महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई
(स्वायत्त)(ISO 9001:2015) (ISO/IECb27001:2013)

अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञान पदविका

शिक्षण पुस्तिका
(Learning Material)

सामग्रीची ताकद

STRENGTH OF MATERIALS

(313308)

स्थापत्य अभियांत्रिकी गट

(Civil Engineering Group)

मराठी-इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम
(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानातील तृतीय सत्र पदविका)

शिक्षण पुस्तिका
(Learning Material)

सामग्रीची ताकद

STRENGTH OF MATERIAL (313308)

स्थापत्य अभियांत्रिकी गट

(AE/ AL/ CE/ CR/ CS/ LE/ ME/ PG)

मराठी–इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम

(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानातील तृतीय सत्र पदविका)

महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ , मुंबई

(स्वायत्त) (ISO 9001:2015)(ISO/IEC 27001:2013)

मार्गदर्शक

श्री. राजेश त्र्यंबकराव आघाव
विभागप्रमुख - उपयोजित यांत्रिकी विभाग

विषय तज्ञ

श्री. राजेंद्र हौशीराम गोरे
अधिव्याख्याता, स्थापत्य अभियांत्रिकी

सौ. अमृता सुनील शेटे (गोसावी)
अधिव्याख्याता, स्थापत्य अभियांत्रिकी

श्री. साधू बाजीराव नागरगोजे
अधिव्याख्याता, स्थापत्य अभियांत्रिकी

समीक्षक

श्री. चेतन भास्कर पगार
अधिव्याख्याता, स्थापत्य अभियांत्रिकी

श्री .दिपक बाळासाहेब पवार
विभाग प्रमुख ,स्थापत्य अभियांत्रिकी

मुख्य समन्वयक

डॉ. गणेश बळीराम डोंगरे
प्राचार्य, CSMSS कॉलेज ऑफ पॉलिटेक्निक,
छत्रपती संभाजीनगर

संस्था समन्वयक

श्री. महेश रामेशराव मोरे
विभाग प्रमुख, स्थापत्य अभियांत्रिकी

प्रकल्प संस्था

CSMSS कॉलेज ऑफ पॉलिटेक्निक, छत्रपती संभाजीनगर

महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ

(स्वायत्त) (ISO: ९००१:२०१५) (ISO/IES: २७००१-२०१३)

शासकीय तंत्रनिकेतन इमारत, चौथा मजला, ४९, खेरवाडी, बांद्रा (पूर्व), मुंबई - ४०० ०५१.

दूरध्वनी क्र.: ०२२-६२५४२१७० / १६१

Email : director@msbte.com Web : www.msbte.org.in

प्रास्ताविक

महाराष्ट्र राज्यातील पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षणामध्ये विद्यार्थ्यांचे रोजगार कौशल्य विकसित करून विद्यार्थ्यांचा सर्वांगीण विकास घडवून आणण्याकरिता महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ कटिबद्ध आहे. उद्योगधंद्यातील बदलत्या तंत्रज्ञानाशी संबंधित गरजा लक्षात घेऊन महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाकडून पदविका अभ्यासक्रम वेळोवेळी अद्यावत करण्यात येतो . अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रम शिकत असतांना संकल्पनात्मक ज्ञान, सुसंगत संदर्भ, प्रश्न विचारणे, विश्वसनिय पुरावे, कारणमीमांसा आणि सुस्पष्ट निकष यांचा वापर करून अर्थाची उकल करण्याची, विश्लेषण व मूल्यमापन करण्याची तसेच तर्काने अनुमान काढण्याची क्षमता म्हणजेच चिकित्सक विचार विद्यार्थ्यांमध्ये अधिक दृढ होतील असा मला विश्वास आहे. जेव्हा विद्यार्थी ज्ञान मिळवण्याच्या माध्यमाशी पूर्णपणे परिचित आणि सोयीस्कर असतात, तेव्हा त्यांच्यासाठी वर्गातील चर्चेत भाग घेणे सोपे होते, संकल्पनात्मक व सैद्धांतिक बाबींचे आकलन परिपूर्ण होते, संज्ञानात्मक क्षमता सुधारते आणि त्यांचा आत्मविश्वास देखील वाढतो या सर्व गोष्टींचा विचार करून मंडळाकडून शैक्षणिक सामुग्रीची निर्मिती करण्यात आलेली आहे . भारत देश हा खेड्यापाड्यातून विकसित झालेला देश असून ग्रामीण भागातील विद्यार्थ्यांना तांत्रिक शिक्षण घेतांना भाषेचा अडसर न येता तांत्रिक बाबींचा आशय समजून घेणे शक्य होईल या दृष्टिकोनातून महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाने पदविका स्तरावरील तांत्रिक शिक्षणाकरीता विद्यार्थ्यांना मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय शैक्षणिक वर्ष २०२१-२२ पासून उपलब्ध करून दिलेला आहे .

राष्ट्रीय शैक्षणिक धोरण-२०२० प्रादेशिक भाषेतील शिक्षणास प्रोत्साहन देते, ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना तांत्रिक अभ्यासक्रमांसाठी प्रादेशिक भाषांतुन शिक्षणाचे माध्यम निवडता येते. सदर धोरणामुळे प्रादेशिक भाषांमध्ये तांत्रिक सामग्री आणि अभ्यास सामग्रीचा विकास आणि भाषांतर निर्माण करण्याची आवश्यकता आहे . त्यास अनुसरून मंडळाने मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय द्वितीय व तृतीय वर्षाकरिताही उपलब्ध करून देण्यात आला आहे. तसेच त्याकरिताची शैक्षणिक सामग्रीही संबंधीत भागधारकरांना उपलब्ध करून देण्यात येत आहे.

पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षण अधिक दर्जेदार करण्यासाठी महाराष्ट्रातील अनुभवी व तज्ञ अध्यापकांनी व्यवहारिक मराठी भाषा व इंग्रजी भाषेतील तांत्रिक शब्दावली यांचा वापर करून मराठी - इंग्रजी भाषेचा सुवर्णमध्य साधण्याचा प्रयत्न केलेला आहे. मंडळाच्या स्तरावर गठीत सुकाणू समितीमार्फत सदर शैक्षणिक सामुग्रीचा दर्जा, तसेच इतर बाबींची तपासणी करण्यात आलेली आहे. त्यामुळे सदर शैक्षणिक सामुग्री अधिक सम्पन्न झालेली असून विद्यार्थी त्यांच्या व्यक्तिमत्त्वाचा सुसंवादी आणि सर्वांगीण विकास साधतील. परिणामतः विश्वस्तरीय मनुष्यबळाच्या गरजा पूर्ण करण्यात महाराष्ट्र राज्य अग्रेसर राहील व पर्यायाने राष्ट्रनिर्मिती करीता निश्चितच हातभार लागेल , असा मला विश्वास आहे.

अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रमातील प्रमुख विषयांची मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक शैक्षणिक सामुग्री बनविण्यासाठी अध्यापक व सुकाणू समितीचे सदस्य यांनी दर्शविलेले समर्पण व वचनबद्धता कौतुकास पात्र आहे , या सर्वांचे मी मनः पूवक अभिनंदन करतो !

(प्रमोद नाईक)
संचालक
म. रा. तंत्र शिक्षण मंडळ, मुंबई.

अनुक्रमणिका

अ. क्र	युनिटचे नाव	पान क्र
1.	जडत्वाचे परिबल **(Moment Of Inertia)**	**01**
2.	साधे ताण, ताण आणि लवचिक स्थिरांक **(Simple stress, strain and elastic constant)**	**59**
3.	शिअर फोर्स आणि बेंडिंग मोमेंट **(Shear force and Bending moment)**	**101**
4.	बीम मधील झुकणे आणि कातरणे प्रतिबल **(Bending and Shear stresses in beams)**	**163**
5.	थेट आणि झुकणारे प्रतिबल **(Direct and Bending Stresses)**	**183**

युनिट 1: जडत्वाचे परिबल

Moment of Inertia

- **विषय निष्पत्ती (Course Outcome):-**दिलेल्या वस्तूसाठी संबंधित सूत्रे आणि पद्धती वापरून जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) ची गणना करा.
- **सिद्धांत शिकण्याचे परिणाम (Theory Learning Outcome):-**

TLO. 1 दिलेल्या क्षेत्रासाठी क्षेत्राचा मध्यांक (Centroid), जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) आणि रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration) ची गणना करा.

TLO. 2 समांतर अक्ष प्रमेय (Parallel Axis Theorem) आणि लंब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) स्पष्ट करा.

TLO. 3 दिलेल्या मानक (Standard) घन आकार (Solid Shape) आणि पोकळ आकार (Hollow Shape) असलेल्या विभागांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) काढा.

TLO. 4 दिलेल्या विभागांसाठी सेक्शन मोडूलस (Section Modulus) काढा.

TLO. 5 दिलेल्या संमिश्र आकृत्यांसाठी (Composite Plane Figure) जसे की, I, C, T & L विभागांसाठी (Sections) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) काढा.

TLO. 6 बिल्ट-अप विभागासाठी (Built-up Section) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) समजून घ्या.

1.1.1 जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia):- जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) हे वस्तूच्या (body) क्षेत्रफळाचे दुसरे परिबल आहे, जे वस्तूच्या (body) क्षेत्रफळ (Area) आणि ज्या अक्षावर जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) काढत आहे त्या अक्षापासून तर मध्यकेंद्राच्या (Centroid) बिंदुपर्यंत अंतरचा वर्ग (Square) यांचा गुणाकार (Product) म्हणजे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) होय.

किंवा (OR)

जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) हा कोणत्याही अक्षावर त्या वस्तूच्या (body) प्राथमिक क्षेत्रांच्या (Elementry Area) दोनदा क्षेत्रफळांच्या परिबलांच्या (Second Moment of Area) बेरजे इतका (Sum) असतो.

जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) हा क्षेत्रफळाचा गुणधर्म आहे जो आपल्याला त्या क्षेत्रफळाचे बिंदु अनियंत्रित अक्षासोबत (ArbitraryAxis) कश्या प्रकारे पसरलेले आहे हे दाखवतो.

जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) हा 'I'या आद्य अक्षरांनी दर्शवतात.

जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) चे एकक: mm^4, cm^4, m^4.

समजा, एक अनियमित आकार (Irregular Shape) असलेला खाली दाखवलेल्या प्रमाणे विभाग लक्ष्यात घेऊयात , ज्याचा

A = कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ (Cross Sectinal Area) आहे mm^2 मध्ये आहे.

X, Y = हे क्षेत्रफळाच्या मध्यांतर पासून ते लक्ष्यात घेतलेल्या अक्षा पर्यंतचे अंतर आहे.

I= जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

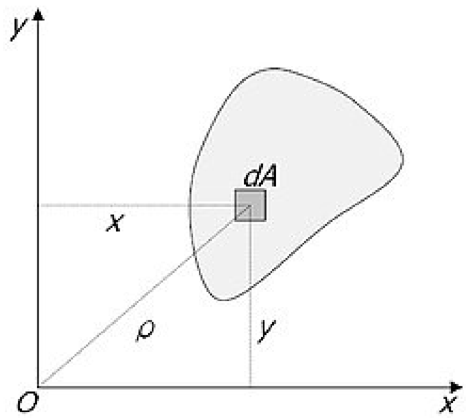


Fig. 1.1 जडत्वाचे परिबलाची संकल्पना (Concept of Moment of Inertia)

म्हणून,
आडव्या (Horizontal) X-X अक्षा सोबतजडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)
$I_{xx} = \Sigma A.Y^2$
तसेच, उभ्या (Vertical) Y-Y अक्षा सोबत जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)
$I_{YY} = \Sigma A.X^2$

1.1.2 रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration):- हे एक अंतर आहे,जेव्हा आपण क्षेत्रफळ हे एका बिंदूवर केंद्रित करतो आणि आपल्याला सारखेच जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) भेटते ते अंतर म्हणजे रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration) होय.
रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration) ला 'k' किंवा 'r' या आद्यअक्षरांनी दर्शवतात.
रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration) चे एकक: mm, cm, m.
गणितानुसार,

$I = A.k^2$

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

या ठिकाणी
I= जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)
A = कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ (Cross Sectional Area)
K = रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius of Gyration)

1.1.3 सेक्शन मोडूलस (Section Modulus):-हे छेद भागाचे तटस्थ अक्षापाशी (Neutral Axis) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) आणि तटस्थ अक्ष (Neutral Axis) व टोकाकडील धागा (Extremelayer) यांच्यातील अंतराचे (y_{max}) गुणोत्तर म्हणजे सेक्शन मोडूलस (Section Modulus).
सेक्शन मोडूलस (Section Modulus) ला 'Z' या आद्यअक्षरांनी दर्शवतात.
सेक्शन मोडूलस (Section Modulus) चे एकक: mm^3, cm^3, m^3.
गणितानुसार,

$$Z = \frac{I}{y_{max}}$$

या ठिकाणी

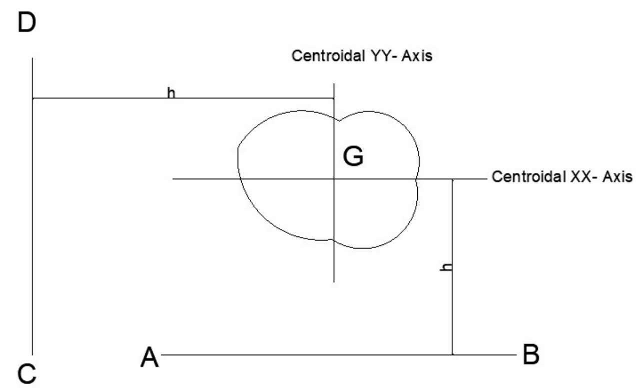
Z= सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

I= जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

y_{max} = तटस्थ अक्ष (NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extremelayer) यांच्यातील अंतर

1.2.1 समांतर अक्षाचे प्रमेय (Parallel Axis Theorem):-समांतर अक्षाचे प्रमेय असे सांगते की, कोणत्याही वस्तूचे समांतर अक्षाला जडत्वाचे परिबल हे त्या वस्तूच्या क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या समांतर अक्षाच्या जडत्वाचे परिबल अधिक क्षेत्रफळाचा आणि त्या समांतर अक्षांमधील लंब अंतराचा वर्ग यांचा गुणाकार हे बरोबरीचे असते.

म्हणजेच,



$I_{AB}=I_G + A.h^2$

या ठिकाणी

I_{AB} = AB या समांतर अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_G = I_{XX}$ = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

A = कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ (Cross Sectinal Area)

h =AB आणि क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या अक्षांमधील अंतर

$I_{CD}=I_G + A.h^2$

या ठिकाणी

I_{AB} = AB या समांतर अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

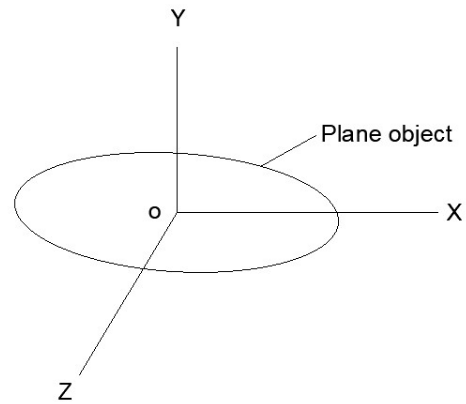
$I_G = I_{YY}$= क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

A = कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ (Cross Sectinal Area)

h =CD आणि क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या अक्षांमधील अंतर

1.2.2 लंब अक्षाचे प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem):-

कोणत्याही समतल वस्तूसाठी किंवा भागासाठी वस्तूच्या पृष्ठभागाला काटकोनात असणाऱ्या अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) हे या पृष्ठभागाला काटकोनात असलेल्या अक्षाला छेदणाऱ्या दोन काटकोनात असलेल्या अक्षांच्या जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) यांच्या बेरजे इतका असतो.



$I_{ZZ}=I_{XX}+I_{YY}$

I_{ZZ} = Z-Z अक्षा सोबत जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

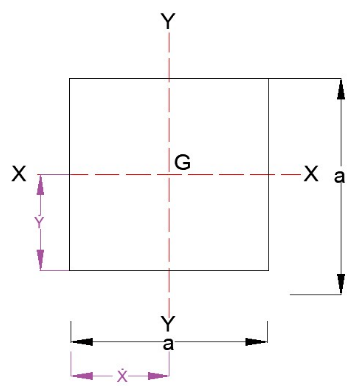
I_{XX} = X-X अक्षा सोबत जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

I_{YY} = Y-Y अक्षा सोबत जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

1.3 काही मानक आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia of standard basic figures):-

- **चौरस (Square):-**

समजा या ठिकाणी चौरस (Square) ज्याची बाजू (Side) 'a' आहे



क्षेत्रफळ (Area) = axa = a^2

$\bar{X}$ =मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या Y-Y अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{X}$ =a/2

$\bar{Y}$ =मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या X-X अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{Y}$ =a/2

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

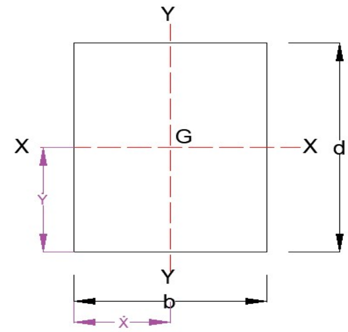
$$I_{XX} = \frac{a^4}{12}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याY-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{a^4}{12}$$

- **आयात (Rectangle):-**

समजा या ठिकाणी आयात (Rectangle) ज्याची रुंदी (Width) 'b' आहे व ऊंची (Height) 'd' आहे



क्षेत्रफळ(Area) = bxd

$\bar{X}$=मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या Y-Y अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{X}$=b/2

$\bar{Y}$=मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या X-X अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{Y}$=d/2

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

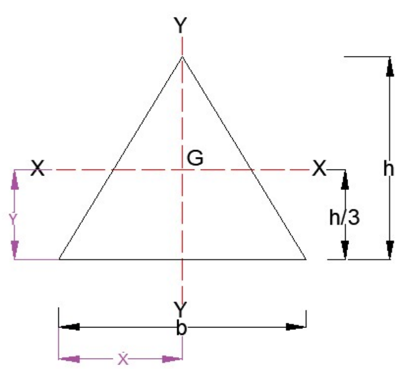
$$I_{XX} = \frac{bd^3}{12}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{db^3}{12}$$

- **समभुज त्रिकोण (Equilateral Triangle):-**

समजा या ठिकाणी समभुज त्रिकोण (Equilateral Triangle) ज्याचा पाया (Base) 'b' आहे व ऊंची (Height) 'h' आहे.



क्षेत्रफळ(Area) = $A = \frac{1}{2}bXh$

$\bar{X}$=मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या Y-Y अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{X}$=b/2

$\bar{Y}$=मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या X-X अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{Y}$=h/3

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

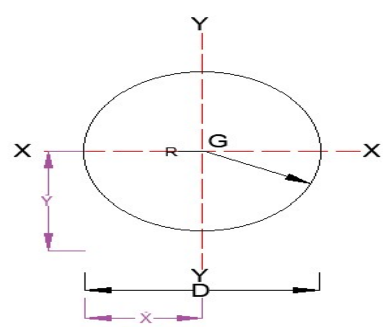
$$I_{XX} = \frac{bh^3}{36}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{hb^3}{48}$$

- **वर्तुळ (Circle):-**

समजा या ठिकाणी एक वर्तुळ (Circle) ज्याची त्रिज्या (Radius) 'R' आणि व्यास (Diameter)'D' आहे.



क्षेत्रफळ(Area) = $A = \frac{\pi}{4}D^2$किंवा $A = \pi R^2$

$\bar{X}$=मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या Y-Yअक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{X}$=D/2 = R

$\bar{Y}$=मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या X-X अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{Y}$=D/2 = R

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

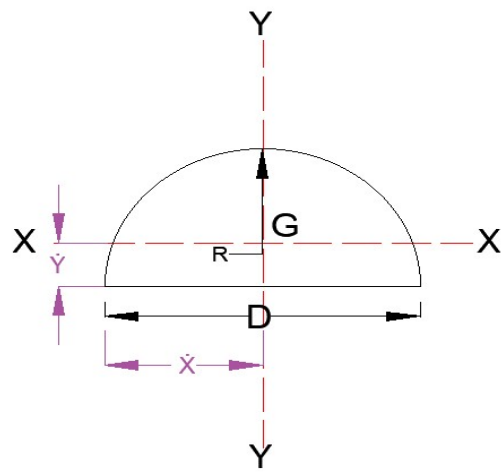
$$I_{XX} = \frac{\pi}{64}D^4$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{\pi}{64}D^4$$

- **अर्धवर्तुळ (SemiCircle):-**

समजा या ठिकाणी एक अर्धवर्तुळ (SemiCircle) ज्याची त्रिज्या (Radius) 'R' आणि व्यास (Diameter) 'D' आहे.



क्षेत्रफळ(Area) = $A = \frac{\pi}{8}D^2$किंवा $A = \frac{\pi}{2}R^2$

$\bar{X}$=मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या Y-Y अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{X}$=D/2 = R

$\bar{Y}$=मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या X-X अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{Y} = \frac{4R}{3\pi}$

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

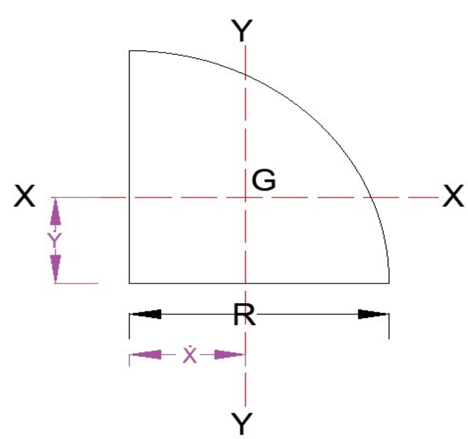
$I_{XX} = 0.11R^4$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = \frac{\pi}{128}D^4$ किंवा $\frac{\pi}{8}R^4$

- **चतुर्थांश वर्तुळ (Quarter Circle):-**

समजा या ठिकाणी एक चतुर्थांश वर्तुळ (QuarterCircle) ज्याची त्रिज्या (Radius) ‘R’ आहे.



