्रॉफिट रेषा (Line) अनंतकाळापर्यंत ओरिगिनपासून हलवता येतात. सुलभ क्षेत्राच्या आत z चे कोणतेही निश्चित कमाल (Maximize) मूल्य नाही.

सरावासाठी उदाहरणे (Example for practice)

Q खालील दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम ग्राफिकल पद्धतीचा उपयोग करून सोडवा.

a) कमाल (Maximize) $z = 11x + 8y$

बंधनाच्या अधीन (subject to constraint):

$$x \leq 4,$$
$$y \leq 6,$$
$$x + y \leq 6,$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

b) कमाल (Maximize) $z = 3x + 5y$

बंधनाच्या अधीन (subject to constraint):

$$x + 4y \leq 24,$$
$$3x + y \leq 2,$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

c) किमान (Maximize) $z = 7x + y$

बंधनाच्या अधीन (subject to constraint):

$$x + 4y \leq 24,$$
$$3x + y \leq 2,$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

5.3.2 सिंप्लेक्स पद्धत (Simplex method)

सिंप्लेक्स पद्धतीशी संबंधित काही मुख्य संकल्पना:

स्लॅक व्हेरिएबल्स (Slack Variable) : स्लॅक व्हेरिएबल्स हे ≤ या बंधनांना समिकरणात रूपांतरित करण्यासाठी ते जोडले जातात.

उदनाहार्थ : $x_1 + x_2 \leq 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + s_1 = 5$ येथे s_1 हा स्लॅक व्हेरिएबल आहे.

सरप्लस व्हेरिएबल्स (Surplus Variable) : सरप्लस रिएबल्स हे ≥ या बंधनांना समिकरणात रूपांतरित करण्यासाठी ते जोडले जातात..

उदाहरणार्थ : $x_1 + x_2 \geq 5 \Rightarrow x_1 + x_2 - s_1 = 5$ येथे S_1 हा सरप्लस व्हेरिएबल आहे.

आर्टीफिसिअल व्हेरिएबल्स (Artificial Variables) : आर्टीफिसिअल व्हेरिएबल्स हे ≥ (महत्त्वापेक्षा जास्त) किंवा = (समान) स्थिती असलेल्या बंधनांमध्ये कृत्रिम व्हेरिएबल्स परिचय कराव्या लागतात. सिंप्लेक्स पद्धत ही लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम निराकरण करण्यासाठी एक अत्यंत लोकप्रिय पद्धत आहे. ही एक पुनरावृत्ती प्रक्रिया आहे. जी सुलभ अधिकतम समाधान मिळवण्यासाठी वापरली जाते. या पद्धतीत, मुख्य व्हेरिएबलची वॅल्यु निरंतर बदलते, जेणेकरून उद्दीष्ट फंक्शनसाठी (objective function) अधिकतम मूल्य प्राप्त होईल. रेखीय कार्यक्रम सिंप्लेक्स पद्धतीसाठी अल्गोरिदम खाली दिला आहे,

चरण 1: बंधने (Constraints) स्टँडर्ड रूपात रूपांतरित करा.

जर उद्दीष्ट फंक्शन (objective function) कमी करण्याचे (minimization) असेल, तर ते -1 ने गुणाकार करून अधिकतम (maximization) मध्ये रूपांतरित करा.

- असमानता बंधने (≤ किंवा ≥) समिकरणांमध्ये रूपांतरित करा, ज्यासाठी स्लॅक व्हेरिएबल्स किंवा सरप्लस व्हेरिएबल्स जोडा.
    - ≤ बंधनांसाठी स्लॅक व्हेरिएबल्स (+S) (अवापर न केलेले संसाधन जोडते).
    - ≥ बंधनांसाठी सरप्लस व्हेरिएबल्स (-S) (अतिरिक्त संसाधन काढते)
    - आणि कृत्रिम व्हेरिएबल्स परिचय करा जर समानता बंधन (equality constraint) असेल, तर फक्त कृत्रिम व्हेरिएबल्स जोडा.