क्षेत्रफळ (Area) = $A = \frac{\pi}{16}D^2$ किंवा $A = \frac{\pi}{4}R^2$

$\bar{X}$ =मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या Y-Y अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$$\bar{X} = \frac{4R}{3\pi}$$

$\bar{Y}$ =मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्याX-X अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$$\bar{Y} = \frac{4R}{3\pi}$$

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

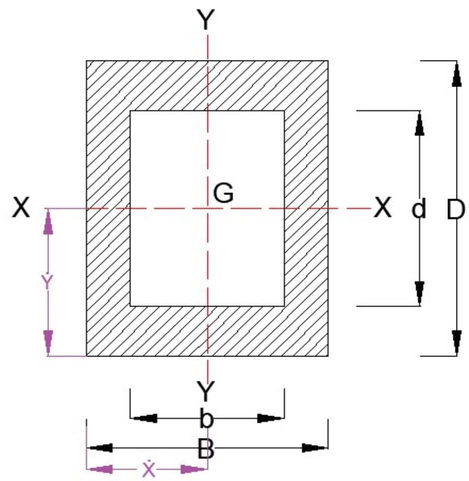
$$I_{XX} = 0.055R^4$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = 0.055R^4$$

- **पोकळ आयात (Hollow Rectangle):-**

समजा या ठिकाणी पोकळ आयात (Hollow Rectangle) ज्याची बाहेरील रुंदी (External Width) 'B' आणि आतील रुंदी (Internal Width) 'b' आहे व बाहेरील ऊंची (External Height) 'D'आणि आतील ऊंची (Internal Height) 'd' आहे



क्षेत्रफळ(Area) = (BxD)-(bxd)

$\bar{X}$ =मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्याY-Y अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{X}$=B/2

$\bar{Y}$ =मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या X-X अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{Y}$=D/2

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

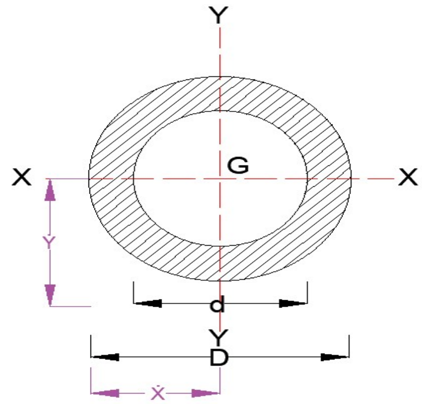
$$I_{XX} = \frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{DB^3}{12} - \frac{db^3}{12}$$

- **पोकळ वर्तुळ (Hollow Circle):-**

समजा या ठिकाणी एक पोकळ वर्तुळ (Hollow Circle) ज्याचा बाहेरील व्यास (External Diameter) 'D' आणि आतील व्यास (Internal Diameter) 'd' आहे.



क्षेत्रफळ(Area) = $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$

$\bar{X}$= मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्याY-Y अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{X}$=D/2

$\bar{Y}$= मध्यबिंदुवरून जाणाऱ्या X-X अक्ष आणि टोकाकडील धागा यांच्यातील अंतर

$\bar{Y}$=D/2

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

1.3.1 काही मानक आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधणारे उदाहरणे

उदा. क्र. 1 एक आयताकृती लाकडाचा ठोकळा आहे, त्याची रुंदी (Width) 100 मी. मी. व खोली (Depth) 200 मी. मी. आहे, त्या ठोकळ्याच्या मध्यबिंदूतून (Centroid) जाणाऱ्या आडव्या (Horizontal) आणि उभ्या (Vertical) अक्षांना (Axis) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) आणि रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration) शोधा.

उत्तर :- दिलेली माहिती

आयताकृती लाकडी ठोकळा

रुंदी (Width) = b=100 मी. मी.

खोली (Depth) = d= 200 मी. मी.

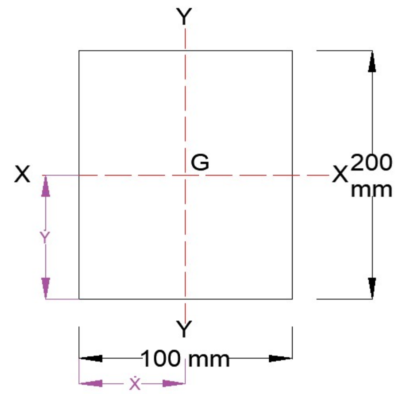
आपल्याला शोधायचे आहे,

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)= I_{XX}=?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)= I_{YY} =?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)= K_{XX}=?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)= K_{YY}=?



पहिल्यांदा जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia) शोधूया**,**
आपल्याला माहिती आहे की आयताकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)
I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याX-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{bd^3}{12}$$

$$I_{XX} = \frac{100 \times 200^3}{12}$$

$$I_{XX} = 6.667 \times 10^7 mm^4$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{db^3}{12}$$

$$I_{YY} = \frac{200 \times 100^3}{12}$$

$$I_{YY} = 1.667 \times 10^7 mm^4$$

आता रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius of Gyration) शोधूया,
क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)

$$K_{XX} = \sqrt{\frac{I_{XX}}{A}}$$

या ठिकाणी
K = रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius of Gyration)
$I_{XX} = 6.667 \times 10^7 mm^4$
A = कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ (Cross Sectional Area)
A=b x d =100x200 **=** $20 \times 10^3 mm^2$

$$K_{XX} = \sqrt{\frac{6.667 \times 10^7}{20 \times 10^3}}$$

$$K_{XX} = 57.7 \quad mm$$

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)

$$K_{YY} = \sqrt{\frac{I_{YY}}{\text{A}}}$$

$$K_{YY} = \sqrt{\frac{1.667 \times 10^7}{20 \times 10^3}}$$

$$K_{YY} = 28.86 \quad mm$$

उदा. क्र. 2 एका 100 मी. मी व्यास (Diameter) असलेल्या वर्तुळ (Circle) आकृतीसाठी मध्यबिंदुतून (Centroid) जाणाऱ्या आडव्या (Horizontal) आणि उभ्या (Vertical) अक्षांना (Axis) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) आणि रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration) शोधा.

उत्तर :- दिलेली माहिती

वर्तुळ (Circle) आकृती

व्यास (Diameter) = D= 100 मी. मी.

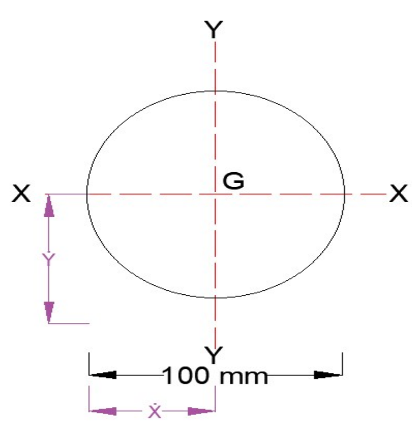
आपल्याला शोधायचे आहे,

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)= I_{XX}=?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)= I_{YY} =?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)= K_{XX}=?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)= K_{YY}=?



पहिल्यांदा जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधूया,

आपल्याला माहितीआहे की वर्तुळ (Circle) आकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{\pi}{64} D^4$$

$$I_{XX} = \frac{\pi}{64} 100^4$$

$$I_{XX} = 4.908 \times 10^6 mm^4$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याY-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{\pi}{64} 100^4$$

$$I_{YY} = 4.908 \times 10^6 mm^4$$

आता रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius of Gyration) शोधूया,

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)

$$K_{XX} = \sqrt{\frac{I_{XX}}{A}}$$

या ठिकाणी

K **=** रेडिअस ऑफ गायरेशन **(**Radius of Gyration)

$$I_{XX} = 4.908 \times 10^6 mm^4$$

A **=** कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ **(**Cross Sectional Area)

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} 100^2$$

A**=** $7.8539 \times 10^3 mm^2$

$$K_{XX} = \sqrt{\frac{4.908 \times 10^6}{7.8539 \times 10^3}}$$

$$K_{XX} = 24.998 \quad mm$$

$$K_{XX} = 25 \quad mm$$

या ठिकाणी $I_{XX} = I_{YY}$ आहे, म्हणून $K_{XX} = K_{YY}$

$$K_{YY} = 25 \quad mm$$

उदा. क्र. 3 एका 100 मी. मी व्यास (Diameter) असलेल्या अर्धवर्तुळ (Semi-Circle) आकृतीसाठी मध्यबिंदुतून (Centroid) जाणाऱ्या आडव्या (Horizontal) आणि उभ्या (Vertical) अक्षांना (Axis) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) आणि रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration) शोधा.

उत्तर :- दिलेली माहिती

अर्धवर्तुळ (Semi-Circle) आकृती

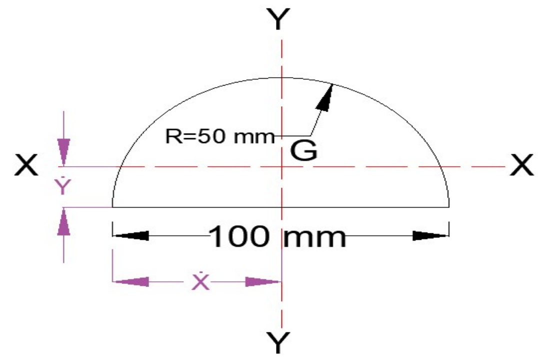
व्यास (Diameter) = D= 100 मी. मी.

त्रिज्या (Radius) = R = D/2 =100/2= 50 मी. मी.

आपल्याला शोधायचे आहे,

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{XX}=?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{YY} =?
क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)= K_{XX}=?
क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)= K_{YY}=?



पहिल्यांदा जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)शोधूया**,**
आपल्याला माहिती आहे की वर्तुळ (Circle) आकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)
I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याX-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{XX} = 0.11R^4$

$I_{XX} = 0.11 \times 50^4$

$I_{XX} = 687.5 \times 10^3 mm^4$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याY-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{YY} = \frac{\pi}{8} R^4$

$I_{YY} = \frac{\pi}{8} 50^4$

$I_{YY} = 2.454 \times 10^6 mm^4$

आता रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius of Gyration)शोधूया,
क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याX-X अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)

$$K_{XX} = \sqrt{\frac{I_{XX}}{A}}$$

या ठिकाणी
K **=** रेडिअस ऑफ गायरेशन **(**Radius of Gyration)

$I_{XX} = 687.5 \times 10^3 mm^4$

A **=** कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ **(**Cross Sectional Area)

$A = \frac{\pi}{8} D^2 = \frac{\pi}{8} 100^2$

A**=** $3.926 \times 10^3 mm^2$

$$K_{XX} = \sqrt{\frac{687.5 \times 10^3}{3.926 \times 10^3}}$$

$K_{XX} = 13.23 \quad mm$

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला रेडिअस ऑफ गायरेशन (Radius Of Gyration)

$$K_{YY} = \sqrt{\frac{I_{YY}}{\text{A}}}$$

या ठिकाणी

K **=** रेडिअस ऑफ गायरेशन **(**Radius of Gyration)

$I_{YY} = 2.454 \times 10^6 mm^4$

A **=** कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ **(**Cross Sectional Area)

$A = \frac{\pi}{8} D^2 = \frac{\pi}{8} 100^2$

A**=** $3.926 \times 10^3 mm^2$

$$K_{YY} = \sqrt{\frac{2.454 \times 10^6}{3.926 \times 10^3}}$$

$K_{YY} = 25 \quad mm$

उदा. क्र. 4 एका 100 मी. मी त्रिज्या (Radius) असलेल्या चतुर्थांश वर्तुळ (Quarter-Circle) आकृतीसाठी मध्यबिंदुतून (Centroid) जाणाऱ्या आडव्या (Horizontal) आणि उभ्या (Vertical) अक्षांना (Axis) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

उत्तर :- दिलेली माहिती

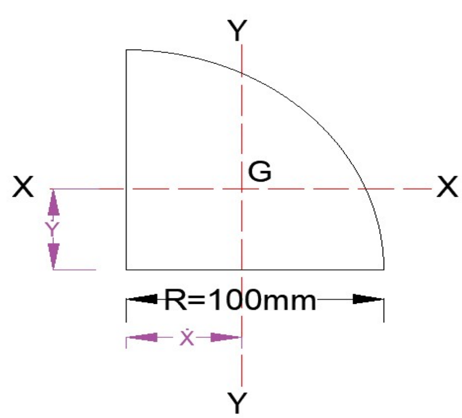
चतुर्थांश वर्तुळ (Quarter-Circle) आकृती

त्रिज्या (Radius)= R= 100 मी. मी.

आपल्याला शोधायचे आहे,

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{XX}=?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{YY} =?



आपल्याला माहिती आहे की वर्तुळ (Circle) आकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{XX} = 0.055R^4$

$I_{XX} = 0.055 \times 100^4$

$I_{XX} = 5.5 \times 10^6 mm^4$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याY-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{YY} = 0.055R^4$

$I_{YY} = 0.055 \times 100^4$

$I_{YY} = 5.5 \times 10^6 mm^4$

उदा. क्र. 5 एक पोकळ आयात (Hollow Rectangle) आहे**,** ज्याची बाहेरील रुंदी (ExternalWidth)'100mm'आणि आतील रुंदी (Internal Width) '75mm' आहे व बाहेरील ऊंची (External Height) '200'mm आणि आतील ऊंची (Internal Height) '150'mm आहे. दिलेल्या आकृतीसाठी मध्यबिंदुतून (Centroid) जाणाऱ्या आडव्या (Horizontal) आणि उभ्या (Vertical) अक्षांना (Axis) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

उत्तर :- दिलेली माहिती

पोकळ आयात (Hollow Rectangle)आकृती

बाहेरील रुंदी (ExternalWidth) **=** B=100 mm

आतील रुंदी(InternalWidth) **=** b=75 mm

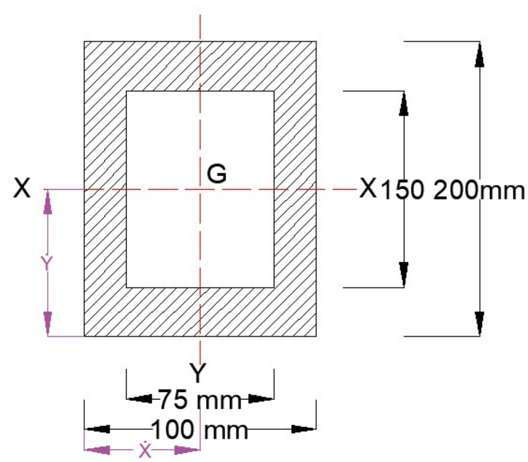
बाहेरील ऊंची (External Height) **=** D=200 mm

आतील ऊंची (Internal Height) **=** d=150 mm

आपल्याला शोधायचे आहे,

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{XX}=?

क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{YY} =?



आपल्याला माहिती आहे की पोकळ आयात (Hollow Rectangle) आकृतीसाठी

क्षेत्रफळ (Area) **=** (BxD)-(bxd) **=** (100x200)-(75x150)

क्षेत्रफळ (Area) =$8750mm^2$

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12}$$

$$I_{XX} = \frac{100 \times 200^3}{12} - \frac{75 \times 150^3}{12}$$

$$I_{XX} = (66.667 \times 10^6) - (21.093 \times 10^6)mm^4$$

$$I_{XX} = 45.574 \ \times 10^6 mm^4$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{DB^3}{12} - \frac{db^3}{12}$$

$$I_{YY} = \frac{200 \times 100^3}{12} - \frac{150 \times 75^3}{12}$$

$$I_{XX} = (16.667 \times 10^6) - (5.273 \times 10^6)mm^4$$

$$I_{XX} = 11.394 \ \times 10^6 mm^4$$

1.3.2 समांतर अक्षाचे प्रमेय (Parallel Axis Theorem) वापरुन मानक आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधणारे उदाहरणे

उदा. क्र. 1 एक आयताकृती लाकडाचा ठोकळा आहे, त्याची रुंदी (Width)'b' मी. मी. व खोली (Depth) 'd' मी. मी. आहे, त्या ठोकळ्याच्या पाया AB (Base) मधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

उत्तर :- दिलेली माहिती

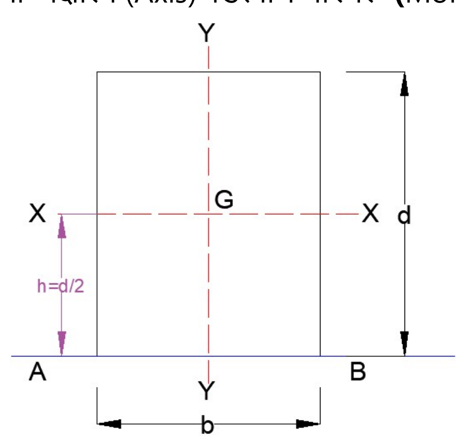
आयताकृती लाकडी ठोकळा

रुंदी (Width) = b

खोली (Depth) = d

आपल्याला शोधायचे आहे,

पाया AB (Base) मधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis)जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{AB}=?



आपल्याला माहिती आहे समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार (Parallel Axis Thorem) समांतर AB अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)**,**

$I_{AB}=I_G + A.\ h^2$

या ठिकाणी

$I_G = I_{XX}$------------------ कारण AB हा अक्ष मध्यबिंदूच्या X-X या अक्षाला समांतर आहे.

आपल्याला माहिती आहे की क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला आयताकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_G = I_{XX} = \frac{bd^3}{12}$$

तसेच

A **=** कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ **(**Cross Sectinal Area)

$A = \mathrm{b} \times d \quad mm^2$

h **=**ABआणि क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या अक्षांमधील (Centroidal Axis) अंतर

h **=** d/2

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A.\ h^2$

$$I_{AB} = \frac{bd^3}{12} + \ (\mathrm{b} \times d \times (\frac{d}{2})^2$$

$$I_{AB} = \frac{bd^3}{12} + \frac{bd^3}{4}$$

$$I_{AB} = \frac{bd^3}{3} \quad mm^4$$

उदा. क्र. 2 एक आयताकृती लाकडाचा ठोकळा आहे, त्याची रुंदी (Width) 100 मी. मी. व खोली (Depth) 200 मी. मी. आहे, त्या ठोकळ्याच्या पाया AB (Base) मधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis)जडत्वाचे परिबल(Moment Of Inertia) शोधा.

उत्तर :- दिलेली माहिती

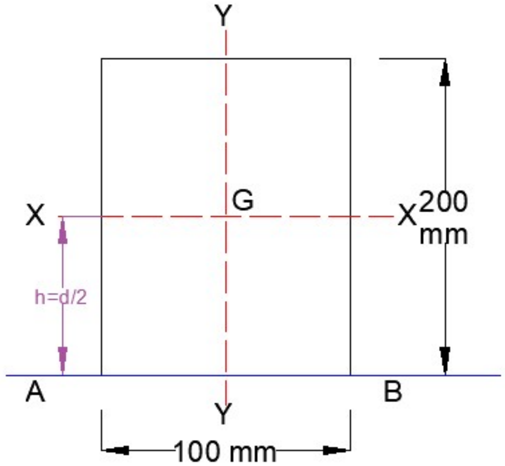
आयताकृती लाकडी ठोकळा

रुंदी (Width) = b=100 मी. मी.

खोली (Depth) = d= 200 मी. मी.

आपल्याला शोधायचे आहे,

पाया AB (Base) मधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{AB}=?



आपल्याला माहिती आहे समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार (Parallel Axis Thorem) समांतर ABअक्षाला जडत्वाचे परिबल(Moment Of Inertia),

$I_{AB}=I_G + A. h^2$

या ठिकाणी

$I_G = I_{XX}$------------------ कारण ABहा अक्ष मध्यबिंदूच्या X-Xया अक्षाला समांतर आहे.

आपल्याला माहिती आहे की क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याX-X अक्षाला आयताकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल(Moment Of Inertia)

$$I_G = I_{XX} = \frac{bd^3}{12}$$

$$I_G = I_{XX} = \frac{100 \times 200^3}{12}$$

$$I_G = I_{XX} = 6.667 \times 10^7 mm^4$$

तसेच

A = कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ (Cross Sectional Area) = B×D = 100×200

$A = 20 \times 10^3 mm^2$

h = AB आणि क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या अक्षांमधील (Centroidal Axis) अंतर

h = d/2

h = 200/2

h = 100mm

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A. h^2$

$I_{AB}=6.667 \times 10^7 + (20 \times 10^3 \times 100^2)$

$I_{AB}=266.67 \times 10^6 \quad mm^4$

उदा. क्र. 3 एक समभुज त्रिकोण (Equilateral Triangle) आहे, त्याचा पाया (Base)'b' आहे व ऊंची (Height)'h' आहे , त्या त्रिकोणाच्या पाया AB (Base) मधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

उत्तर:- दिलेली माहिती

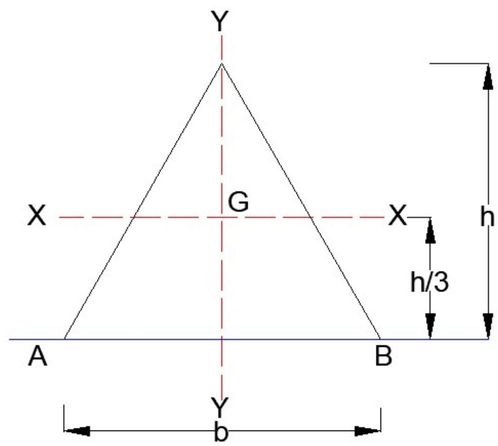
समभुज त्रिकोण (Equilateral Triangle)

पाया (Base)= b

ऊंची(Height)=h

आपल्याला शोधायचे आहे,

पाया AB (Base) मधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल(Moment Of Inertia)= I_{AB}=?



आपल्याला माहिती आहे समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार (Parallel Axis Thorem) समांतर AB अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia),

$I_{AB}=I_G + A.\, h^2$

या ठिकाणी

$I_G = I_{XX}$------------------ कारण AB हा अक्ष मध्यबिंदूच्या X-X या अक्षाला समांतर आहे.