चरण 2: प्रारंभिक सिंप्लेक्स टेबल तयार करा (Construct the Initial Simplex Table):

- उद्दीष्ट फंक्शन(objective function) आणि बंधनांना(constraint) टेबलरूपात लिहा.
  पहिले टेबल पुढील गोष्टींचा समावेश असतो.
  1) $C_j -$ उद्दीष्ट फंक्शनचा खर्च (cost of objective function)
  2)B.V.- मुख्य व्हेरिएबल (Main variables)
  3)CB_i- उद्दीष्ट फंक्शनचा मुख्य व्हेरिएबलचा खर्च
  4) Z_j- उद्दीष्ट फंक्शनमध्ये प्रत्येक व्हेरिएबलचा एकूण योगदान $Z_j = \sum(CB_i * x_{ij})$

चरण 3: पुढील पुनरावृत्ती साठी मुख्य घटक ओळखा :(Identify the Key Elements for the Next Iteration)

1. प्रवेश करणारा व्हेरिएबल (Entering variable) (Pivot Column) ठरवा
    - Z_j - C_j रांगेतील सर्वात नकारात्मक मूल्य ओळखा (नेट मूल्यांकन रांगा)
    - त्यानुसार स्तंभाला पिवट कॉलम (Pivot Column) म्हटले जाते.
2. सोडून जाणारा व्हेरिएबल (Leaving variable) (Pivot Row) ठरवा.
    - पिव्होट कॉलमच्या मूल्यांशी :(RHS / संबंधित कॉलम मूल्य) गुणोत्तर (ratio) गणना करा.
    - किमान नकारात्मक नसलेला गुणोत्तर निवडा.
    - त्यानुसार रांगेला पिव्होट रांगा (Pivot Row) म्हटले जाते आणि त्यातील व्हेरिएबल बदलला जाईल.
3. पिव्होट घटक ठरवा (Determine the Pivot Element**)**
   पिव्होट रांग आणि पिव्होट कॉलम यांचे जंक्शन म्हणजे पिव्होट घटक (Pivot Element) होय.

चरण 4: टेबल अद्यतनित करण्यासाठी पंक्ती ऑपरेशन्स करा (Perform Row Operations to Update the Table):

- पिव्होट घटक 1 करा (पिव्होट रांगेला पिवट घटकाने भाग द्या).
- पिव्होट कॉलममधील इतर सर्व घटक शून्य करा पंक्ती रूपांतर लागू करून.

चरण 5: आदर्शतेसाठी तपासा (Check for Optimality)

- जर Zj - Cj रांगेतील सर्व मूल्ये ≥ 0 (positive) असतील, तर लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम ऑप्टिमल सोलुशन आहे.
- जर कोणतेही नकारात्मक मूल्य उर्वरित राहिले, तर ऑप्टिमल सोलुशन प्राप्त होईपर्यंत चरण 3, 4 आणि 5 पुनरावृत्त करा

चरण 6: समाधानाची व्याख्या करा (Interpret the solution)

- मुख्य व्हेरिएबल्स आणि त्यांचे संबंधित मूल्ये RHS कॉलममध्ये दिली जातात, जे ऑप्टिमल सोलुशनआहे.
  . या टप्प्यावर उद्दीष्ट फंक्शनचे (objecrtive function) मूल्य हे आदर्श मूल्य (Optiomal solution) असते.

सिंप्लेक्स पद्धतीतील विशेष प्रकरणे (Special Cases in Simplex Method):

- **अनबाऊण्डेड सोलुशन (Unbounded Solution):** जर कोणतीही वैध पिव्होटरांगा नसेल, तर सोलुशन (solution) अलिमिटेड (अन-बद्ध) असते.
- **इन फिजिबल सोलुशन (Infeasible solution)**: जर कृत्रिम व्हेरिएबल्स समाधानात शून्य नसलेल्या मूल्यांसह राहतात, तर समस्येचे सुलभ समाधान नाही.
- **डिजेनेरेसी (Degeneracy)**: जर एकाच किमान गुणोत्तर (minimum ratio) एकाधिक रांगेत दिसत असेल, तर सायकलिंग होऊ शकते.
- **मल्टिपल ऑप्टिमल सोलुशन (Multiple Optimal solutions)**: जर Zj - Cj = 0 असलेले कोणतेही अप्राधिकारिक व्हेरिएबल असेल, तर एक पर्यायी आदर्श अस्तित्वात असू शकते.

सोडवलले उदाहरणे (Simplex method)

उदाहरण 5.8: खालील दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम सिंप्लेक्स पद्धतीचा उपयोग करून सोडवा

कमाल (Maximize) = $100x_1 + 80x_2$

बंधनाच्या अधीन (subject to constraint):

$6x_1 + 4x_2 \leq 7200$,,

$2x_1 + 4x_2 \leq 4000$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

उत्तर: चरण 1 - निर्बंधांचे मानक रूपात रूपांतर करा: ***(*** Convert Constraints into standard Form**)**

कमाल (Maximize) $Z = 100x_1 + 80x_2 + 0S_1 + 0S_2$

बंधनाच्या अधीन (Subject to constraint) : $6x_2 + 4x_2 + S_1 = 7200$

$2x_2 + 4x_2 + S_2 = 4000$

चरण 2 - प्रारंभिक सिम्प्लेक्स टेबल (Initial Simplex Table) सिम्प्लेक्स पद्धतीचे प्रारंभिक टेबल तयार करण्यासाठी, आपल्याला दिलेल्या फंक्शन आणि निर्बंधांचा उपयोग करावा लागतो.

CB_i	C_j	100	80	0	0	उत्तर:	RHS
	B.V	x_1	x_2	S_1	S_2		
0	S_1	6	4	1	0	7200	$\frac{7200}{6}$ =1200
0	S_2	2	4	0	1	4000	$\frac{4000}{2}$ = 2000
Z_j		0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$		-100	-80	0	0		

1. पहिली पुनरावृत्ती (First Iteration)

चरण 3: प्रमुख घटक ओळखा (Identify the Key Elements)

- प्रवेश करणारा व्हेरिएबल (Entering variable) : पंक्तीमधील सर्वात निगेटिव्ह मूल्य -100 आहे (जे x_1 ला संबंधित आहे). म्हणून x_1 प्रवेश करतो
- सोडून जाणारा व्हेरिएबल (Leaving variable): Compute RHS / pivot column values:
  - $\frac{7200}{6} = 1200$ *and* $\frac{4000}{2} = 2000$
  - किमान गुणोत्तर = 1200, म्हणून S_1 बाहेर जातो.

पिव्होट घटक (**Pivot** element): 6 (पिव्होट स्तंभ x_1 आणि पिव्होट पंक्ती S_1 चा छेदन बिंदू).

चरण 4: रांगेच्या ऑपरेशन्स करा (Perform Row Operations)

R_1 (नवीन रांग) → 1/6 R_1 (जुनी रांग**)** **(**पिव्होट घटक **1** करण्यासाठी**)**

R_2 (नवीन रांग**)** → R_2 (जुनी रांग) - 2R_1 (नवीन रांग) (पिव्होट स्तंभातील इतर घटक 0 करण्यासाठी)

CB_i	C_j	100	80	0	0	उत्तर	Ratio
	B.V	x_1	x_2	S_1	S_2		
100	x_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1200	$\frac{1200}{\frac{2}{3}}$
0	S_2	0	$\mathbf{\frac{8}{3}}$	$\frac{-1}{3}$	1	1600	$\frac{1600}{\frac{8}{3}}$
Z_j		100	$\frac{200}{3}$	$\frac{100}{6}$	0	12000	
$Z_j - C_j$		0	$\frac{-40}{3}$	$\frac{100}{6}$	0		

चरण 5: ऑप्टिमल सोलुशन (Check Optimal solution)

आता काही Zj- Cj ≤ 0 ची मूल्ये (negative) आहेत, त्यामुळे आपल्याला ऑप्टिमल उत्तर मिळाले नाही.

म्हणून, **3**, 4, 5 पुन्हा चरणांची पुन्हा पुनरावृत्ती करू.

2. दुसरी पुनरावृत्ती (Second Iteration):

चरण 3: प्रमुख घटक ओळखा (Identify the Key Elements)

- प्रवेश करणारा व्हेरिएबल(Entering variable: पंक्तीमधील सर्वात निगेटिव्ह मूल्य is $\frac{-40}{3}$ आहे जे x_2 ला संबंधित आहे. म्हणून, x_2 प्रवेश करतो.
- सोडून जाणारा व्हेरिएबल**:**(Leaving variable) RHS/ पिव्होट स्तंभाचे मूल्य गणना करा:

  किमान गुणोत्तर = 600, म्हणून S_2 बाहेर जातो.: $\frac{1200}{\frac{2}{3}} = 1800 \quad and \quad \frac{1600}{\frac{8}{3}} = 600$

  किमान गुणोत्तर = 600, म्हणून S_2 बाहेर जातो

  पिव्होट घटक(Pivot element) : $\frac{8}{3}$(पिव्होट स्तंभ x_2 आणि पिव्होट पंक्ती S_2 चा छेदन बिंदू).

चरण 4: रांगेच्या ऑपरेशन्स करा (Perform Row Operations)

R_2 (नवीन रांग) → **3/8 R_2** (जुनी रांग) (पिव्होट घटक 1 करण्यासाठी**)**

R_1 (नवीन रांग) → R_1 (जुनी रांग) - (2/3) R_2 (नवीन रांग) (पिव्होट स्तंभातील इतर घटक 0 करण्यासाठी)

CB_i	C_j	100	80	0	0	उत्तर:	Ratio
	B.V	x_1	x_2	S_1	S_2		
100	x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	800	
80	x_2	0	1	$\frac{-1}{8}$	$\frac{3}{8}$	600	
Z_j		100	80	15	5	128000	
$Z_j - C_j$		0	0	15	5		

चरण 5: ऑप्टिमल सोलुशन तपासा Check Optimal solution):

आता सर्व Zj - Cj ≥ 0 (positive) आहेत, त्यामुळे आपल्याला ऑप्टिमल सोलुशन मिळाले आहे. .