आपल्याला माहिती आहे की क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला आयताकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल(Moment Of Inertia)

$$I_G = I_{XX} = \frac{bh^3}{36}$$

तसेच

A = कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ (Cross Sectional Area)

$$A = \frac{1}{2} bXh \quad mm^2$$

h =AB आणि क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या अक्षांमधील (Centroidal Axis) अंतर

h = h/3

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A.\ h^2$

$$I_{AB} = \frac{bh^3}{36} + [\frac{1}{2}bXh \times (\frac{h}{3})^2]$$

$$I_{AB} = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18}$$

$$I_{AB} = \frac{bh^3}{12}$$

उदा. क्र. 4 एक समभुज त्रिकोण (Equilateral Triangle) आहे, त्याचा पाया (Base) 'b' आहे व ऊंची (Height) 'h' आहे , त्या त्रिकोणाच्या शिखरामधून CD (Apex) जाणाऱ्या अक्षाला (Axis)जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

उत्तर:- दिलेली माहिती

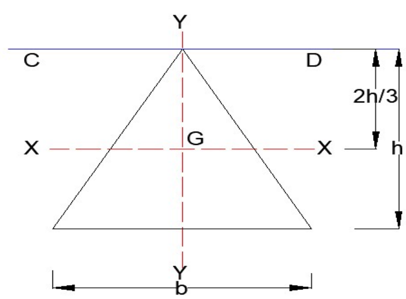
समभुज त्रिकोण (Equilateral Triangle)

पाया (Base)= b

ऊंची(Height)**=**h

आपल्याला शोधायचे आहे,

त्रिकोणाच्या शिखरामधून CD (Apex) जाणाऱ्या अक्षाला (Axis)जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)= I_{AB}=?



आपल्याला माहिती आहे समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार (Parallel Axis Thorem) समांतर CD अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)**,**

$I_{CD}=I_G + A.\ h^2$

या ठिकाणी

$I_G = I_{XX}$------------------ कारण AB हा अक्ष मध्यबिंदूच्या X-X या अक्षाला समांतर आहे.

आपल्याला माहिती आहे की क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला आयताकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_G = I_{XX} = \frac{bh^3}{36}$$

तसेच

A = कापल्या नंतर चे क्षेत्रफळ **(**Cross Sectional Area)

$A = \frac{1}{2} bXh \quad mm^2$

h =CD आणि क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या अक्षांमधील (Centroidal Axis) अंतर

h =2h/3

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{CD} = I_G + A.\ h^2$

$$I_{CD} = \frac{bh^3}{36} + [\frac{1}{2} bXh \times (\frac{2h}{3})^2]$$

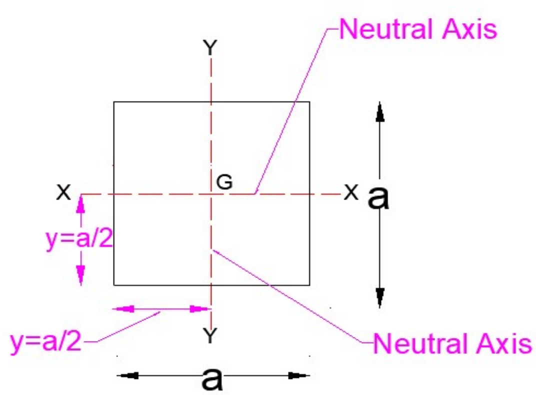
$$I_{CD} = \frac{bh^3}{36} + \frac{4bh^3}{18}$$

$$I_{CD} = \frac{bh^3}{4}$$

1.4 काही मानक आकृत्यांसाठी सेक्शन मोडूलस(Section Modulus of Standard basic figures):

- **चौरस (Square):-**

समजा या ठिकाणी चौरस (Square) ज्याची बाजू (Side)‘a’ आहे



सेक्शन मोडूलस (Section Modulus):

$$Z = \frac{I}{y_{max}}$$

या ठिकाणी

Z= सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

I= जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

y_{max} **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extremelayer) यांच्यातील अंतर

याठिकाणी, आडव्या अक्षासोबत सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{xx} = \frac{I_{xx}}{y_{max}}$$

आपल्याला माहिती आहेचौरस आकृतीसाठीजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{a^4}{12}$$

आणि

y_{max} **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

$$y_{max} = \frac{a}{2}$$

$$Z_{xx} = \frac{a^4/12}{a/2}$$

$$Z_{xx} = \frac{a^3}{6}$$

त्याचप्रमाणे उभ्या अक्षासोबतसेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{yy} = \frac{I_{yy}}{y_{max}}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{a^4}{12}$$

y_{max} **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

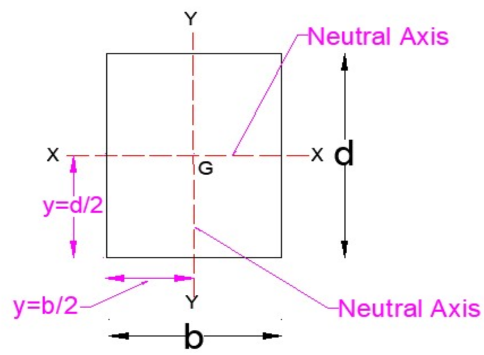
$$y_{max} = \frac{a}{2}$$

$$Z_{yy} = \frac{a^4/12}{a/2}$$

$$Z_{yy} = \frac{a^3}{6}$$

- **आयात (Rectangle):-**

समजा या ठिकाणी आयात (Rectangle**)** ज्याची रुंदी (Width) **'**b' आहे व ऊंची (Height) 'd' आहे



सेक्शन मोडूलस(Section Modulus):

$$Z = \frac{I}{y_{max}}$$

या ठिकाणी

Z= सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

I= जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

y_{max} = तटस्थ अक्ष (NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extremelayer) यांच्यातील अंतर

याठिकाणी, आडव्या अक्षासोबतसेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{xx} = \frac{I_{xx}}{y_{max}}$$

आपल्याला माहिती आहे आयाताकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{bd^3}{12}$$

आणि

y_{max} = तटस्थ अक्ष (NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

$$y_{max} = \frac{d}{2}$$

$$Z_{xx} = \frac{bd^3/12}{d/2}$$

$$Z_{xx} = \frac{bd^2}{6}$$

त्याचप्रमाणे उभ्या अक्षासोबत सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{yy} = \frac{I_{yy}}{y_{max}}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{db^3}{12}$$

y_{max} = तटस्थ अक्ष (Neutral Axis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

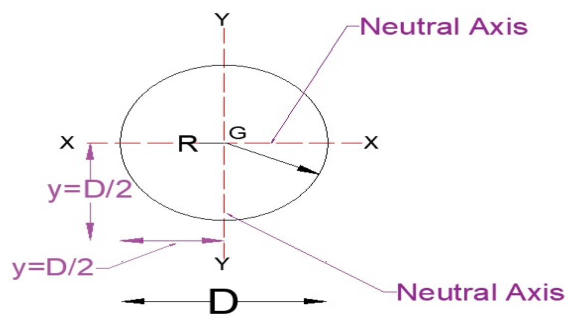
$y_{max} = \frac{b}{2}$

$$Z_{yy} = \frac{db^3/12}{b/2}$$

$$Z_{yy} = \frac{db^2}{6}$$

- **वर्तुळ (Circle):-**

समजा या ठिकाणी एक वर्तुळ (Circle) ज्याची त्रिज्या (Radius) 'R' आणि व्यास (Diameter) 'D' आहे.



सेक्शन मोडूलस (Section Modulus):

$$Z = \frac{I}{y_{max}}$$

या ठिकाणी

Z= सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

I= जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

y_{max} = तटस्थ अक्ष (NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

याठिकाणी, आडव्या अक्षासोबत सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{xx} = \frac{I_{xx}}{y_{max}}$$

आपल्याला माहिती आहे वर्तुळाकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{\pi}{64} D^4$$

आणि

y_{max} = तटस्थ अक्ष (Neutral Axis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

$y_{max}=\frac{D}{2}$

$$Z_{xx}=\frac{\pi D^4/64}{D/2}$$

$$Z_{xx}=\frac{\pi D^3}{32}$$

त्याचप्रमाणे उभ्या अक्षासोबतसेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{yy}=\frac{I_{yy}}{y}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{yy}=\frac{\pi}{64}D^4$$

y_{max} **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

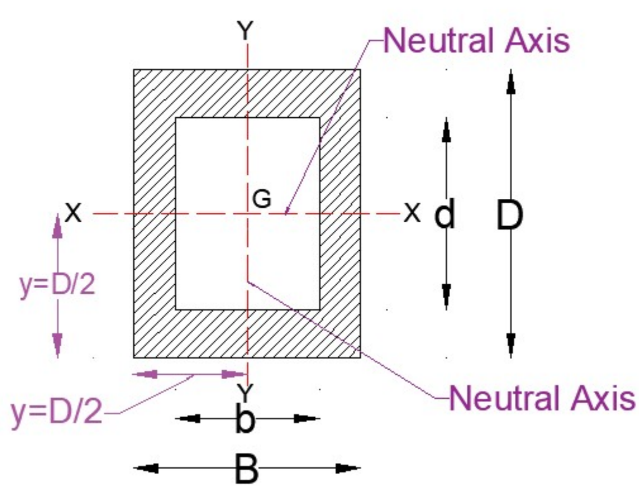
$y_{max}=\frac{D}{2}$

$$Z_{yy}=\frac{\pi D^4/64}{D/2}$$

$$Z_{yy}=\frac{\pi D^3}{32}$$

- **पोकळ आयात (HollowRectangle):-**

समजा या ठिकाणी पोकळ आयात (HollowRectangle**)** ज्याची बाहेरील रुंदी (External Width) **'**B' आणि आतील रुंदी (InternalWidth) **'**b' आहे व बाहेरील ऊंची (External Height) 'D' आणि आतील ऊंची (Internal Height) 'd' आहे



सेक्शन मोडूलस(Section Modulus):

$$Z = \frac{I}{y_{max}}$$

या ठिकाणी

Z= सेक्शन मोडूलस(Section Modulus)

I= जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

y **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

याठिकाणी, आडव्या अक्षासोबत सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{xx} = \frac{I_{xx}}{y_{max}}$$

आपल्याला माहिती आहे पोकळ आयाताकृतीसाठी जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12}$$

आणि

y_{max} **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

y_{max} **=**$\frac{D}{2}$

$$Z_{xx} = \frac{\frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12}}{D/2}$$

$$Z_{xx} = \frac{BD^3 - bd^3}{6D}$$

त्याचप्रमाणेउभ्या अक्षासोबत सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{yy} = \frac{I_{yy}}{y_{max}}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याY-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY} = \frac{DB^3}{12} - \frac{db^3}{12}$$

y_{max} **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

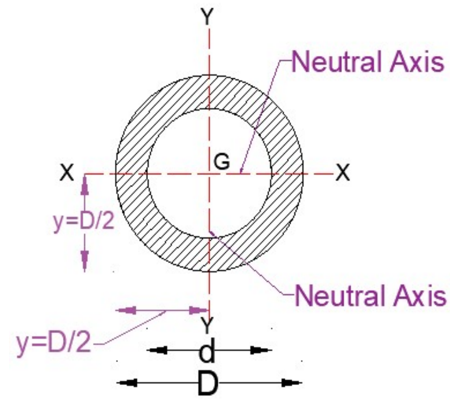
y_{max}**=**$\frac{B}{2}$

$$Z_{yy} = \frac{\frac{DB^3}{12} - \frac{db^3}{12}}{B/2}$$

$$Z_{yy} = \frac{DB^3 - db^3}{6B}$$

- **पोकळ वर्तुळ (HollowCircle):-**

समजा या ठिकाणी एक पोकळ वर्तुळ (Hollow Circle) ज्याचा बाहेरील व्यास (External Diameter) 'D' आणि आतील व्यास (Internal Diameter) 'd' आहे.



सेक्शन मोडूलस(Section Modulus):

$$Z = \frac{I}{y_{max}}$$

या ठिकाणी

Z= सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

I= जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

y **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

याठिकाणी, आडव्या अक्षासोबत सेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{xx} = \frac{I_{xx}}{y_{max}}$$

आपल्याला माहिती आहेपोकळवर्तुळाकृतीसाठीजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याX-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{XX} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

आणि

y **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extremelayer) यांच्यातील अंतर

$$y_{max} = \frac{D}{2}$$

$$Z_{xx} = \frac{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)}{D/2}$$

$$Z_{xx} = \frac{\pi(D^4-d^4)}{32D}$$

त्याचप्रमाणेउभ्या अक्षासोबतसेक्शन मोडूलस (Section Modulus)

$$Z_{yy} = \frac{I_{yy}}{y_{max}}$$

I_{YY} = क्षेत्रफळाच्या मध्यभागी असलेल्याY-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{yy} = \frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$$

y_{max} **=** तटस्थ अक्ष **(**NeutralAxis) आणि टोकाकडील धागा (Extreme layer) यांच्यातील अंतर

$$y_{max} = \frac{D}{2}$$

$$Z_{yy} = \frac{\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)}{D/2}$$

$$Z_{yy} = \frac{\pi\ (D^4-d^4)}{32D}$$

1.5.1 सममितीय (Symmetrical) आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधणारे उदाहरणे:

उदा. क्र. 1 एका सममितीय I-आकृतीसाठी मध्यबिंदूच्या X-X आणि Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

आकृतीची माहिती खालीलप्रमाणे आहे,

फ्लेंज (Flange):-100mm× 20 mm

संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 280mm

वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm

उत्तर:-

दिलेली माहिती

I- आकृती

फ्लेंज (Flange):-100mm× 20 mm

संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 280mm

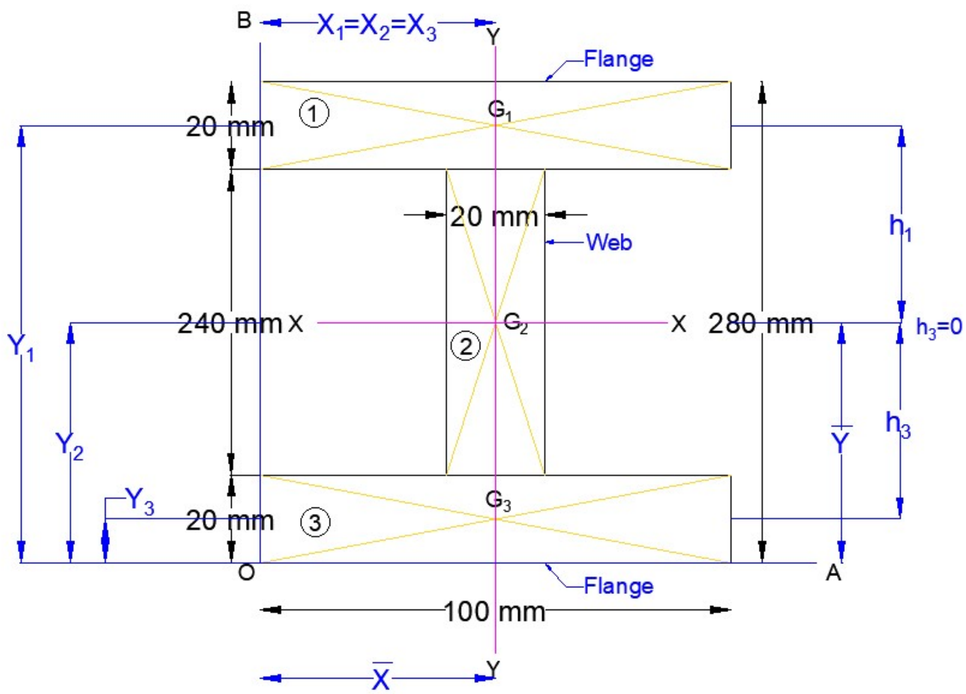
वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm

आपल्याला शोधायचे आहे,

मध्यबिंदू X-X आणि Y-Y अक्षामधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia) I_{XX}=?

I_{YY}=?

दिलेल्या सममितीय I- आकृतीला खाली दाखविल्याप्रमाणे 1, 2 आणि 3 याआयात आकृतीमध्ये विभागू



आता मध्यबिंदूचे उभे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{Y}$)

$$\bar{Y} = \frac{A_1Y_1 + A_2Y_2 + A_3Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

$A_1 = b \times d$

$A_1 = 100 \times 20 = 2000\ mm^2$

Y_1= पाया OA आणि आयत आकृती-1च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे अंतर

$Y_1 = 20 + 240 + (20/2) = 270\ mm$

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

$A_2 = b \times d$

$A_2 = 20 \times 240 = 4800\ mm^2$

Y_2= पाया OA आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

$Y_2 = 20 + (240/2) = 140\ mm$

A_3 = आयात आकृती-3 चे क्षेत्रफळ

$A_3 = b \times d$

$A_3 = 100 \times 20 = 2000\ mm^2$

Y_3= पाया OA आणि आयत आकृती-3 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

Y_3= (20/2) = 10 mm

$$\bar{Y} = \frac{2000 \times 270 + 4800 \times 140 + 2000 \times 10}{2000 + 4800 + 2000}$$

$$\bar{Y} = 140\ mm$$

किंवा

दिलेली आकृती ही X-X अक्षाला सममितीय आहे म्हणून

$$\bar{Y} = \left(\frac{D}{2}\right) = \left(\frac{280}{2}\right) = 140\ mm$$

एकूण आडव्या X-Xअक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX}=I_{XX1}+I_{XX2}+I_{XX3}$

I_{XX}= आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX1}=आयात आकृती-1 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX2}= आयात आकृती-2 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX3}= आयात आकृती-3 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A.\ h^2$

या ठिकाणी

$I_{XX1}= I_{G1} + A_1.\ h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G1} = \frac{bd^3}{12} = \frac{100\times20^3}{12} = 66.667 \times 10^3 mm^4$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_1=Y_1-\bar{Y}$ = 270-140 = 130mm

$I_{XX1}=66.667 \times 10^3 + (2000 \times 130^2)$

$I_{XX1}=33.866 \times 10^6 mm^4$

आता

$I_{XX2}= I_{G2} + A_2.\ h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G2} = \frac{bd^3}{12} = \frac{20 \times 240^3}{12} = 23.04 \times 10^6 \text{mm}^4$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2 = Y_2 - \bar{Y}$ =140-140 = 0mm

$I_{XX2} = 23.04 \times 10^6 + (4800 \times 0^2)$

$I_{XX2} = 23.04 \times 10^6 \text{mm}^4$

आयात आकृती-1 (Top Flange) आणि आयात आकृती-2 (Bottom Flange) दोन्ही सारख्या असल्यामुळे

$I_{XX1} = I_{XX3} = 33.866 \times 10^6 \text{mm}^4$

म्हणून एकूण आडव्या X-X अक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX} = I_{XX1} + I_{XX2} + I_{XX3}$

$I_{XX} = 33.866 \times 10^6 + 23.04 \times 10^6 + 33.866 \times 10^6$

$I_{XX} = 90.772 \times 10^6 \text{mm}^4$

आता मध्यबिंदूचे आडवे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{X}$)

$$\bar{X} = \frac{A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

A_1 = b×d

A_1 = 100 ×20 = 2000 mm^2

X_1=रेषा OB आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_1=(100/2) = 50mm

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

A_2 = b×d

A_2 = 20 ×240 = 4800 mm^2

X_2=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_2= (100/2) = 50 mm

A_3 = आयात आकृती-3 चे क्षेत्रफळ

$A_3 = b \times d$

$A_3 = 100 \times 20 = 2000\ mm^2$

X_3=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

$X_3=(100/2) = 50\ mm$

$$\bar{Y} = \frac{2000 \times 50 + 4800 \times 50 + 2000 \times 50}{2000 + 4800 + 2000}$$

$$\bar{Y} = 50\ mm$$

किंवा

दिलेली आकृती ही Y-Y अक्षालासममितीय आहे म्हणून

$$\bar{X} = \left(\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{100}{2}\right) = 50\ mm$$

एकूण उभ्या Y-Y अक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = I_{YY1} + I_{YY2} + I_{YY3}$

I_{YY}= आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{YY1}=आयात आकृती-1 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY1} = \frac{db^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1.667 \times 10^6 mm^4$$

I_{YY2}= आयात आकृती-2 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY2} = \frac{db^3}{12} = \frac{240 \times 20^3}{12} = 160 \times 10^3 mm^4$$

I_{YY3}= आयात आकृती-3 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY3} = \frac{db^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1.667 \times 10^6 mm^4$$

एकूण उभ्या Y-Y अक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = 1.667 \times 10^6 + 160 \times 10^3 + 1.667 \times 10^6$

$$I_{YY} = 3.494 \times 10^6 mm^4$$

1.5.2 असममितीय (Unsymmetrical) आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधणारे उदाहरणे:

उदा. क्र. 1 एका असममितीय I- आकृतीसाठी मध्यबिंदूच्या X-X आणि Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

आकृतीची माहिती खालीलप्रमाणे आहे,

वरील फ्लेंज (TopFlange):-60mm× 20 mm

खालील फ्लेंज (BottomFlange):-100mm× 20 mm

संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 280mm

वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm

उत्तर:-

दिलेली माहिती

असममितीय I- आकृती

वरील फ्लेंज (TopFlange):-60mm× 20 mm

खालील फ्लेंज (BottomFlange):-100mm× 20 mm

संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 280mm

वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm

आपल्याला शोधायचे आहे,

मध्यबिंदू X-X आणि Y-Y अक्षामधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia) I_{XX}=?

I_{YY}=?

दिलेल्या सममितीय I- आकृतीला खाली दाखविल्याप्रमाणे 1, 2 आणि 3 या आयात आकृतीमध्ये विभागू

आता मध्यबिंदूचे उभे अंतर शोधू म्हणजेच $(\bar{Y})$

$$\bar{Y} = \frac{A_1Y_1 + A_2Y_2 + A_3Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

A_1 = b×d

A_1 = 60 ×20 = 1200 mm^2

Y_1= पाया OA आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे अंतर

Y_1=20+240+(20/2) = 270 mm

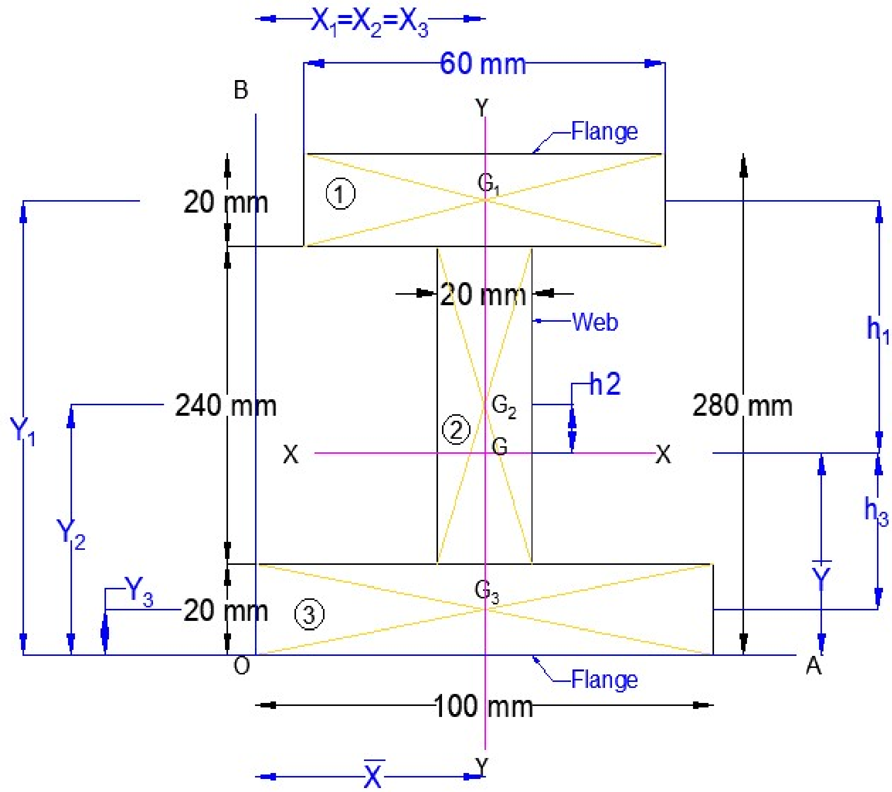
A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

A_2 = b×d

A_2 = 20 ×240 = 4800 mm^2

Y_2= पाया OA आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

Y_2=20 + (240/2)= 140 mm



A_3 = आयात आकृती-3 चे क्षेत्रफळ

$A_3 = b \times d$

$A_3 = 100 \times 20 = 2000\ mm^2$

Y_3= पाया OA आणि आयत आकृती-3 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

$Y_3 = (20/2) = 10\ mm$

$$\bar{Y} = \frac{1200 \times 270 + 4800 \times 140 + 2000 \times 10}{1200 + 4800 + 2000}$$

$$\bar{Y} = 127\ mm$$

एकूण आडव्या X-Xअक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX} = I_{XX1} + I_{XX2} + I_{XX3}$

I_{XX}= आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX1}=आयात आकृती-1 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX2}= आयात आकृती-2 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX3}= आयात आकृती-3 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A.\, h^2$

या ठिकाणी

$I_{XX1}= I_{G1} + A_1.\, h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G1} = \frac{bd^3}{12} = \frac{60\times20^3}{12} = 40 \times 10^3\text{mm}^4$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती-। च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_1=Y_1-\bar{Y}$ = 270-127 = 143mm

$I_{XX1}=40 \times 10^3 + (1200 \times 143^2)$

$I_{XX1}=24.578 \times 10^6\text{mm}^4$

आता

$I_{XX2}= I_{G2} + A_2.\, h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G2} = \frac{bd^3}{12} = \frac{20\times240^3}{12} = 23.04 \times 10^6\text{mm}^4$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती-। च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2=Y_2-\bar{Y}$ = 140-127 =13mm

$I_{XX2}=23.04 \times 10^6 + (4800 \times 13^2)$

$I_{XX2}=23.85 \times 10^6\text{mm}^4$

आता

$I_{XX3}= I_{G3} + A_3.\, H_3^2$

I_{G3}= आयात आकृती-3 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G3} = \frac{bd^3}{12} = \frac{100\times20^3}{12} = 66.667 \times 10^3\text{mm}^4$

h_3=आयात आकृती-3 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती-। च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_3=Y_3-\bar{Y}$ =10-127 = 117mm

$I_{XX3}=66.667 \times 10^3 + (2000 \times 117^2)$

$I_{XX3}=27.444 \times 10^6\text{mm}^4$

म्हणून एकूण आडव्या X-Xअक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX}=I_{XX1}+I_{XX2}+I_{XX3}$

$I_{XX}=24.578\times10^{6}+23.85\times10^{6}+27.444\times10^{6}$

$I_{XX}=75.873\times10^{6}mm^{4}$

आता मध्यबिंदूचे आडवे अंतर शोधू म्हणजेच $(\bar{X})$

$$\bar{X}=\frac{A_1X_1+A_2X_2+A_3X_3}{A_1+A_2+A_3}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

A_1 = b×d

A_1 = 60 ×20 = 1200 mm^2

X_1=रेषा OB आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_1=(100/2) = 50 mm

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

A_2 = b×d

A_2 = 20 ×240 = 4800 mm^2

X_2=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_2=(100/2) = 50 mm

A_3 = आयात आकृती-3 चे क्षेत्रफळ

A_3 = b×d

A_3 = 100 ×20 = 2000 mm^2

X_3=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_3= (100/2) = 50 mm

$$\bar{Y}=\frac{1200\times50+4800\times50+2000\times50}{1200+4800+2000}$$

$\bar{Y}=50\,mm$

किंवा

दिलेली आकृती ही Y-Yअक्षाला सममितीय आहे म्हणून

$$\bar{X}=\left(\frac{B}{2}\right)=\left(\frac{100}{2}\right)=\ 50\,mm$$

एकूण उभ्या Y-Yअक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY}=I_{YY1}+I_{YY2}+I_{YY3}$

I_{YY}= आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{YY1}=आयात आकृती-1 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{YY1} = \frac{db^3}{12} = \frac{20 \times 60^3}{12} = 360 \times 10^3 mm^4$

I_{YY2}= आयात आकृती-2 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{YY2} = \frac{db^3}{12} = \frac{240 \times 20^3}{12} = 160 \times 10^3 mm^4$

I_{YY3}= आयात आकृती-3 चे आकृती-I च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{YY3} = \frac{db^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1.667 \times 10^6 mm^4$

एकूण उभ्या Y-Y अक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = 360 \times 10^3 + 160 \times 10^3 + 1.667 \times 10^6$

$I_{YY} = 2.186 \times 10^6 mm^4$

1.5.3 T- आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधणारे उदाहरणे:

उदा. क्र. 1 एका T-आकृतीसाठी मध्यबिंदूच्या X-X आणि Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

आकृतीची माहिती खालीलप्रमाणे आहे,

फ्लेंज (Flange):-60mm× 20 mm

संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 260mm

वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm

उत्तर:-

दिलेली माहिती

T- आकृती

फ्लेंज (Flange):-60mm× 20 mm

संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 260mm

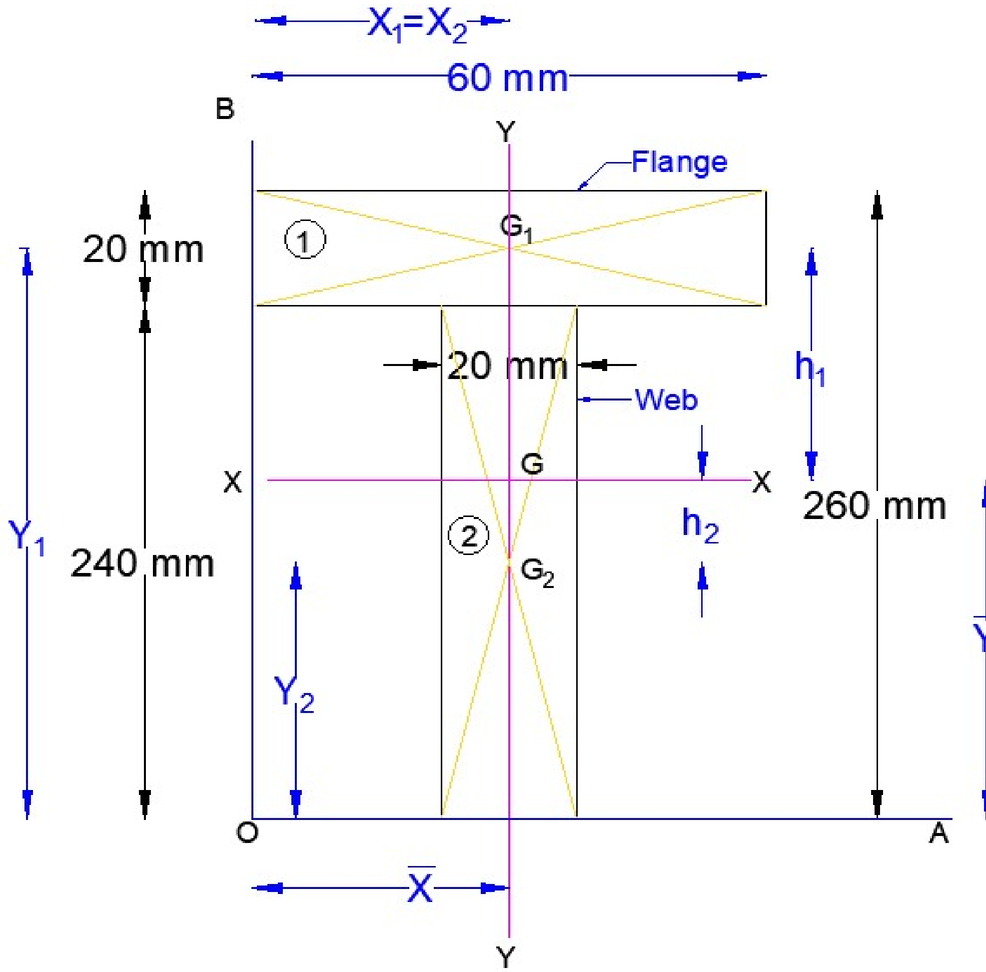
वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm

आपल्याला शोधायचे आहे,

मध्यबिंदू X-X आणि Y-Y अक्षामधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis)जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia) I_{XX}=?

I_{YY}=?

दिलेल्या सममितीय T- आकृतीला खाली दाखविल्याप्रमाणे 1आणि 2 या आयात आकृतीमध्ये विभागू



आता मध्यबिंदूचे उभे अंतर शोधू म्हणजेच $(\bar{Y})$

$$\bar{Y} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

$A_1 = b \times d$

$A_1 = 60 \times 20 = 1200\ mm^2$

Y_1= पाया OA आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे अंतर

$Y_1 = 240 + (20/2) = 250$ mm

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

$A_2 = b \times d$

$A_2 = 20 \times 240 = 4800\ mm^2$

Y_2= पाया OA आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

$Y_2 = 240/2 = 120$ mm

$$\bar{Y} = \frac{1200 \times 250 + 4800 \times 120}{1200 + 4800}$$

$$\bar{Y} = 146\ mm$$

एकूण आडव्या X-Xअक्षाला आकृती-T चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX}=I_{XX1}+I_{XX2}$

I_{XX}= आकृती-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX1}=आयात आकृती-1 चे आकृती-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX2}= आयात आकृती-2 चे आकृती-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A.\ h^2$

या ठिकाणी

$I_{XX1}= I_{G1} + A_1.\ h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G1} = \frac{bd^3}{12} = \frac{60\times20^3}{12} = 40\times10^3 \text{mm}^4$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_1=Y_1-\bar{Y}$ = 250-146 = 104mm

$I_{XX1}=40\times10^3 + (1200\times104^2)$

$I_{XX1}=13.019\times10^6 \text{mm}^4$

आता

$I_{XX2}= I_{G2} + A_2.\ h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G2} = \frac{bd^3}{12} = \frac{20\times240^3}{12} = 23.04\times10^6 \text{mm}^4$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2=Y_2-\bar{Y}$ = 120-146=26mm

$I_{XX2}=23.04\times10^6 + (4800\times26^2)$

$I_{XX2}=26.284\times10^6 \text{mm}^4$

म्हणून एकूण आडव्या X-X अक्षाला आकृती-T चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX}=I_{XX1}+I_{XX2}$

$I_{XX} = 13.019 \times 10^6 + 26.284 \times 10^6$

$I_{XX} = 39.303 \times 10^6 mm^4$

आता मध्यबिंदूचे आडवे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{X}$)

$$\bar{X} = \frac{A_1X_1 + A_2X_2}{A_1 + A_2}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

$A_1 = b \times d$

$A_1 = 60 \times 20 = 1200\ mm^2$

X_1=रेषा OB आणि आयत आकृती-T च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

$X_1 = (60/2) = 30\ mm$

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

$A_2 = b \times d$

$A_2 = 20 \times 240 = 4800\ mm^2$

X_2=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

$X_2 = (60/2) = 30\ mm$

$$\bar{X} = \frac{1200 \times 30 + 4800 \times 30}{1200 + 4800}$$

$$\bar{X} = 30\ mm$$

किंवा

दिलेली T-आकृती ही Y-Yअक्षालासममितीय (Symmetric) आहे म्हणून $\bar{X}$ खालील प्रमाणे काढू शकतो

$$\bar{X} = \left(\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{60}{2}\right) = 30\ mm$$

एकूण उभ्या Y-Y अक्षाला आकृती-T चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = I_{YY1} + I_{YY2}$

I_{YY}= आकृती-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

I_{YY1}=आयात आकृती-1 चे आकृती-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY1} = \frac{db^3}{12} = \frac{20 \times 60^3}{12} = 360 \times 10^3 mm^4$$

I_{YY2}= आयात आकृती-2 चे आकृती-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$$I_{YY2} = \frac{db^3}{12} = \frac{240 \times 20^3}{12} = 160 \times 10^3 mm^4$$

एकूण उभ्या Y-Y अक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

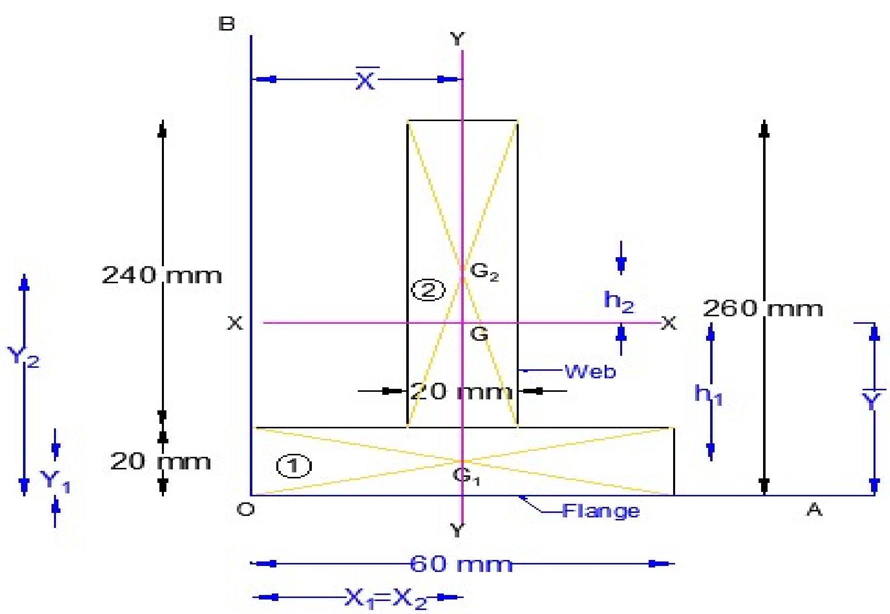
$I_{YY} = 360 \times 10^3 + 160 \times 10^3$

$I_{YY} = 520 \times 10^3 mm^4$

उदा. क्र. 2 एका उलटा T-आकृतीसाठी मध्यबिंदूच्या X-X आणि Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.
आकृतीची माहिती खालीलप्रमाणे आहे,
फ्लेंज (Flange):-60mm× 20 mm
संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 260mm
वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm

उत्तर:-

दिलेली माहिती
उलटा T- आकृती
फ्लेंज (Flange):-60mm× 20 mm
संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 260mm
वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm
आपल्याला शोधायचे आहे,
मध्यबिंदू X-X आणि Y-Y अक्षामधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia) I_{XX}=?
I_{YY}=?
दिलेल्या T- आकृतीला खाली दाखविल्याप्रमाणे 1आणि 2 या आयात आकृतीमध्ये विभागू



आता मध्यबिंदूचे उभे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{Y}$)

$\bar{Y} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2}$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

$A_1 = b \times d$

$A_1 = 60 \times 20 = 1200\ mm^2$

Y_1= पाया OA आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे अंतर

$Y_1 = (20/2) = 10mm$

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

$A_2 = b \times d$

$A_2 = 20 \times 240 = 4800\ mm^2$

Y_2= पाया OA आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

$Y_2 = 20 + (240/2) = 140\ mm$

$\bar{Y} = \frac{1200 \times 10 + 4800 \times 140}{1200 + 4800}$

$\bar{Y} = 114\ mm$

एकूण आडव्या X-X अक्षाला आकृती उलटा -T चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX} = I_{XX1} + I_{XX2}$

I_{XX}= आकृती उलटा -T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX1}=आयात आकृती-1 चे आकृती उलटा -T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX2}= आयात आकृती-2 चे आकृती उलटा -T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB} = I_G + A.\ h^2$

या ठिकाणी

$I_{XX1} = I_{G1} + A_1.\ h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G1} = \frac{bd^3}{12} = \frac{60 \times 20^3}{12} = 40 \times 10^3 mm^4$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती उलटा -T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_1 = Y_1 - \bar{Y}$ =10-114 = 104mm

$I_{XX1} = 40 \times 10^3 + (1200 \times 104^2)$

$I_{XX1} = 13.019 \times 10^6 mm^4$

आता

$I_{XX2} = I_{G2} + A_2 . h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G2} = \frac{bd^3}{12} = \frac{20\times240^3}{12} = 23.04\times10^6 \text{mm}^4$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती उलटा -T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2 = Y_2 - \bar{Y}$ = 140-114= 26mm

$I_{XX2} = 23.04\times10^6 + (4800\times26^2)$

$I_{XX2} = 26.284\times10^6 \text{mm}^4$

म्हणून एकूण आडव्या X-X अक्षाला आकृती-T चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX} = I_{XX1} + I_{XX2}$

$I_{XX} = 13.019\times10^6 + 26.284\times10^6$

$I_{XX} = 39.303\times10^6 \text{mm}^4$

आता मध्यबिंदूचे आडवे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{X}$)

$$\bar{X} = \frac{A_1X_1 + A_2X_2}{A_1 + A_2}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

$A_1 = b\times d$

$A_1 = 60\times20 = 1200 \text{ mm}^2$

X_1=रेषा OB आणि आयत आकृती उलटा -T च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

$X_1 = (60/2) = 30 \text{ mm}$

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

$A_2 = b\times d$

$A_2 = 20\times240 = 4800 \text{ mm}^2$

X_2=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

$X_2 = (60/2) = 30 \text{ mm}$

$$\bar{X} = \frac{1200\times30 + 4800\times30}{1200 + 4800}$$

$\bar{X} = 30\ mm$

किंवा

दिलेली उलटाT-आकृती ही Y-Yअक्षालासममितीय (Symmetric) आहे म्हणून $\bar{X}$ खालील प्रमाणे काढू शकतो

$\bar{X} = \left(\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{60}{2}\right) = 30\ mm$

एकूण उभ्या Y-Yअक्षाला आकृती उलटा -T चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY}=I_{YY1}+I_{YY2}$

I_{YY}= आकृती उलटा-T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{YY1}=आयात आकृती-1 चे आकृती उलटा -T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY1} = \frac{db^3}{12} = \frac{20 \times 60^3}{12} = 360 \times 10^3 mm^4$$

I_{YY2}= आयात आकृती-2 चे आकृती उलटा -T च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{YY2} = \frac{db^3}{12} = \frac{240 \times 20^3}{12} = 160 \times 10^3 mm^4$$

एकूण उभ्या Y-Y अक्षाला आकृती-I चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY}=360 \times 10^3 + 160 \times 10^3$

$I_{YY} = 520 \times 10^3 mm^4$

1.5.4 समान कोन विभाग (Equal AngleSection) आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधणारे उदाहरणे:

उदा. क्र. 1 एका 70 mm × 70 mm × 10 mm समान कोन विभाग (Equal Angle Section) आकृतीसाठी मध्यबिंदूच्या X-X आणि Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

उत्तर:- दिलेली माहिती

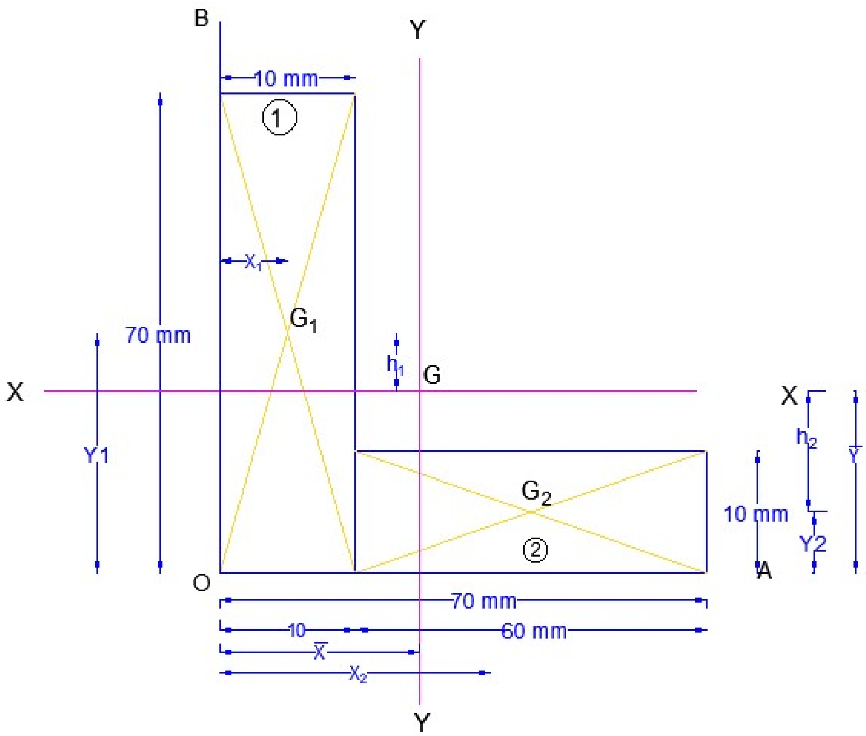
70 mm × 70 mm × 10 mm समान कोन विभाग (Equal AngleSection)

आपल्याला शोधायचे आहे,

मध्यबिंदू X-X आणि Y-Y अक्षामधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia) I_{XX}=?

I_{YY}=?