चरण 6: ऑप्टिमल सोलुशन: (Optimal solution) :

आता $x_1 = 800$, आणि $x_2 = 600$ हे मूल्य $Z = 100x_1 + 80x_2$ मध्ये टाका

कमाल (Maximum) Z = 100(800)+80(600) =128000

दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम ऑप्टिमल सोलुशन x= 128000 आहे

उदाहरण 5.9: खालील दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम सिंप्लेक्स पद्धतीचा उपयोग करून सोडवा.

कमाल (Maximize) $\boldsymbol{Z = 6x_1 + 8x_2}$

बंधनाच्या अधीन (subject to constraint):

$$\boldsymbol{30x_1 + 20x_2 \leq 300}$$
$$\boldsymbol{5x_1 + 10x_2 \leq 110}$$
$$\boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}$$

उत्तर: चरण 1 - निर्बंधांचे स्टँडर्ड रूपात रूपांतर करा: *(* Convert Constraints into standard Form)

कमाल (Maximize) $Z = 6x_1 + 8x_2 + 0S_1 + 0S_2$

बंधनाच्या अधीन *(Subject to constraint) :* $30x_1 + 20x_2 + S_1 = 300$

$5x_1 + 10x_2 + S_2 = 110$

चरण 2- प्रारंभिक सिम्प्लेक्स टेबल (Initial Simplex Table) सिम्प्लेक्स पद्धतीचे प्रारंभिक टेबल तयार करण्यासाठी, आपल्याला दिलेल्या फंक्शन आणि निर्बंधांचा उपयोग करावा लागतो.

CB_i	C_j	6	8	0	0	उत्तर:	RHS
	B.V	x_1	x_2	S_1	S_2		
0	S_1	30	20	1	0	300	$\frac{300}{20}$
0	S_2	5	**10**	0	1	110	$\frac{110}{10}$
Z_j		0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$		-6	-8	0	0		

पहिली पुनरावृत्ती (First Iteration)

चरण 3: प्रमुख घटक ओळखा (Identify the Key Elements)

- प्रवेश करणारा व्हेरिएबल (Entering variable) : पंक्तीमधील सर्वात निगेटिव्ह मूल्य -8 आहे जे x_2 ला संबंधित आहे. म्हणून x_2 प्रवेश करतो
- सोडून जाणारा व्हेरिएबल (Leaving variable): Compute RHS / pivot column values:
  - $\frac{300}{20} = 15 \ and \ \frac{110}{10} = 11$
  - किमान गुणोत्तर = 11, म्हणून S_2 बाहेर जातो.

पिव्होट घटक (Pivot element): 10 (पिव्होट स्तंभ x_2 आणि पिव्होट पंक्ती S_2 चा छेदन बिंदू).

चरण 4: रांगेच्या ऑपरेशन्स करा (Perform Row Operations)

R_2 (नवीन रांग) → 1/10 R_1 (**जुनी रांग**) (**पिव्होट घटक** 1 **करण्यासाठी**)

R_1 (नवीन रांग) → R_1 (जुनी रांग) -20R_2 (नवीन रांग) (पिव्होट स्तंभातील इतर घटक 0 करण्यासाठी)

CB_i	C_j	6	8	0	0	उत्तर:	Ratio
	B.V	x_1	x_2	S_1	S_2		
0	s_1	**20**	0	1	-2	80	$\frac{80}{20}$
8	x_2	$\frac{1}{2}$	**1**	0	$\frac{1}{10}$	11	$\frac{11}{\frac{1}{2}}$
Z_j		4	8	0	$\frac{8}{10}$	88	
$Z_j - C_j$		-2	0	0	$\frac{8}{10}$		

चरण 5: ऑप्टिमल सोलुशन (Check Optimal solution)

आता काही Zj- Cj ≤ 0 ची मूल्ये (Negative) आहेत, त्यामुळे आपल्याला ऑप्टिमल उत्तर मिळाले नाही. म्हणून 3, 4, 5 पुन्हा चरणांची पुन्हा पुनरावृत्ती करू.