दिलेल्या समान कोन विभागाला (Equal Angle Section) खाली दाखविल्याप्रमाणे 1 आणि 2 या आयात आकृतीमध्ये विभागू



आता मध्यबिंदूचे उभे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{Y}$)

$$\bar{Y} = \frac{A_1Y_1 + A_2Y_2}{A_1 + A_2}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

A_1 = b×d

A_1 = 10 ×70 = 700mm^2

Y_1= पाया OA आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे अंतर

Y_1=(70/2) =35mm

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

A_2 = b×d

A_2 = 60 ×10 = 600 mm^2

Y_2= पाया OA आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

Y_2=10/2 = 5mm

$$\bar{Y} = \frac{700 \times 35 + 600 \times 5}{700 + 600}$$

$$\bar{Y} = 21.15\ mm$$

एकूण आडव्या X-Xअक्षाला आकृती समान कोन विभाग (Equal AngleSection) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX} = I_{XX1} + I_{XX2}$

I_{XX}= आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section)च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

I_{XX1}=आयात आकृती-1 चे आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section)च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

I_{XX2}= आयात आकृती-2 चे आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB} = I_G + A.\ h^2$

या ठिकाणी

$I_{XX1} = I_{G1} + A_1.\ h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{G1} = \frac{bd^3}{12} = \frac{10\times70^3}{12} = 285.833 \times 10^3 \text{mm}^4$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_1 = Y_1 - \bar{Y}$ =35-21.15 = 13.85mm

$I_{XX1} = 285.833 \times 10^3 + (700 \times 13.85^2)$

$I_{XX1} = 420.108 \times 10^3 \text{mm}^4$

आता

$I_{XX2} = I_{G2} + A_2.\ h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{G2} = \frac{bd^3}{12} = \frac{60\times10^3}{12} = 5 \times 10^3 \text{mm}^4$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2 = Y_2 - \bar{Y}$ =5-21.15=16.15mm

$I_{XX2} = 5 \times 10^3 + (600 \times 16.15^2)$

$I_{XX2} = 161.493 \times 10^3 \text{mm}^4$

म्हणून एकूण आडव्या X-Xअक्षाला आकृतीसमान कोन विभाग (Equal Angle Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX} = I_{XX1} + I_{XX2}$

$I_{XX}=420.108 \times 10^3 + 161.493 \times 10^3$

$I_{XX}=581.601 \times 10^3 mm^4$

आता मध्यबिंदूचे आडवे (Horizontal) अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{X}$)

$$\bar{X} = \frac{A_1X_1 + A_2X_2}{A_1 + A_2}$$

X_1=रेषा OB आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_1=(10/2) = 5mm

X_2=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_2=10+(60/2) =40 mm

$$\bar{X} = \frac{700 \times 5 + 600 \times 40}{700 + 600}$$

$$\bar{X} = 21.15\, mm$$

एकूण उभ्या Y-Yअक्षाला आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY}=I_{YY1} + I_{YY2}$

I_{YY}= आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section)च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{YY1}=आयात आकृती-1 चे आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A.\, h^2$

या ठिकाणी

$I_{YY1}= I_{G1} + A_1.\, h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{G1} = \frac{db^3}{12} = \frac{70 \times 10^3}{12} = 5.833 \times 10^3 mm^4$$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्ष यांच्यातील आडवे अंतर

$h_1=X_1-\bar{X}$ =5-21.15= 16.15 mm

$I_{YY1}=5.833 \times 10^3 + (700 \times 16.15^2)$

$I_{YY1}=188.408 \times 10^3 mm^4$

I_{YY2}= आयात आकृती-2 चे आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{YY2} = I_{G2} + A_2 . h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{G2} = \frac{db^3}{12} = \frac{10 \times 60^3}{12} = 180 \times 10^3 mm^4$$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती समान कोन विभाग (Equal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्याY-Y अक्ष यांच्यातील आडवे अंतर

$h_2 = X_2 - \bar{X}$ =40-21.15= 18.85 mm

$I_{YY2} = 180 \times 10^3 + (600 \times 18.85^2)$

$I_{YY2} = 393.193 \times 10^3 mm^4$

एकूण उभ्या Y-Yअक्षाला आकृतीसमान कोन विभाग (Equal Angle Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = 188.408 \times 10^3 + 393.193 \times 10^3$

$I_{YY} = 581.601 \times 10^3 mm^4$

1.5.5 असमान कोन विभाग (Unequal AngleSection) आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधणारे उदाहरणे

उदा. क्र. 1 एका 70 mm × 50 mm × 10 mm असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) आकृतीसाठी मध्यबिंदूच्या X-X आणि Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधा.

उत्तर:-

दिलेली माहिती

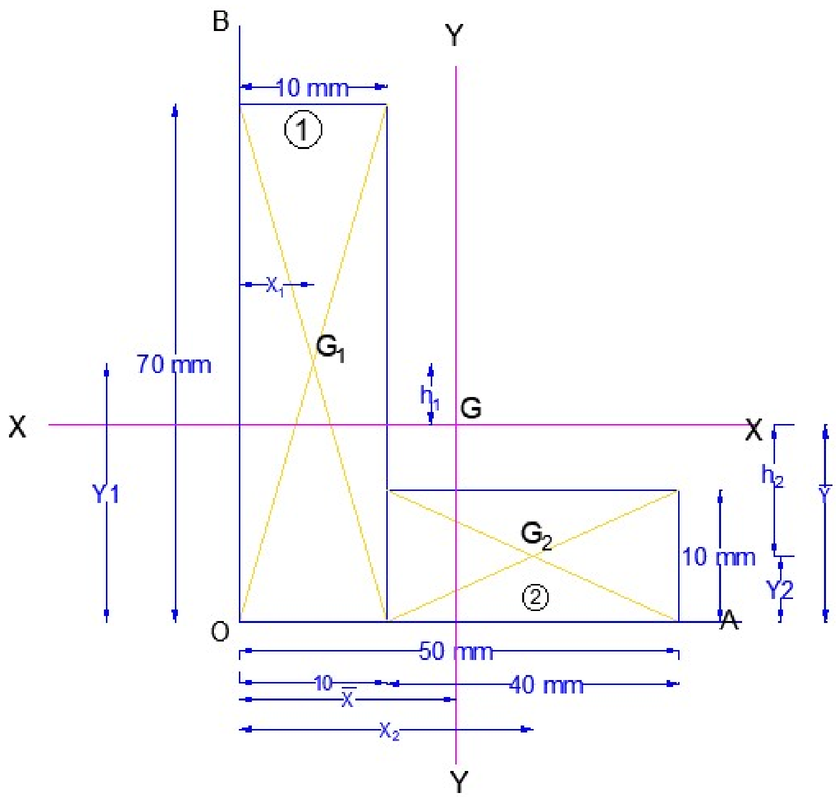
70 mm × 50 mm × 10 mm असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section)

आपल्याला शोधायचे आहे,

मध्यबिंदू X-X आणि Y-Y अक्षामधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia) I_{XX}=?

I_{YY}=?

दिलेल्या असमान कोन विभागाला (Unequal Angle Section) खाली दाखविल्याप्रमाणे 1आणि 2 या आयात आकृतीमध्ये विभागू



आता मध्यबिंदूचे उभे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{Y}$)

$$\bar{Y} = \frac{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}{A_1 + A_2}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

$A_1 = b \times d$

$A_1 = 10 \times 70 = 700 mm^2$

Y_1= पाया OA आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे अंतर

Y_1= (70/2) =35mm

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

$A_2 = b \times d$

$A_2 = 40 \times 10 = 400 \ mm^2$

Y_2= पाया OA आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

Y_2=10/2 = 5mm

$$\bar{Y} = \frac{700 \times 35 + 400 \times 5}{700 + 400}$$

$$\bar{Y} = 24.09 \ mm$$

एकूण आडव्या X-X अक्षाला आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX}=I_{XX1}+I_{XX2}$

I_{XX}= आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)
I_{XX1}=आयात आकृती-1 चे आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)
I_{XX2}= आयात आकृती-2 चे आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)
समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A. h^2$

या ठिकाणी

$I_{YY1}= I_{G1} + A_1. h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)
$I_{G1} = \frac{bd^3}{12} = \frac{10\times70^3}{12} = 285.833 \times 10^3 \text{mm}^4$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्ष यांच्यातील अंतर
$h_1=Y_1-\bar{Y}$ =35-24.09 = 10.91mm

$I_{XX1}=285.833 \times 10^3 + (700 \times 10.91^2)$

$I_{XX1}=369.15 \times 10^3 \text{mm}^4$

आता

$I_{XX2}= I_{G2} + A_2. h_2^2$
I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)
$I_{G2} = \frac{bd^3}{12} = \frac{40\times10^3}{12} = 3.333 \times 10^3 \text{mm}^4$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2=Y_2-\bar{Y}$ =5-24.09=19.09mm

$I_{XX2}=3.333 \times 10^3 + (400 \times 19.09^2)$

$I_{XX2}=149.104 \times 10^3 \text{mm}^4$

म्हणून एकूण आडव्या X-X अक्षाला आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX}=I_{XX1}+I_{XX2}$

$I_{XX}=369.15\times10^3+149.104\times10^3$

$I_{XX}=518.254\times10^3 mm^4$

आता मध्यबिंदूचे आडवे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{X}$)

$$\bar{X}=\frac{A_1X_1+A_2X_2}{A_1+A_2}$$

X_1=रेषा OB आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_1= (10/2) =5mm

X_2=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

X_2=10+ (40/2) =30 mm

$$\bar{X}=\frac{700\times5+400\times30}{700+400}$$

$$\bar{X}=14.09\ mm$$

एकूण उभ्या Y-Yअक्षाला आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY}=I_{YY1}+I_{YY2}$

I_{YY}= आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{YY1}=आयात आकृती-1 चे आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G+A.h^2$

या ठिकाणी

$I_{YY1}=I_{G1}+A_1.h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{G1}=\frac{db^3}{12}=\frac{70\times10^3}{12}=5.833\times10^3mm^4$$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्याY-Y अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_1 = X_1 - \bar{X}$ =5-14.09 = 09.09mm

$I_{YY1} = 5.833 \times 10^3 + (700 \times 9.09^2)$

$I_{YY1} = 63.672 \times 10^3 mm^4$

I_{YY2}= आयात आकृती-2 चे आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{YY2} = I_{G2} + A_2 . h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{G2} = \frac{db^3}{12} = \frac{10 \times 40^3}{12} = 53.33 \times 10^3 mm^4$$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्याY-Y अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2 = X_2 - \bar{X}$ =30-14.09 = 15.91mm

$I_{YY2} = 53.33 \times 10^3 + (400 \times 15.91^2)$

$I_{YY2} = 154.581 \times 10^3 mm^4$

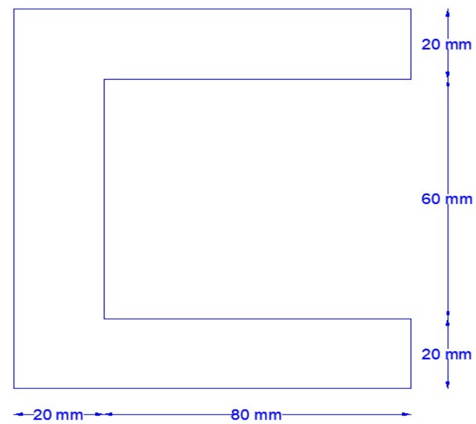
एकूण उभ्या Y-Yअक्षाला आकृती असमान कोन विभाग (Unequal Angle Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = 63.672 \times 10^3 + 154.581 \times 10^3$

$I_{YY} = 218.253 \times 10^3 mm^4$

1.5.6 चॅनेल विभाग (C-Section) आकृत्यांसाठी जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia) शोधणारे उदाहरणे

उदा. क्र. 1खाली दर्शविलेल्या चॅनेल विभाग (C-Section)आकृतीसाठी मध्यबिंदूच्या X-X आणि Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल(Moment Of Inertia) शोधा.



उत्तर:-

दिलेली माहिती

चॅनेल विभाग **(**C-Section)

वरील फ्लेंज (TopFlange):-100mm× 20 mm

खालील फ्लेंज (BottomFlange):-100mm× 20 mm

संपूर्ण खोली (Overall Depth):- 100mm

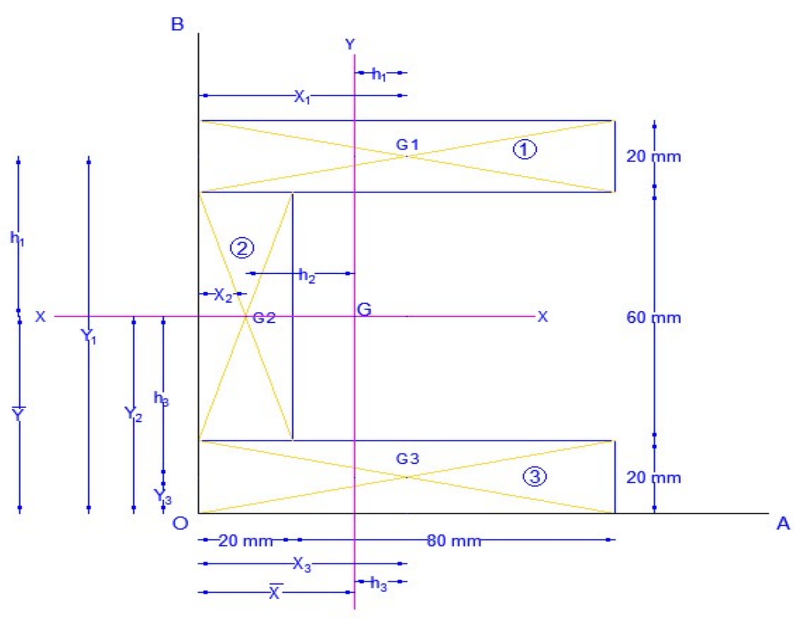
वेब ची जाडी (Thicknessof Web):- 20mm

आपल्याला शोधायचे आहे,

मध्यबिंदू X-X आणि Y-Y अक्षामधून जाणाऱ्या अक्षाला (Axis) जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia) I_{XX}=?

I_{YY}=?

दिलेल्या चॅनेल विभाग **(**C-Section) आकृतीला खाली दाखविल्याप्रमाणे 1, 2 आणि 3 या आयात आकृतीमध्ये विभागू



आता मध्यबिंदूचे उभे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{Y}$)

$$\bar{Y} = \frac{A_1Y_1 + A_2Y_2 + A_3Y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

A_1 = आयात आकृती-1 चे क्षेत्रफळ

A_1 = b×d

A_1 = 100 ×20 = 2000mm^2

Y_1= पाया OA आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे अंतर

Y_1=20+60+(20/2) = 90mm

A_2 = आयात आकृती-2 चे क्षेत्रफळ

A_2 = b×d

A_2 = 20 ×60 = 1200 mm^2

Y_2= पाया OA आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

Y_2=20+(60/2)= 50mm

A_3 = आयात आकृती-3 चे क्षेत्रफळ

A_3 = b×d

A_3 = 100 ×20 = 2000 mm^2

Y_3= पाया OA आणि आयत आकृती-3 च्या मध्यबिंदू पर्यंतचे अंतर

Y_3=(20/2) = 10 mm

$$\bar{Y} = \frac{2000 \times 90 + 1200 \times 50 + 2000 \times 10}{2000 + 1200 + 2000}$$

$$\bar{Y} = 50\ mm$$

किंवा

दिलेला चॅनेल विभाग (C-Section) आडव्या X-X अक्षाला सममितीय (Symmetric) आहे म्हणून मध्यबिंदूचे उभे अंतर म्हणजेच ($\bar{Y}$) थेट काढू शकतो.

$$\bar{Y} = \left(\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{100}{2}\right) = 50\ mm$$

एकूण आडव्या X-X अक्षाला चॅनेल विभागा (C-Section)चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

I_{XX}=I_{XX1} **+**I_{XX2} **+**I_{XX3}

I_{XX}= चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX1}=आयात आकृती-1 चे चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX2}= आयात आकृती-2 चे चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{XX3}= आयात आकृती-3 चे चॅनेल विभागा (C-Section)च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

समांतर अक्षाच्या प्रमेयानुसार

$I_{AB}=I_G + A.\ h^2$

या ठिकाणी

$I_{XX1}= I_{G1} + A_1.\ h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G1} = \frac{bd^3}{12} = \frac{100\times20^3}{12} = 66.667 \times 10^3 \text{mm}^4$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्याX-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_1=Y_1-\bar{Y}$ =90-50 = 40mm

$I_{XX1}=66.667 \times 10^3 + (2000 \times 40^2)$

$I_{XX1}=3.2667 \times 10^6 \text{mm}^4$

आता

$I_{XX2}= I_{G2} + A_2.\ h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G2} = \frac{bd^3}{12} = \frac{20\times60^3}{12} = 360 \times 10^3 \text{mm}^4$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2=Y_2-\bar{Y}$ =50-50 =0mm

$I_{XX2}=360 \times 10^3 + (1200 \times 0^2)$

$I_{XX2}=360 \times 10^3 \text{mm}^4$

आता

$I_{XX3}= I_{G3} + A_3.\ h_3^2$

I_{G3}= आयात आकृती-3 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$I_{G3} = \frac{bd^3}{12} = \frac{100\times20^3}{12} = 66.667 \times 10^3 \text{mm}^4$

h_3=आयात आकृती-3 च्या मध्यबिंदू आणि चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या आडव्या X-X अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_3=Y_3-\bar{Y}$ =10-50 = 40mm

$I_{XX3} = 66.667 \times 10^3 + (2000 \times 40^2)$

$I_{XX3} = 3.2667 \times 10^6 mm^4$

म्हणून एकूण आडव्या X-Xअक्षाला चॅनेल विभागा (C-Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{XX} = I_{XX1} + I_{XX2} + I_{XX3}$

$I_{XX} = 3.2667 \times 10^6 + 360 \times 10^3 + 3.2667 \times 10^6$

$I_{XX} = 6.893 \times 10^6 mm^4$

आता मध्यबिंदूचे आडवे अंतर शोधू म्हणजेच ($\bar{X}$)

$$\bar{X} = \frac{A_1X_1 + A_2X_2 + A_3X_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

X_1=रेषा OB आणि आयत आकृती-1 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

$X_1 = (100/2) = 50$ mm

X_2=रेषा OB आणि आयत आकृती-2 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

$X_2 = (20/2) = 10$ mm

X_3=रेषा OB आणि आयत आकृती-3 च्या मध्यबिंदूपर्यंतचे आडवे अंतर

$X_3 = (100/2) = 50$ mm

$$\bar{X} = \frac{2000 \times 50 + 1200 \times 10 + 2000 \times 50}{2000 + 1200 + 2000}$$

$$X = 40.76\, mm$$

एकूण उभ्या Y-Yअक्षाला चॅनेल विभागा (C-Section) चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = I_{YY1} + I_{YY2} + I_{YY3}$

I_{YY}= चॅनेल विभागा (C-Section)च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

I_{YY1}=आयात आकृती-1 चे चॅनेल विभागा (C-Section)च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

या ठिकाणी

$I_{YY1} = I_{G1} + A_1 . h_1^2$

I_{G1}= आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या Y-Y अक्षालाजडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{G1} = \frac{db^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1.667 \times 10^6 mm^4$$

h_1=आयात आकृती-1 च्या मध्यबिंदू आणि चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Y अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_1 = X_1 - \bar{X}$ = 50-40.76 = 9.24mm

$I_{YY1} = 1.667 \times 10^6 + (2000 \times 9.24^2)$

$I_{YY1} = 1.837 \times 10^6 mm^4$

I_{YY2}= आयात आकृती-2 चे चॅनेल विभागा (C-Section)च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल**(**Moment Of Inertia)

$I_{YY2} = I_{G2} + A_2 . h_2^2$

I_{G2}= आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{G2} = \frac{db^3}{12} = \frac{60 \times 20^3}{12} = 40 \times 10^3 mm^4$$

h_2=आयात आकृती-2 च्या मध्यबिंदू आणि चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्याY-Y अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_2 = X_2 - \bar{X}$ =10-40.76 = 30.76 mm

$I_{YY2} = 40 \times 10^3 + (1200 \times 30.76^2)$

$I_{YY2} = 1.175 \times 10^6 mm^4$

I_{YY3}= आयात आकृती-3 चे चॅनेल विभागा (C-Section)च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्या Y-Yअक्षाला जडत्वाचे परिबल**(**Moment Of Inertia)

$I_{YY3} = I_{G3} + A_3 . h_3^2$

I_{G3}= आयात आकृती-3 च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या Y-Y अक्षाला जडत्वाचे परिबल **(**Moment Of Inertia)

$$I_{G3} = \frac{db^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1.667 \times 10^6 mm^4$$

h_3=आयात आकृती-3 च्या मध्यबिंदू आणि चॅनेल विभागा (C-Section) च्या मध्यबिंदूला असणाऱ्या उभ्याY-Y अक्ष यांच्यातील अंतर

$h_3 = X_3 - \bar{X}$ =50-40.76= 9.24mm

$I_{YY3} = 1.667 \times 10^6 + (2000 \times 9.24^2)$

$I_{YY3} = 1.837 \times 10^6 mm^4$

एकूण उभ्या Y-Yअक्षाला चॅनेल विभागा (C-Section)चे जडत्वाचे परिबल (Moment Of Inertia)

$I_{YY} = 1.837 \times 10^6 + 1.175 \times 10^6 + 1.837 \times 10^6$

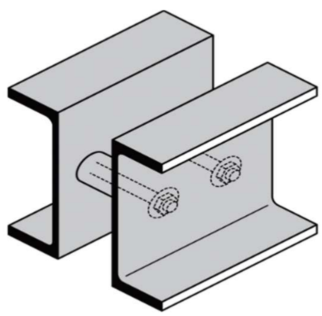
$I_{YY} = 4.850 \times 10^6 mm^4$

1.6 बिल्ट-अप विभाग (Built-up Section):

बिल्ट-अपविभागहे इतरविद्यमानविभागांमधूनतयारकेलेलेविभाग असतात.

बिल्ट-अपविभागांचेगुणधर्मस्त्रोतविभागांचेगुणधर्म, परिमाणआणिअसेंबलीपद्धतयांच्यावरअवलंबून असते.

खालील आकृतीमध्ये दोन C-विभागापासून एक बिल्ट-अपविभाग तयार केला आहे.



तसेच खालील आकृतीमध्ये दोन I-विभागापासून एक बिल्ट-अपविभाग तयार केला आहे.

यूनिट 2:साधे ताण, ताण आणि लवचिक स्थिरांक

SIMPLE STRESSES, STRAINS AND ELASTIC CONSTANT

- **विषय निष्पती (Course outcome):** विविध लोडिंग परिस्थितीत दिलेल्या संरचनात्मक घटकांच्या संरचनात्मक वर्तनाचे विश्लेषण करा.
- **सिद्धांत शिक्षण निष्पत्ती (Theory Learning Outcome):**

TLO.1 विकृत शरीरातील ताण आणि ताणांची संकल्पना समजून घ्या.

TLO.2 हुकचा नियम, लवचिक मर्यादा, रेखीय आणि पार्श्व ताण, पॉयझन्सचे प्रमाण समजून घ्या.

TLO.3 दिलेल्या सामग्रीसाठी लवचिकतेचे मापांक, कडकपणाचे मापांक आणि बल्क मापांक निश्चित करा.

TLO.4 त्यांच्या संबंधित पुराव्याच्या वापरासाठी दिलेल्या लोडिंग परिस्थितीत दिलेल्या सामग्रीसाठी ताण तणाव वक्रचे व्यावहारिक महत्त्व स्पष्ट-करा.

TLO.5 सिंगल शीअर, डबल शिअर आणि पंचिंग शीअरची संकल्पना.

TLO.6 अक्षीय भाराखाली दिलेल्या एकसंध विभागांसाठी एकूण विकृतीची गणना करा.

TLO.7 दिलेल्या संमिश्र विभागासाठी प्रत्येक सामग्रीमधील ताण निश्चित करा.

TLO.8 दिलेल्या द्वि-अक्षीय किंवा त्रि-अक्षीय ताण प्रणालीसाठी x, y आणि z-दिशेसह ताणांची गणना करा.

TLO.9 दिलेल्या घनाकृतीसाठी व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन आणि व्हॉल्यूममधील बदल निश्चित करा.

2.1 परिचय

कोणत्याही इमारतीच्या संरचनेत असे अनेक सदस्य असतात ज्यांवर वेगवेगळ्या भाराने कारवाई केली जाते.सदस्याची रचना करताना, अभियंत्याला लोडिंगचे प्रकार, साहित्याचा प्रकार इ. माहिती असणे आवश्यक आहे.मशीनची रचना करताना विविध घटक आवश्यक आहेत जे विचारात घेतलेल्या परिस्थितीत भार घेण्यासाठी व्यावहारिकतेची रचना केली पाहिजे. काही मूलभूत संकल्पना जसे की तणाव, ताण त्यांचे प्रकार या विषयात समाविष्ट आहेत.

2.1.1 सामग्रीचे यांत्रिक गुणधर्म

आपण धातूंच्या विविध यांत्रिक गुणधर्मांचा अभ्यास करूया, कारण यंत्राच्या घटक भागांची रचना आणि निर्मिती करताना ते खूप महत्त्वाची भूमिका बजावत असेल

यांत्रिक गुणधर्म (MECHANICAL PROPERTIES)

1. लवचिकता
2. प्लास्टिसिटी
3. डक्टीलीटी
4. ठिसूळपणा
5. मेल्याबिलीटी

6. फटिग
7. क्रिप
8. कणखरपणा
9. कडकपणा

1. लवचिकता (Elasticity)

व्याख्या: लवचिकता ही सामग्रीचा गुणधर्म म्हणून परिभाषित केली जाते ज्यामुळे बाह्य भार काढून टाकल्यावर आकार पुन्हा प्राप्त होतो त्याला लवचिकता म्हणतात.

उदा. सर्व धातू.

2. प्लास्टिसिटी (Plasticity)

व्याख्या: ही सामग्रीची मालमत्ता आहे ज्यामुळे सामग्रीचे भार लागू झाल्यावर बिघाड किंवा फाटल्याशिवाय कायमचे विकृतीकरण होते.

3. डक्टीलीटी (Ductility)

व्याख्या: ही सामग्रीची गुणधर्म आहे म्हणून ती परिभाषित केली जाते ज्यामुळे ते तन्य शक्तीच्या वापरावर पातळ तारांमध्ये काढले जाऊ शकते.

उदा. चांदी, ॲल्युमिनियम, सौम्य स्टील इ.

4. ठिसूळपणा (Brittleness)

व्याख्या: तुलनेने कमी प्रमाणात बळ, आघात किंवा शॉक लागू केल्यावर ते फ्रॅक्चर किंवा अयशस्वी होण्याची सामग्रीची प्रवृत्ती आहे म्हणून त्याची व्याख्या केली जाते, त्याला ठिसूळपणा म्हणतात.

5. लवचिकता (Malleability)

व्याख्या: ही सामग्रीचा गुणधर्म आहे ज्यामुळे तो हातोडा मारल्यावर क्रॅक न करता पातळ शीटमध्ये मारला जाऊ शकतो.

उदा. सोने

6. फटिग (Fatigue)

व्याख्या: चक्रीय लोडिंग अंतर्गत भौतिक बिघाड होण्याच्या घटनेला थकवा म्हणतात.

उदा. मशीनचे भाग जसे की एक्सल शाफ्ट स्प्रिंग्स इ. सामान्यतः चक्रीय लोडिंग स्थितीच्या अधीन असतात.

7. क्रिप (Creep)

व्याख्या: बाह्य स्थिर भार लागू केल्यामुळे सामग्रीचे सतत विकृत रूप ज्याला क्रिप म्हणतात.

8. कणखरपणा (Toughness)

व्याख्या: कणखरपणा ही सामग्रीचा गुणधर्म आहे जो अचानक झालेल्या धक्क्याने तुटत नाही. शॉक लोडिंगचा सामना करण्याची सामग्रीची क्षमता म्हणून हे फक्त व्यक्त केले जाते.

सामग्रीचा प्रतिकार म्हणजे प्लास्टिकच्या विकृतीला प्रतिकार करण्याची सामग्रीची क्षमता, सामान्यत:

इंडेंटेशनद्वारे परिभाषित केली जाते.

9. कडकपणा (Hardness)

सामग्रीचा प्रतिकार म्हणजे प्लास्टिकच्या विकृतीला प्रतिकार करण्याची सामग्रीची क्षमता, सामान्यत:

इंडेंटेशनद्वारे परिभाषित केली जाते.

हा धातूचा गुणधर्म आहे जो भार लागू केल्यावर कायमस्वरूपी विकृत होण्याचा प्रतिकार करण्याची क्षमता देतो.

साहित्याचा कडकपणा जितका जास्त तितका विकृत होण्यास जास्त प्रतिकार असतो.

2.2 वस्तूचे प्रकार

शरीराचे तीन प्रकार आहेत:

(1) लवचिक वस्तू

(2) प्लास्टिक वस्तू

(३) कठोर वस्तू

1. लवचिक वस्तु (Elastic body)

एक वस्तु बल लागू केल्यावर त्या वस्तूच्या स्वरूप आणि आकारात बदल घडून येतो आणि बल काढून टाकल्यावर त्या वस्तूचे मूळ स्वरूप आणि आकार परत मिळळविले जाते अश्या वस्तूस लवचिक वस्तु म्हणून ओळखले जाते.

उदाहरण- 1) क्वार्ट्ज फायबर 2) फॉस्फर 3)कांस्य 4) रबर बँड.

2. प्लास्टिक बॉडी (plastic body)

व्याख्या जेव्हा: वस्तु वर बाह्य भार लावला जातो जो कायमस्वरूपी विकृत होतो आणि बाह्य भार काढून टाकल्यानंतर वस्तू त्याचे मूळ आकारमान प्राप्त करू शकत नाही त्याला प्लास्टिक बॉडी म्हणतात.

उदाहरण- 1)प्लास्टिक 2)मेण 3)पुट्टी इ.

3. कठोर वस्तू (Rigid body)

ज्या शरीराच्या परिमाणात बाह्य बला मुळे कोणताही बदल होत नाही त्याला कठोर वस्तु असे म्हणतात. व्यावहारिकदृष्ट्या, कोणतेही शरीर पूर्णपणे कठोर नसते परंतु अभियांत्रिकी अनुप्रयोगांसाठी ते कठोर मानले जाते.

उदाहरण-1) दगड 2)हिरा

2.2.1 विरूपण (Deformation)

व्याख्या: जेव्हा लवचिक वस्तू बाह्य शक्तीच्या अधीन असते तेव्हा आकार आणि आकारात काही बदल

होतात. वस्तूच्या परिमाणांमध्ये बदल. बाह्य शक्तीमुळे वस्तूच्या आकारमानात होणाऱ्या या बदलाला

विकृती म्हणतात.s

2.3 भारांचे प्रकार (Types of loads)

1) थेट भार (अक्षीय भार) (Direct load)

2) विक्षिप्त भार (Eccentric load)

3) शिअर लोड (Shear load)

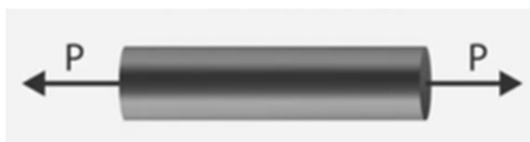
1) थेट भार (अक्षीय भार) (Direct load)

a) तन्य भार (Tensile load)

b) संकुचित भार (Compressive load)

1. थेट भार (Direct load)

जेव्हा एखादे भार एखाद्या वस्तूवर कार्य करत असते ज्याच्या रेषेची क्रिया वस्तूच्या अक्षाशी जुळते तेव्हा थेट भार तन्य स्वरूपाचा म्हणजेच खेचणारा असू शकतो त्याला थेट भार म्हणतात.

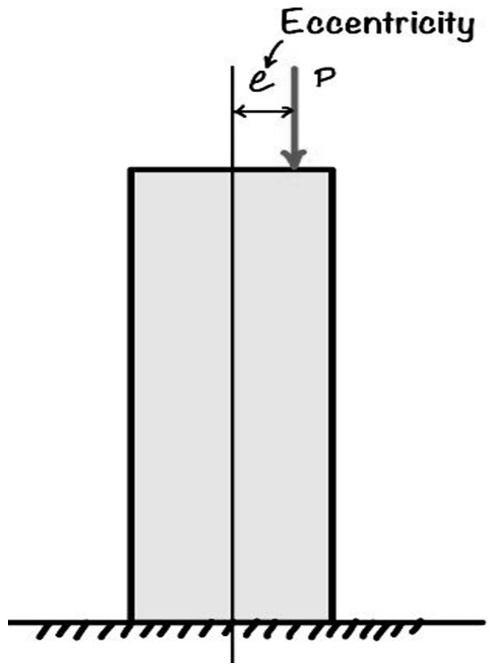


P = तन्य भार, L = सदस्याची लांबी संकुचित निसर्ग म्हणजेच पुशिंग नेचर

पी कंप्रेसिव्ह लोड =, एल सदस्याची लांबी =

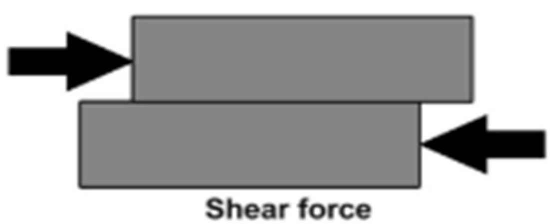
2. विक्षिप्त भार (Eccentric load)

व्याख्या: जेव्हा एखादे भार वस्तूवर कार्य करत असते ज्याच्या क्रियेची रेषा शरीराच्या अक्षाच्या आत एकत्र येत नाही तेव्हा त्याला विक्षिप्त भार असे म्हणतात.



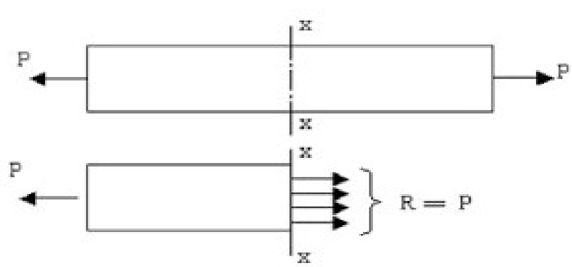
आकृतीमध्ये दर्शविल्याप्रमाणे विक्षिप्त भार सदस्याच्या अक्षापासून विक्षिप्तपणाने कार्य करत आहे.

3 . शिअर लोड (Shear load)
व्याख्या विचारात घेतलेल्या पृष्ठभागावर स्पर्शिक :कार्य करणाऱ्या भाराला शिअर लोड म्हणतात.



2.4 ताण (σ) (Stress)

जेव्हा लवचिक शरीरावर काही भार पडतो तेव्हा शरीरात काही विकृती होते.
व्याख्या: प्रति युनिट क्रॉस सेक्शनच्या विकृतीच्या विरूद्ध वस्तूच्या अंतर्गत प्रतिकार शक्तीला ताण म्हणतात.



ताण 'o' फोर्स क्रॉस सेक्शनल एरिया द्वारे दर्शविला जातो एकक N/mm^2 आहे

ताण σ= सेक्शनल -----------

जर]P बल N मध्ये असेल आणि क्रॉस विभागीय क्षेत्र A mm[मध्ये असेल तर ^{2}

i) आयताकृती विभागासाठी ताण खालीलप्रमाणे मोजला पाहिजे:

(ii) गोलाकार विभागासाठी ताण खालीलप्रमाणे मोजला जावा:

d = वर्तुळाकार रॉडचा व्यास

खालीलप्रमाणे तणावाचे विविध प्रकार आहेत:

तणावाचे प्रकार

थेट ताण किंवा
किंवा (साधा ताण)
(सामान्य ताण)

अप्रत्यक्ष ताण

एकत्रित ताण
प्रकार)1 आणि 21 चे
कोणतेही संभाव्य संयोजन

ताणतणाव
संकुचित ताण

वाकणे
टॉर्शन

कातरणे ताण

1. थेट ताण किंवा साधा ताण (Direct stress or simple stress)

हा ताण थेट लोडिंगच्या परिस्थितीमुळे विकसित होतोभार निसर्गाचा ताण किंवा कॉम्प्रेशन असू शकतो .

सामान्य ताण(normal stress)

व्याख्या: जो ताण सामान्य (उदा. लंब) विमानावर कार्य करेल ज्यावर शक्ती अक्षीयपणे कार्य करेल त्याला सामान्य ताण म्हणतात.

ताणतणाव (tensile stress)

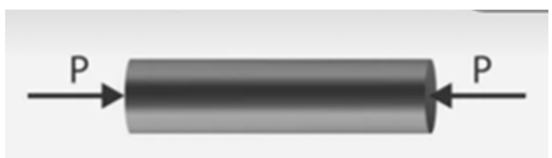
व्याख्या: जेव्हा वस्तूवर दोन समान आणि विरुद्ध खेचले जातात तेव्हा वस्तूवर ताण येतो आणि त्यामुळे तणाव निर्माण होतो त्याला तन्य ताण म्हणतात.

कुठे, A = क्रॉस सेक्शनचे क्षेत्र

P = तन्य किंवा ओढणारा भार लागू

संकुचित ताण (compressive stress)

व्याख्या: जेव्हा वस्तूवर दोन समान आणि विरुद्ध धक्के लावले जातात तेव्हा वस्तूवर कॉम्प्रेशन होते आणि त्यामुळे तणाव निर्माण होतो त्याला कंप्रेसिव्ह स्ट्रेस म्हणतात.



ताण $\sigma = P/A$

कुठे, A = क्रॉस सेक्शनचे क्षेत्र

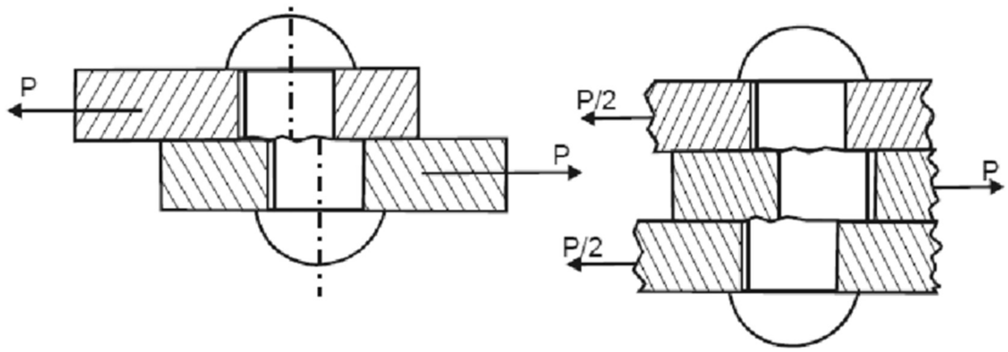
P = संकुचित किंवा पुशिंग लोड लागू

2. कातरणे ताण q किंवा τ (Shear stress)

व्याख्या: जेव्हा दोन समान आणि विरुद्ध शक्ती वस्तूवर स्पर्शिक रीतीने कार्य करतात त्यामुळे वस्तू या तणावामुळे संपूर्ण विभागात सरकते तेव्हा त्याला कातरणे ताण म्हणतात.

नोटेशन → q or t

त्याचे S.I युनिट N/mm^2 आहे.



(a) (b)

वाकणारा ताण (Bending stress)

व्याख्या: जेव्हा तुळई बाह्य लोडिंगच्या अधीन असते तेव्हा अनुलंब लागू होते, तेव्हा वाकण्यासाठी अंतर्गत ताणांद्वारे ऑफर केलेल्या प्रतिकारांना बेंडिंग स्ट्रेस असे म्हणतात.

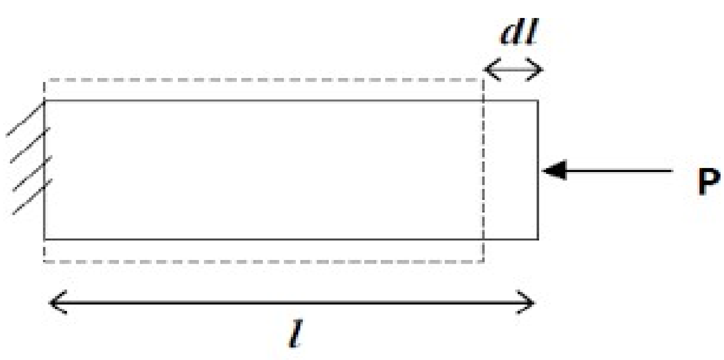
2.5 ताण (Strain)

व्याख्या: लवचिक पदार्थ किंवा लवचिक वस्तू अक्षीय भाराच्या अधीन असल्यास ते परिमाणांमध्ये बदलते. प्रति मूळ परिमाणातील या बदलाला स्ट्रेन असे म्हणतात.

गणितानुसार, ताण = परिमाण मूळ /परिमाणात बदल

एकक: ताण म्हणून कोणतेही एकक समान प्रमाणाचे गुणोत्तर नाही.

1. **रेखांशाचा ताण किंवा रेखीय ताण (longitudinal strain or linear strain)**



व्याख्या: जेव्हा लवचिक वस्तूाचे वस्तू किंवा लवचिक सामग्री P लोडच्या अधीन असते तेव्हा लागू बलाच्या दिशेने लांबीमध्ये बदल होतो. प्रति युनिट मूळ लांबीमधील या बदलाला अनुदैर्ध्य किंवा रेखीय ताण म्हणतात.

रेखांशाचा ताण 8L किंवा रेखीय ताण मूळ लांबीमध्येबदल =

जेथे, L मूळ लांबी SL वरील आकृती 2.5.2 मध्ये

-दर्शविल्याप्रमाणे शरीरावर तन्य भार लागू केल्यास लांबी 8L मध्ये बदल वाढत जाईल.

-शरीरावर संकुचित भार लागू केल्यास 8L कमी होईल.

2. बाजूकडील ताण (Lateral strain)

व्याख्या: जेव्हा लवचिक वस्तू अक्षीय भाराच्या अधीन असते तेव्हा रुंदी आणि जाडी Le मध्ये बदल होतो.

आयताकृती वस्तूाचे पार्श्व परिमाण आणि वर्तुळाकार पट्टीच्या बाबतीत व्यासातील बदल. त्यामुळे पार्श्व परिमाणे आणि मूळ परिमाणातील बदलाच्या गुणोत्तराला लॅटरल स्ट्रेन असे म्हणतात.

पार्श्व ताण =रुंदी मध्ये बदल/ मूळ रुंदी

= जाडी मध्ये बदल /मूळ जाडी

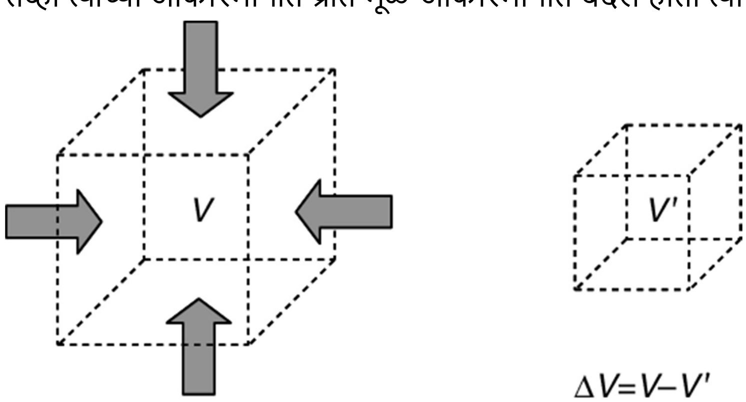
गोलाकार पट्टीसाठी,

व्यास मध्ये 8d बदल

पार्श्व ताण = डोरिजिनल व्यास

3. व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन (ई) (Volumetric strain)

व्याख्या: जेव्हा लवचिक वस्तू किंवा लवचिक पदार्थ त्याच्या चेहऱ्यावर काही बाह्य भार लागू करतात तेव्हा त्याच्या आकारमानात प्रति मूळ आकारमानात बदल होतो त्याला व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन म्हणतात.

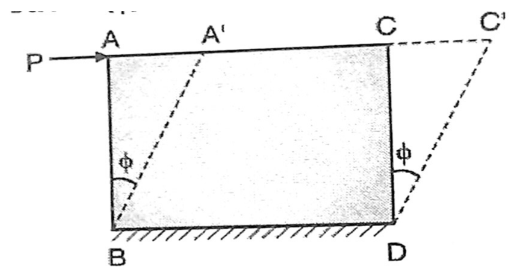


व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन (ev) = व्हॉल्यूम मूळ /व्हॉल्यूममध्ये बदल

जेथे SV शरीराच्या आवाजात बदल होतो

V = शरीराची मूळ मात्रा

4. कातरणे)$) (Shear strain)



जर आपण कातरणे लोड p लागू केले, तर एक कातरण ताण तयार होईल जो वस्तू ज्या कोनाने हलतो त्या कोनाद्वारे मोजला जातो.

मध्ये 2.5.3 ABCD हा आयताकृती ब्लॉक आहे जो एका चेहऱ्यावर निश्चित केला आहे

- d बल P लावायचे आहे .P बळ लागू केल्यानंतर ते एका कोनातून विघटित होते आणि BA' C' D चे नवीन स्थान व्यापते.