दुसरी पुनरावृत्ती (Second Iteration):

चरण 3: प्रमुख घटक ओळखा (Identify the Key Elements)

- प्रवेश करणारा व्हेरिएबल(Entering variable: पंक्तीमधील सर्वात निगेटिव्ह मूल्य -2 आहे जे x_1 ला संबंधित आहे. म्हणून, x_1 प्रवेश करतो..
- सोडून जाणारा व्हेरिएबल:(Leaving variable) RHS/ पिव्होट स्तंभाचे मूल्य गणना करा:
  किमान गुणोत्तर = 4, म्हणून S_1 बाहेर जातो.: $\frac{80}{20} = 4 \quad and \quad \frac{11}{\frac{1}{2}} = 22$
  किमान गुणोत्तर = 4 , म्हणून S_1 बाहेर जातो

पिव्होट घटक (Pivot element) : 20 (पिव्होट स्तंभ x_1 आणि पिव्होट पंक्ती S_1 चा छेदन बिंदू).

चरण 4: रांगेच्या ऑपरेशन्स करा (Perform Row Operations)

R_1 (नवीन रांग) → 1/20 R_1 (जुनी रांग) (पिव्होट घटक 1 करण्यासाठी)

R_2 (नवीन रांग) → R_2 (जुनी रांग) - (1/2) R_1 (नवीन रांग) (पिव्होट स्तंभातील इतर घटक 0 करण्यासाठी)

CB_i	C_j	100	80	0	0	उत्तर:	Ratio
	B.V	x_1	x_2	S_1	S_2		
6	x_1	1	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{-1}{10}$	4	
8	x_2	0	1	$\frac{-1}{40}$	$\frac{3}{20}$	9	
Z_j		6	8	$\frac{1}{10}$	$\frac{12}{20}$	96	
$Z_j - C_j$		0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{12}{20}$		

चरण 5: ऑप्टिमल सोलुशन तपासा Check Optimal solution):

आता सर्व Zj - Cj ≥ 0 (positive) आहेत, त्यामुळे आपल्याला ऑप्टिमल सोलुशन मिळाले आहे

चरण 6: ऑप्टिमल सोलुशन: (Optimal solution) :

आता $x_1 = 4$, आणि $x_2 = 9$ हे मूल्य $Z = 6x_1 + 8x_2$ मध्ये टाका

कमाल (Maximum) Z = 6(4)+8 (9) =96 दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम ऑप्टिमल सोलुशन x = 96 आहे.

सरावासाठी उदाहरणे (Example for Practice)

Q1. खालील दिलेले लिनियर प्रोग्रॅमिंग प्रॉब्लेम सिंप्लेक्स पद्धतीचा उपयोग करून सोडवा.

a) कमाल (Maximize) $\boldsymbol{Z} = 3x_1 + 2x_2$
   बंधनाच्या अधीन (subject to constraint):

$$x_1 + x_2 \leq 4,$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

b) कमाल (Maximize) $Z = 80x_2 + 55x_2$
   बंधनाच्या अधीन (subject to constraint):

$$4x_1 + 2x_2 \leq 40,$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 32$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

References:

1. Higher Engineering Mathematics by H. K. Dass, Er. Rajnish Verma [S. Chआणि Technical, ISBN: 9788121938907]
2. Higher Engineering Mathematics by Grewal B. S. [Tata McGraw Hill Education, New Delhi, ISBN : 9789386173522]
3. Engineering Mathematics by A. C. Shrivastava, P. K. Shrivastava [PHI Learning, New Delhi, ISBN:9788120342934]

HEAD OFFICE

Secretary,
Maharashtra State Board of Technical Education
49, Kherwadi, Bandra (East), Mumbai - 400 051
Maharashtra (INDIA)
Tel: (022)26471255 (5 -lines)
Fax: 022 - 26473980
Email: -secretary@msbte.com
Web -www.msbte.org.in

REGIONAL OFFICES:

MUMBAI

Deputy Secretary (T),
Mumbai Sub-region,
2nd Floor, Govt. Polytechnic Building,
49, Kherwadi, Bandra (East)
Mumbai - 400 051
Phone: 022-26473253 / 54
Email: rbtemumbai@msbte.com

PUNE

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education,
Regional Office,
412-E, Bahirat Patil Chowk,
Shivaji Nagar, Pune
Phone: 020-25656994 / 25660319
Fax: 020-25656994
Email: rbtepn@msbte.com

NAGPUR

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education
Regional Office,
Mangalwari Bazar, Sadar, Nagpur - 440 001
Phone: 0712-2564836 / 2562223
Fax: 0712-2560350
Email: rbteng@msbte.com

AURANGABAD

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education,
Regional Office,
Osmanpura, Aurangabad -431 001.
Phone: 0240-2334025 / 2331273
Fax: 0240-2349669
Email: rbteau@msbte.com