= $('.* $ खूप लहान आहे(

2.6 लवचिकता (Elasticity)

व्याख्यालवचिकता अशी व्याख्या केली जाते कारण ती सामग्रीचा गुणधर्म आहे ज्यामुळे बाह्य भार : काढूनटाकल्यानंतर सामग्री पुन्हा मूळ आकार आणि आकार प्राप्त करते त्याला लवचिकता (परिमाण) .म्हणतात

2.7 हुकचा नियम (Hook's law)

व्याख्या: लवचिकता अशी व्याख्या केली जाते कारण ती सामग्रीचा गुणधर्म आहे ज्यामुळे बाह्य भार काढून टाकल्यानंतर सामग्री पुन्हा मूळ आकार आणि आकार (परिमाण) प्राप्त करते त्याला लवचिकता म्हणतात.

रॉबर्ट हूक यांनी प्रायोगिकरित्या शोधून काढले की, लवचिक मर्यादित, ताण ताणाच्या थेट प्रमाणात असतो.

गणितानुसार, ताण = ताण = स्थिर = E/e

जेथे E ला लवचिकतेचे मापांक किंवा तरुणांचे मापांक असे म्हणतात.

2.8 मॉड्युलस ऑफ लवचिकता किंवा तरुणांचे मॉड्यूलस "ई" (Modulus of elasticity or young's modulus "E")

व्याख्या: लवचिक मर्यादेच्या आत, ताण हा ताणाच्या थेट प्रमाणात असतो आणि ताण आणि ताणाचे गुणोत्तर स्थिर असते आणि या स्थिरतेला लवचिकतेचे मापांक किंवा यंग्स मॉड्यूलस म्हणतात.

हे तन्य ताण ते तन्य ताण किंवा संकुचित ताण आणि संकुचित ताण यांचे गुणोत्तर आहे. E= e = मॉड्युलस किंवा तरुणांच्या मापांकाची लवचिकता.

2.9 कडकपणाचे मॉड्यूलस (Modulus of rigidity)

व्याख्या: हे कातरणे ताण आणि कातरणे ताण यांचे गुणोत्तर म्हणून परिभाषित केले जाते त्याला कडकपणाचे मॉड्यूलस म्हणतात.

हे C, G किंवा N द्वारे दर्शविले जाते

S. I. एकक N/mm^2 आहे

लवचिक मर्याद (elastic limit):

व्याख्या .मूल्य आहे ज्यापर्यंत सामग्री पूर्णपणे लवचिक म्हणून वागते हे जास्तीत जास्त ताणाचे :

शरीराच्या अक्षीय भार विकृतीवर सोडवलेले अंक

काही महत्त्वाची सूत्रे:

P ताण () == क्रॉस सेक्शन एरिया सक्तीने लागू केला

ताण (e) = परिमाण मूळ आकारमानात बदल

लवचिकतेचे मॉड्यूलस "ई" = विरूपण ताण / ताण = PLL = 8L = AB AE e = PLA

काही महत्त्वाची रूपांतरणे

1. 1 मी =1 x 103 मिमी; 1 मी =1 × 102 सेमी

2. 1 मिमी =1 x 10-3 मी; 1 सेमी =1 × 10-2 मी

3. 1 MPa = 1 N/mm^2

4. 1 GPa = 1 kN/mm^2 = 1 x 103 N/mm^2

५.1 kN=1x 103 N

6. 1 N=1× 10-3 kN

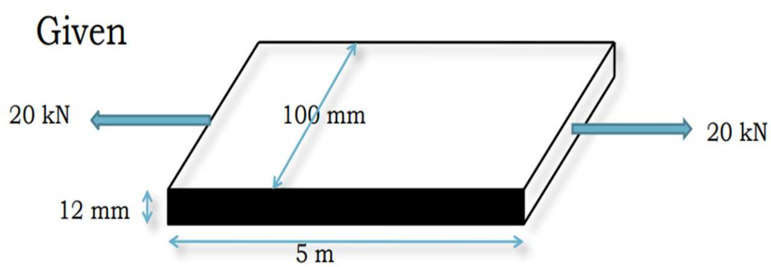
7. 1 Pa = 1 पास्कल =1 N/m^2 = 1 x 10-6 N/mm^2

8. 1 KPa = 1 किलो पास्कल =103 Pa = 1 × 10-3 N/mm2

9. 1 GPa = 1 गिगा पास्कल =10^9 Pa = 103 N/mm^2

काही उदाहरणे :

प्रा ०१ 100 मिमी रुंद, 12 मिमी जाड आणि 5 मीटर लांब सपाट स्टीलचा पत्रा हा 20 kN चा अक्षीय भार असतो सहन करतो . ताण (stress) आणि strain आणि लांबीमध्ये बदल शोधा.
take घ्या, E=2.1×10^5 Mpa.



1) To find stress/ तणाव शोधण्य करिता (σ) -

We know that)आपणास माहित आहे कि(, σ = P/A

P = 20×10^3 N

A= c/s area = b×t

A= 100×12=1200 mm2.

Stress (σ)= **(20×103)/(1200)**

Stress (σ)= 16.67 N/mm2.

- **2) To find strain (e)** strain शोधण्य करिता **-**

We know that, E = σ /e Or e = δL/L

e = σ /E

e = 16.67/2.1×105

e = 7.938×10-5

3) To find change in length (δL)/ लांबी मध्ये झलेला बदल शोधण्य करिता -

We know that, e = δL/L or δL=PL/AE

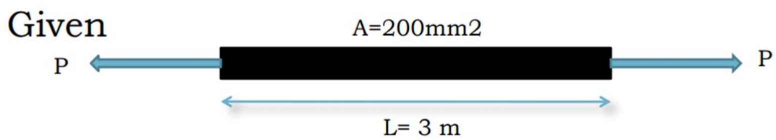
Now, e = δL/L

- 7.938×10^{-5} = δL/5000
- 7.938×10^{-5} ×5000 = δL
- δL= 0.397 mm = 0.4mm
-

Alternative पर्यायी/

- $\delta L = PL/AE$
- $\delta L = (20\times10^{3}\times5000)/(1200\times2.1\times10^{5})$
- $\delta L = 0.397$ mm.

प्रा ०१) क्रॉस सेक्शनल एरिया 200 mm2 चा एक पट्टी 'P' KN द्वारे अक्षरीत्या(axilly) खेचली जाते. जर बारमध्ये जास्तीत जास्त ताण 30 एमपीए(MPA) असेल. 'P' शोध .व 3 मीटरच्या गेज लांबीवर 1.2 मि.मी.चा विस्तार आल्यास . Youngs मॉड्यूलस E शोधा .



- A= Cross sectional Area= 200 mm2
- σ =maximum stress = 30 Mpa= 30 N/mm2
- L= Gauge length=3m = 3000mm
- **δL** = change in length =1.2 mm

To find, Axial Pull (P), Young's modulus(E).
We know that,

$\sigma = P/A$

$30 = P/200$

P=6000 N

Now, $E = PL/A\delta L$

$E = (6000\times3000)/(200\times1.2)$

$E = 75000$ N/mm2

E = 75 KN/mm2

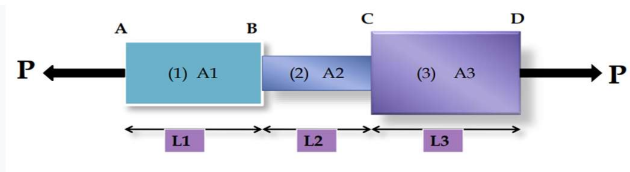
- वेगवेगळ्याcross section च्या तुकड्या मध्ये अक्सीय बलामुळे तयार होणारे :(तणाव)stress

Deformation of body or Bars of stepped cross-section subjected to Axial load:
खाली दर्शविलेल्या आकृती मध्ये भिन्न पदार्थ अथवा एकसमान पदार्थ यांच्या पासून सारख्या व्यास अथवा परिमाणाचा किंवा भिन्न परिमाणाच्या तुकड्या वरती दोन्ही शेवटच्या टोकांवर बाह्य बल लहू केल्यास एकूण लांबी मध्ये मिळणारे बदल बघू:
आपणास04 प्रकारचे संयोजनcombinations / मिळतील ती खालील प्रमाणे:

1) एकसमान पदार्थ पासून बनलेला / BAR तुकडा एकाच भागचा अखंड तुकडा BAR /
2) एकसमान पदर्थ पासून बनलेला मात्र भिन्न section-cross असलेला दोन किंवा अधिक भागांचा मिळून बनलेला तुकडाBAR /

3) एकसमान परिमाण Dimenstion uniform /असलेला आणि भिन्न पदार्थांचा मिळून बनलेला तुकडाBAR /
4) भिन्न भिन्न पदार्थान पासून बनलेला आणि भिन्न section-cross असलेला तुकडा BAR/

आता आपण एकसमान (uniform) किंवा भिन्न cross-section असलेला BAR वरती अक्षीय axil बल बाह्यरित्या(Externally) लागू केल्यास तयार होणाऱ्या stress आणि लांबी बदल्यास होणाऱ्या strain चा अभ्यास करूया



Metal bar of varying Cross section

आता वरील बार ला सुटे भाग करून विचारात घेऊ :

$_1$Aभागाची बदलेली लांबी δL $=_1PL/\ _1A_1E_1$

δL =1Change in length for section-1

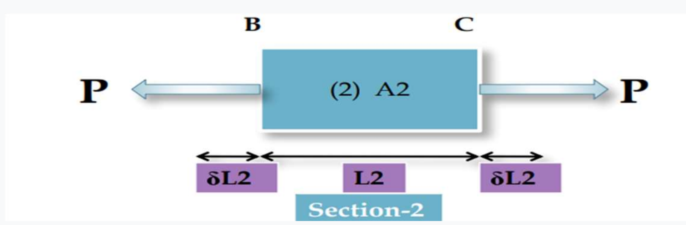
P = Axial Force

L = 1Length of section-A भाग /1 ची लांबी

A=$_1$Area of section-A भाग /1 चे section area-rossc

E=1Modulus of elasticity of section- 1

आता बार च्या A 2 भागाचा विचार करू :



बारच्या $_1$Aभागाची बदलेली लांबी δL_2 $=PL/\ _2A_2E_2$

δL =$_2$Change in length for section- 2

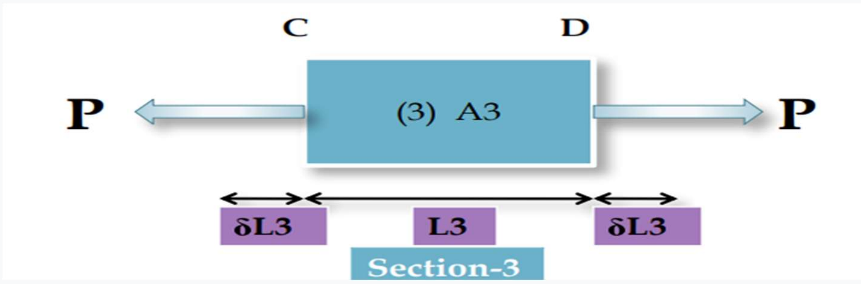
P = Axial Force

L = $_2$Length of section-$_2$A भाग / 2 ची लांबी

A=$_2$Area of section- / 2भाग$_2$A चे ction arease-cross

E=$_2$Modulus of elasticity of section- 2

आत्ता भाग $_3$A चा विचार करूया:



$_3$Aभागाची बदलेली लांबी δL_3 =PL/ $_3$A $_3$E $_3$

δL =$_3$Change in length for section- 3

P = Axial Force

L = $_3$Length of section- $_3$A भाग / 3 ची लांबी

A= $_3$Area of section- $_3$A भाग / 3 चे area section-cross

E= $_3$Modulus of elasticity of section- 3

चला, δL बदललेली लांबी हि सर्व विभागांसाठी अक्षीय बल 'P' मुळे बार ABCD च्या लांबीमध्ये एकूण बदल.

δL = (भाग 1-च्या लांबीमध्ये बदल 2-भाग) +(च्या लांबीमध्ये बदल3-भाग) +(च्या लांबीमध्ये बदल

$\delta L = \delta L +_1 \delta L + {}_2\delta L_3$

लक्षात घ्या की पट्टीचा कोणताही भाग समान अक्षीय बल)P) पुल किंवा पुशच्या अधीन असेल.

आणि जर तुकड्या चे सर्व भाग हे एकाच पदार्थ पासून बनलेले असतील तर हे s Modulus'Young सर्वभागां करिता समान असेल.

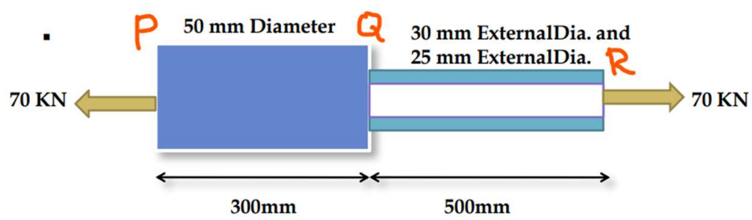
$$\delta L = \frac{F\,L\,1}{A1\,E} + \frac{FL2}{A1\,E} + \frac{FL3}{A3\,E}$$

आणि जर तुकड्या च्या वेगवेगळ्या भागाची निर्मिती वेगवेगळ्या पदार्थान पासून झालेली असल्यास .भिन्न असेल-चे मूल्य हि भिन्न s Modulus'Young

जसे कि :

$\delta L = \frac{F L1}{A1\,E1} + \frac{FL2}{A1\,E2} + \frac{FL3}{A3\,E3}$

प्रा ०१) आकृती मध्ये दर्शविलेल्या बार PQR चा विस्तार शोधा, $E=20\times10^4$ N/mm^2.



उत्तर :

- P = Axial tensile force तन्यक बल = 70KN
  - $P = 70 \times 10^3$ N.
  - D1 = Diameter of section-1 1– भाग / चा व्यास
    = 50 mm
  - A1 = Area of section-1 1– भाग /चा क्षेत्रफळ

$A_1 = \frac{\pi}{4} * (D^2) = \frac{\pi}{4} * (50^2) = 1963.5\ mm^2$

  - D2 = External Diameter of section-2
    = 30 mm
  - d2 = Internal diameter of section-2
    = 25 mm.
  - A2 = Area of section-2
    A2 = = = 215.98 mm2
  - E = young's modulus
  - $E = E=20\times 10^4$ N/mm2.
  - **To** find elongation of bar (δL**) = ?**
  - $\frac{\pi}{4} * (D^2 - d^2) \quad = \frac{\pi}{4} * (30^2 - 20^2)$
  - Let,

δL = Total elongation due to axial load

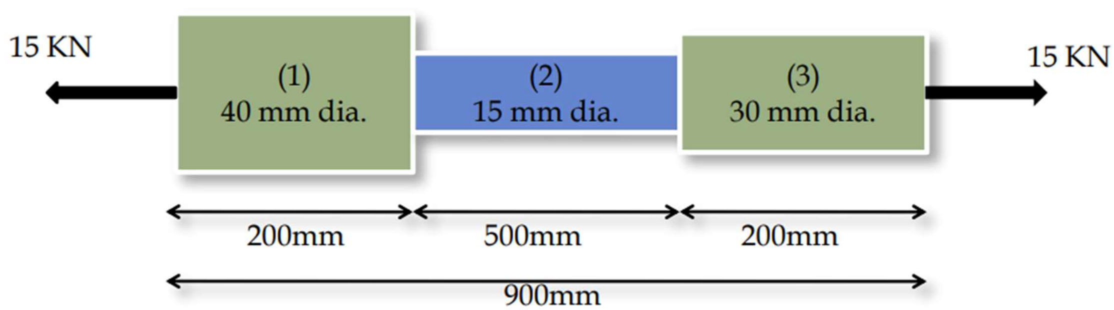
$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2$

$$\delta L = \frac{F\,L1}{A1\,E} + \frac{FL2}{A1\,E}$$

$$\delta L = \frac{70*10^{3}*300}{1963.5*20*10^{4}} + \frac{70*10^{3}*500}{215.98*20*10^{4}} = \mathbf{0.863\ mm.}$$

δL = 0.863 mm.

प्रा ०१ एक स्टील बार 900 मिमी लांब आहे तीन भागांचा मिळून बनलेला असून ; त्याची दोन टोके 40 मिमी आणि 30 मिमी व्यासाची आहेत आणि त्या टोकाच्या दोन्ही भागाची लांबी 200 मिमी आहे. बारचा मध्य भाग 15 मिमी व्यासाचा आणि 500 मिमी लांब आहे. जर बार 15 kN च्या अक्षीय तन्य भाराच्या अधीन असेल, तर त्याचा एकूण विस्तार म्हणजेच लंबित झलेला बदल (**δL**) शोधा.



Given/ दिलेली माहिती

Total length एकूण लांबी = 900 mm.

Axial tensile load अक्षीय तन्यक बल = 15 KN

Let, Assume चला गृहीत धरूया कि

Youngs modulus = E= 2×10^{5}N/mm2

Total elongation, लंबित झलेला एकूण बदल:

$$\delta L = \frac{F\,L1}{A1\,E1} + \frac{FL2}{A1\,E2} + \frac{FL}{A3\,E3}$$

δL =?

Where/ जिथे

P1= P2= P3=P =15 KN = 15×10^{3} N

E1 =E2= E3= E= 2×10^{5} N/mm2

A1= c/s Area of section-1/ भाग 1–चा क्षेत्रफळ

$$A1 = \frac{\pi}{4} * (D1^{2})$$

D1 = Diameter of section-1/ भाग –1 चा व्यास = 40mm

A1 = $\frac{\pi}{4} * (40^2)$ = 1256.63 mm2

L1 = length of section-1/ भाग-1 ची लांबी = 200 mm

A2= c/s Area of section-2/ भाग –2 चा क्षेत्रफळ

A2 =$\frac{\pi}{4} * (D2^2)$

D2 = Diameter of section-2/ भाग –2 चा व्यास = 15mm

A2 = $\frac{\pi}{4} * (15^2)$

= 176.714 mm2

L2 = length of section-2/ भाग-2 ची लांबी = 500 mm

A3= c/s Area of section-3/ भाग-3 चे क्षेत्रफळ

A3 = $\frac{\pi}{4} * (D3^2)$

D3 = Diameter of section-3/ भाग-3 चा व्यास = 30mm

A3 = $\frac{\pi}{4} * (30^2)$ = 706.858 mm2

L3 = length of section-3/ भाग -3 ची लांबी = 200 mm

लंबित झलेला एकूण बदल :

$$\delta L = \frac{F L 1}{A1\,E1} + \frac{FL2}{A1\,E2} + \frac{FL3}{A3\,E3}$$

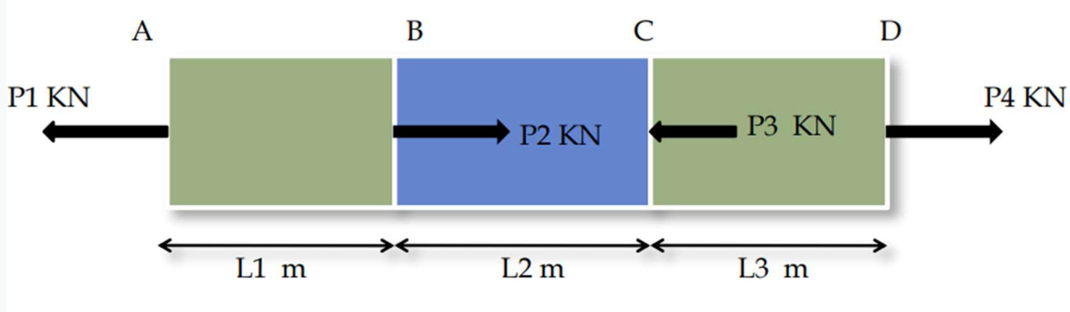
$$\delta L = \frac{15 * 10^{3} * 200}{1256.63 * 2 * 10^{5}} + \frac{70 * 10^{3} * 500}{176.714 * 2 * 10^{5}} + \frac{15 * 10^{3} * 200}{706.858 * 2 * 10^{5}}$$

δL = 0.0119 + 0.212 + 0.0212

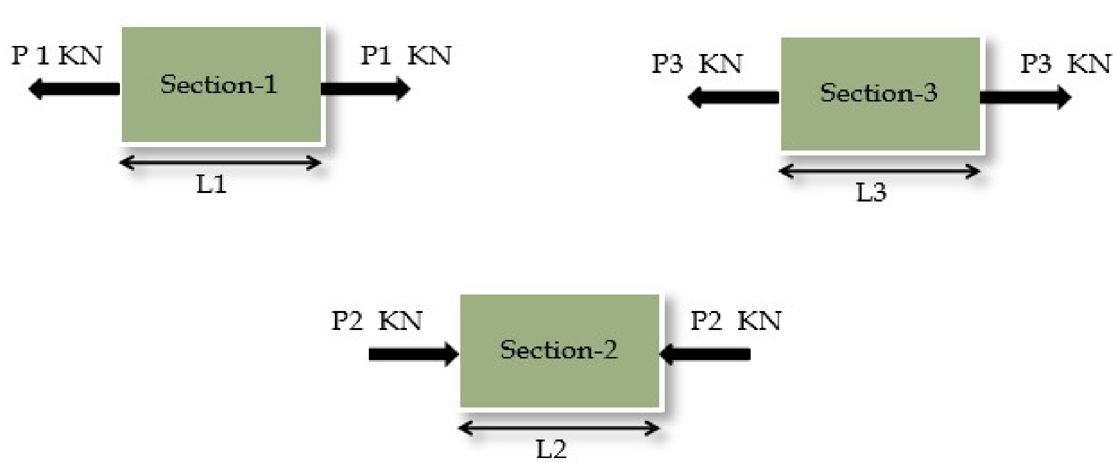
δL **= 0.245 mm.**

- आता आपण एकसमान)uniform) किंवा भिन्न cross-section असलेला BAR वरती अक्षीय axil बल बाह्यरित्या व आंतर्रीत्या)Externally? Internally) लागू केल्यास तयार होणाऱ्या stress आणि लांबी बदल्यास होणाऱ्या strain चा अभ्यास करूया.
- **Sign Convention.**

➡ ***+ve ,*** ⬅ ***-ve***

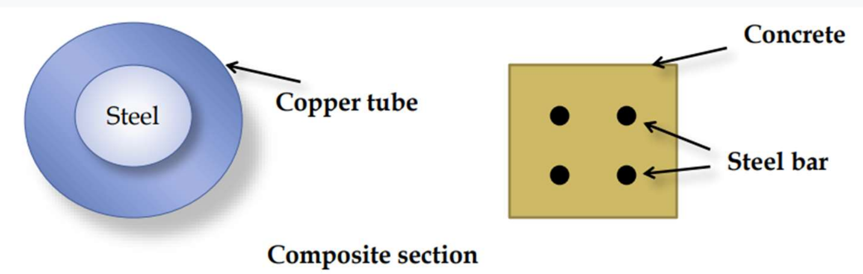


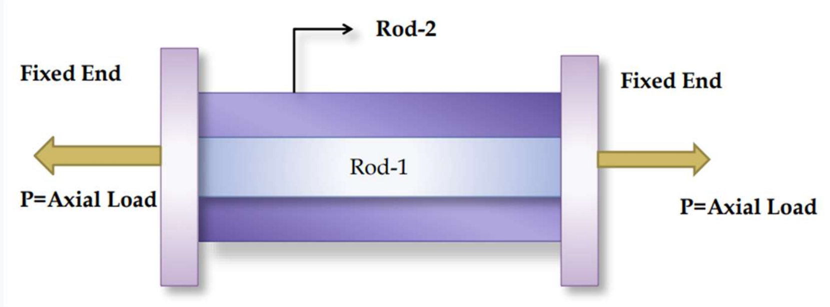
वरील आकृतीतील सर्व भागांचा स्वतंत्र विचार केला असता खालील आकृती मिळेल:



- जेव्हा : composite section भिन्न पदार्थापासून बनलेला दोन किंवा अधिक धातूच्या तुकड्यांना जोडून तयार करण्यात येणाऱ्या तुकड्यावर जेव्हा कुठल्या हि दिशेनी अथवा दिशांनी बल कार्यान्वित केले जाते त्या वेळेस त्या तुकड्याच्या दोन्ही पदार्थांन पासून बनलेल्या तुकड्यांच्या परिमाणात सारखा बदल घडून येतो.

मात्र या भिन्न पदार्थांन मध्ये तयार होणारा तणाव /stress हा भिन्न असेल .

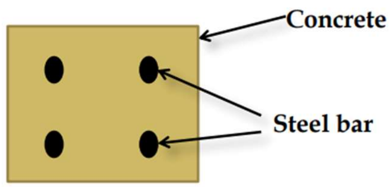




- **मॉड्यूलर गुणोत्तर (m) (Modular Ratio) :-** मॉड्यूलर गुणोत्तर म्हणजेच दोन भिन्पादार्थांच्या लवचिकता (Modulus of elasticity or youngs modulus) गुनाकांचे गुन्नोतर होय .
- ते ‘m’ या आद्याक्षराने दर्शवले जाते .
- $m = \frac{E1}{E2}$
- Note:- E1>E2

उदाहरणे

प्रा ०१) . 20 मिमी व्यासाच्या 4 स्टील बारसह मजबूत केलेल्या विभाग (concret section) जो 400 मिमी चौरस काँक्रीट स्तंभ (coloumn) असून 1000 KN अक्षीय भार वाहून नेतो. प्रत्येक पदार्थ (material) मध्ये प्रेरित ताण शोध करा. Es=18 Ec घ्या



Composite section

Size of column स्तंभाचे परिमाण = 400mm X 400mm

Diameter of steel bar स्टील तुकड्याचा व्यास = d= 200mm

Total no. of steel bar एकूण स्टील चे तुकडे = 4

Axial load अक्सीयबल P= 1000 KN= 1000×10^3 N

Es = 18 Ec

(Es/Ec)=18

Es = स्टील तुकड्याची Modulus of elasticity

Ec =काँक्रीटच्या तुकड्याची Modulus of elasticity

To Find Stresses in each material, i.e. σs and σc

चला,

σs s = स्टील बारमधील ताण

σc = काँक्रीटमधील ताण

A = स्तंभाचे एकूण क्षेत्रफळ

$A = 400 \times 400 = 160 \times 10^3\ mm^2$

जसे = स्टीलचे C/S क्षेत्र

$= 4\times \frac{\pi}{4} X\ 20^2 = 1256.637$ mm2.

Ac= C/S concrete चा क्षेत्रफळ

Ac = A - As

= 160 × 103 - 1256.637

Ac = 158.743 × 103 mm2.

L1= Length of rod-1 concrete रोड ची लांबी

L2= Length of rod-2 स्टील रोड ची लांबी

i.e. L1=L2

Ps= Load shared by steel स्टील रोड मध्ये आलेला तणाव

Pc= Load shared by concrete conctrete रोड मध्ये आलेला तणाव

$\delta L\ 1 = \delta L\ 2$

$\frac{FL}{A1E1} = \frac{FL}{A2E2}$

$= \frac{F}{A1E1} = \frac{F}{A2E2}$

We Know that,

$\sigma = P/A$

$\sigma_s/E_s = \sigma_c/E_c$

$\sigma_s = \sigma_c\ (E_s/E_c)$

$\sigma_s = m\ \sigma c$

$\sigma_s = 18\ \sigma c$-------(1)

--------m=(E1/E2)=18

Now Total Axial load,

$P = Ps + Pc$

$P = \sigma_s As + \sigma_c Ac$

$1000\times 10^3 = 18\sigma_c \times 1256.637 + \sigma_c\ 158.743 \times 10^3$

$1000\times 10^3 = \sigma_c\,(181.3624 \times 10^3)$

$\sigma_c = (1000\times 10^3)/(181.3624 \times 10^3)$

$\sigma_c = 5.51\ N/mm^2$.

Hence stress in concrete is = $5.51\ N/mm^2$.

From equation (1)

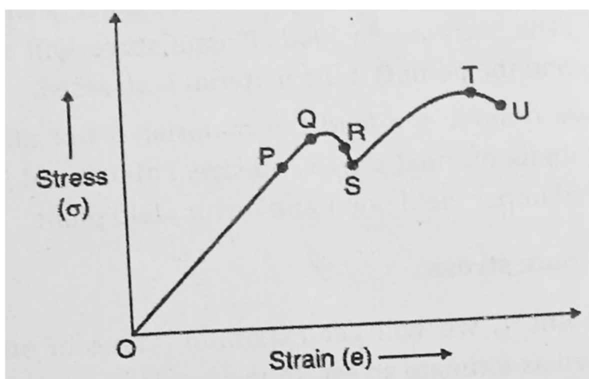
$\sigma_s = 18\,\sigma_c$

$\sigma_s = 18 \times 5.51$

$\sigma_s = 99.18$ N/mm2

Hence stress in steel is = 99.18 N/mm2
= $11{,}428.57\ N/mm^2$

2.10 सौम्य स्टील बारसाठी मानक ताण ताण वक्र (standard stress strain curve for mild steel bar)



गुणांचे संकेत:

पी आनुपातिक मर्यादा =

Q लवचिक मर्यादा

आर वरचा उत्पन्न बिंदू =

S = कमी उत्पन्न बिंदू

टी= अंतिम लोड पॉइंट

यू ब्रेकिंग पॉइंट =

- (UTM) (युनिव्हर्सल टेस्टिंग मशीनवर सौम्य स्टील मटेरियल टेस्टिंग नमुन्यावर टेन्साइल लोड (.लागू करून तन्य चाचणी घेतली जाते
- जसजसे आपण नमुन्यावरील भार वाढवतो तसतसा ताण निर्माण होईल आणि त्या ताणाशी संबंधित ताण देखील प्रेरित होईल.
- खालील काही मुद्द्यांवर चर्चा करणे आवश्यक आहे जे ताण तणाव वक्र वर आहेत.

P→ आनुपातिक मर्यादा (Proportional limit):

- जर तन्य बल सौम्य स्टीलच्या पट्टीवर लागू केले असेल तर त्याला काही विस्तार मिळेलजर बल . लहान असेल तर ताण आणि ताण यांचे गुणोत्तर समानुपातिक राहील आणि आलेख बिंदू P पर्यंत सरळ रेषा असेल म्हणून बिंदू .0 ते P ही समानतेची मर्यादा आहे.s

Q→ लवचिक मर्यादा (Elastic limit):

- जर बल बऱ्यापैकी वाढले असेल तर सामग्रीला बिंदू Q पर्यंत लवचिक विकृत रूप येईल.

भार काढून टाकल्यानंतर सौम्य पोलाद सामग्री पुन्हा मूळ आकार आणि आकार प्राप्त करते याचा अर्थ बिंदू Q पर्यंत सामग्रीमध्ये समान लवचिक गुणधर्म असतात म्हणून हा बिंदू B लवचिक मर्यादा म्हणून ओळखला जातो.

R आणि S→ उत्पन्न ताण बिंदू (yield stress point)

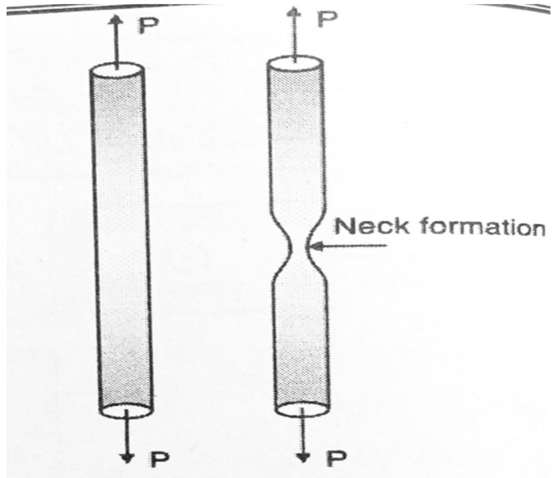
- उत्पन्नाचा ताण म्हणजे ताण म्हणून परिभाषित केले जाते ज्यानंतर मटेरिअल एक्सटेन्शन भारात कमी किंवा कमी वाढ न करता अधिक वेगाने होते. सामग्रीवर ताण पडल्यास प्लास्टिकचा टप्पा Q बिंदूच्या पलीकडे पोहोचेल.
- जर आम्ही भार काढून टाकला तर सामग्री मूळ आकार आणि आकार परत मिळवू शकणार नाही. पॉइंट R आणि S ला अप्पर यील्ड पॉइंट आणि लोअर यील्ड पॉइंट म्हणतात.

T→ अंतिम ताण (Ultimate stress):

- बिंदू T वर, आपल्याला अंतिम ताण म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या तणावाचे कमाल मूल्य मिळेल. तणाव चाचणीमध्ये आपल्याला तणावाचे सर्वात मोठे मूल्य मिळेल.
- अल्टिमेट स्ट्रेस पॉईंट ही जास्तीत जास्त ताकद आहे जी सामग्री तुटण्यापूर्वी ताण सहन करावी लागते. हा ताण तणाव आलेखावरील सर्वोच्च बिंदू आहे. बिंदू T नंतर सामग्री अधिक ताण सहन करू शकत नाही.

U→ ब्रेकिंग स्ट्रेस (breaking point):

- नमुना अंतिम ताणापर्यंत पोचल्यानंतर आपल्याला मान तयार होईल जेथे क्रॉस सेक्शनल क्षेत्र कमी होईल.
- त्यामुळे U बिंदूवर जोपर्यंत नमुना तुटत नाही तोपर्यंत ताण कमी होतो .U वरील ताण ब्रेकिंग स्ट्रेस म्हणून ओळखला जातो.



कामाचा ताण(working stress)

व्याख्या: हे गुणोत्तर किंवा थेट भार किंवा नमुन्याच्या मूळ क्रॉस सेक्शनल क्षेत्रावरील वास्तविक भार म्हणतात.

कामकाजाच्या ताणाचे सूत्र खालीलप्रमाणे आहे: डायरेक्ट लोड किंवा वर्किंग लोड

कामाचा ताण = मूळ क्रॉस सेक्शनल क्षेत्र

- सुरक्षित कामाचा ताण कमाल स्वीकार्य ताण म्हणून ओळखला जातो. दिलेल्या सामग्रीसाठी सुरक्षित कामकाजाचा ताण नेहमीच लवचिक मर्यादेपेक्षा कमी असतो.

विविध गंभीर बिंदूवर ताण

- सौम्य स्टीलसाठी ताण तणाव वक्र मध्ये P, Q, R, S, T सारखे गंभीर बिंदू आहेत, बिंदू P साठी ते एक आनुपातिक मर्यादा दर्शविते कारण बिंदू P वर रेखीय ताण येतो. त्यामुळे रेखीय ताण तन्य स्वरूपाचा असतो.

  SL लांबीमध्ये बदल म्हणजे रेखीय ताण e = मूळ लांबी

- जेथे L = मूळ लांबी, δL= लांबीमधील बदल बिंदू Q लवचिक मर्यादा दर्शविते, जेथे रेखीय ताण आणि पार्श्व ताण येतो.

- बिंदू S, T जेव्हा व्यासात बरीच घट होते आणि आपण मान बनवताना पाहू.

पार्श्व ताण = व्यास मध्ये बदल d मूळ व्यास d = कुठे d = मूळ व्यास

2.11 HYSD बारसाठी स्ट्रेस स्ट्रेन कर्व (stress strain curve for HYSD bar)

- HYSD बारचा अर्थ काय आहे ते पाहूया, HYSD म्हणजे उच्च उत्पन्न शक्ती विकृत बार.

- सौम्य ताकदीच्या तुलनेत HYSD बारमध्ये कार्बनची टक्केवारी जास्त असते. त्यांची ताकद सौम्य स्टीलपेक्षा जास्त आहे परंतु आकृती मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे उत्पन्नाचा बिंदू स्पष्टपणे परिभाषित केलेला नाही.

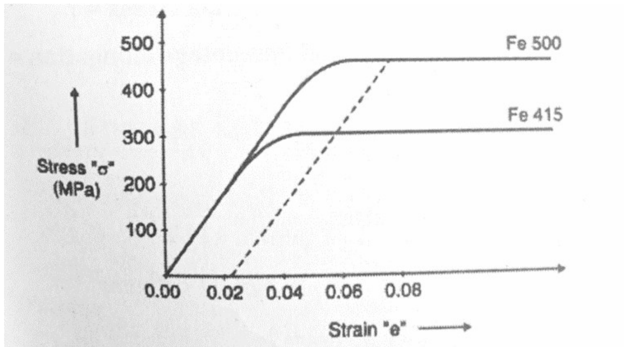


Fig. 2.11.1

- हे बार दोन प्रकारचे उपलब्ध आहेत
  (1) हॉट रोल्ड उच्च उत्पादन शक्ती पट्ट्या
  (2) कोल्ड वर्क्ड उच्च उत्पन्न शक्ती पट्ट्या. याला सीटीडी (कोल्ड ट्विस्टेड डिफॉर्म्ड बार) बार किंवा टोर स्टील असे देखील म्हणतात.

मुळात वळलेल्या विकृत बारमध्ये साध्या पट्ट्यांपेक्षा 50% जास्त उत्पन्नाचा ताण असतो. विकृत बारमध्ये बंध वाढवण्यासाठी आणि कॉँक्रीटमध्ये बार घसरण्यापासून रोखण्यासाठी पट्टीच्या पृष्ठभागावर एक पन्हळी असते. हे बार विशिष्ट उत्पन्न बिंदू दर्शवत नाहीत. म्हणून उत्पन्नाचा बिंदू प्रूफ स्ट्रेसच्या 0.2% म्हणून घेतला जातो जो स्ट्रेस स्ट्रेन वक्र वापरून निर्धारित केला जातो.

1) स्ट्रेन व्हॅल्यू किंवा 0.002 (0.2%) शी संबंधित, स्ट्रेस स्ट्रेन वक्र समांतर रेषा काढा.

२) ज्या बिंदूने ही रेषा ताण तणाव वक्र कापते तो बिंदू उत्पन्नाचा ताण किंवा 0.2% प्रूफ स्ट्रेस म्हणून घेतला जातो.

2.12 ठिसूळ सामग्रीसाठी ताण ताण वक्र (stress strain curve for brittle material)

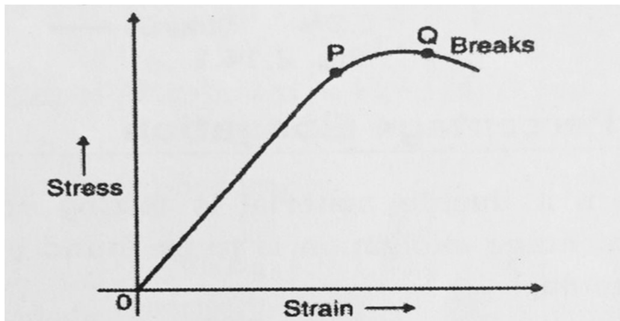
ठिसूळ मटेरियल म्हणजे काय यावर चर्चा करूया कॉँक्रीट किंवा कार्बन फायबर सारख्या सामग्रीमध्ये उत्पन्नाचा बिंदू नसतो. त्यामुळे अंतिम ताकद आणि तोडण्याची ताकद एकच आहे. जर स्टील गरम केले आणि नंतर वेगाने थंड केले तर ते अधिक ठिसूळ होईल.

P- आनुपातिक मर्यादा (proportional limit):

- बिंदू 0 पासून P पर्यंत एक सरळ रेषा आहे जी दर्शविते की ताण तणावाच्या थेट प्रमाणात आहे . बिंदूP पासून वक्र किंचित विचलित होईल.

  Q- Breaking stress(elastic limit):

- आनुपातिक मर्यादेनंतर सामग्री थोड्याशा वाढीसह अयशस्वी होईल.



2.13 **सुरक्षिततेच्या चा घटक : (Factor of Safty**

म्हणजेच ultimate stress (अंतिम /पराकोटीचा तणाव) व working stress (कार्यकारी तणाव) यांच्या गुनोत्तारास Factor of Safty (सुरक्षिततेच्या चा घटक असे म्हंटले जाते

म्हणजेच= $\frac{\text{Yeild stress (अंतिम तणाव)}}{\text{working stress (कार्यकारी तणाव)}}$

- Stress (तणाव) $\sigma = \frac{F}{A}$

σ म्हणजे = तणाव (Stress)

F= बल (force)

A= ज्या क्षेत्रफळा(area) वरती बल प्रयोग झाला आहे.

Strain $\boldsymbol{\varepsilon}$ or $\boldsymbol{e}$ (= $\frac{\text{बदल झलेले लांबी (change length)}}{\text{मूळ लांबी (Original Length)}}$ = $\frac{\delta L}{L}$

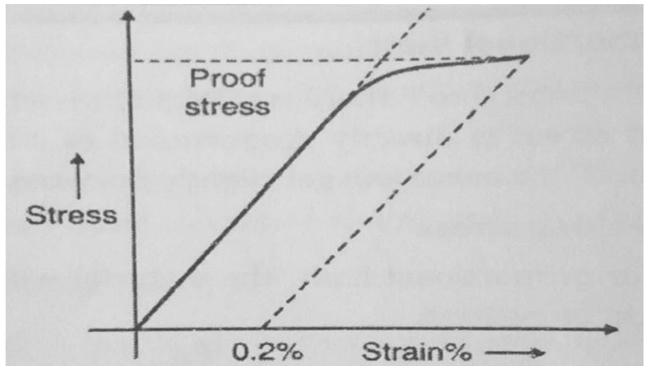
- Constant Elasticलवचिकता गुणांक:Youngs Modulus of elasticity (E) / (

$$= E\frac{\sigma}{e} = \frac{(\frac{F}{A})}{(\frac{\delta L}{L})} = \frac{FL}{A\delta L}$$

म्हणून बदलेली लांबी = $\delta \boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{FL}}{\boldsymbol{AE}}$

2.14 पुरावा ताण (proof stress)

प्रूफ स्ट्रेसला फक्त धातूचा डिझाईन स्ट्रेस असे म्हटले जातेकाही लवचिक धातूंसाठी ., उत्पन्नाचा ताण परिभाषित करणे आणि गणना करणे कठीण आहे म्हणून पुरावा ताण तयार केला जातो . स्ट्रेनवर स्ट्रेस %०.२स्ट्रेन वक्रमध्ये लवचिक वक्र समांतर एक सरळ रेषा काढली जाते जी हुक नियमानुसार स्ट्रेन वक्र कापते.तो बिंदू पुरावा तणाव मानला जातो .



2.15 टक्के वाढ (Percentage elongation)

- जेव्हा यूटीएमवर एक लवचिक सामग्रीची चाचणी केली जाते, तेव्हा सूत्र वापरून टक्केवारी वाढवायची आहे,

टक्के वाढ आरंभिक लांबी - अंतिम लांबी =/आरंभिक लांबी x १००

प्रारंभिक लांबी UTM वर चाचणी करण्यापूर्वी नमुन्याची लांबी UTM वर चाचणी केल्यानंतर नमुन्याची लांबी शोधा.

2.16 स्ट्रेस स्ट्रेन डायग्रामवर सोडवलेले अंक (Solved numerical on stress strain diagram)

महत्त्वाची सूत्रे वापरली

1. उत्पन्न बिंदू= क्रॉस सेक्शनल क्षेत्रावर उत्पन्न ताण लोड/अंतिम भार

2. अंतिम ताण क्रॉस सेक्शनल क्षेत्र =/ब्रेकिंग लोड

3 ब्रेकिंग स्ट्रेस किंवा क्रॉस सेक्शनल एरिया [फाटण्याचा ताण]

4. टक्के वाढ प्रारंभिक लांबी-अंतिम लांबी =/ आरंभिक लांबी× १००

उदा .2.16.1: UTM वापरून तणावात स्टीलच्या सौम्य नमुन्याची चाचणी घेण्यात आली आणि खालील निरीक्षण नोंदवले गेले = नमुन्याचा व्यास -12 मिमी, प्रारंभिक गेज लांबी =60 मिमी, उत्पादन बिंदूवर लोड =48 kN, अंतिम लोड =58 kN, अंतिम गेज लांबी =72 मिमी, ब्रेकिंग लोड 32 kN, उत्पन्न ताण, अंतिम ताण, ब्रेकिंग ताण आणि टक्केवारी वाढीची गणना करा.

सॉलन पायरी :.1: दिलेला डेटा व्यास किंवा नमुना :D 12 मिमी $A=D^2= (12)^2 = 113.09$ मिमी^{2}

प्रारंभिक गेज लांबी L = 60 मिमी

उत्पन्न बिंदूवर लोड करा =Py = 48 kN = 48 x 103 N

अंतिम भार Pu= 58 kN = 58 × 103

अंतिम गेज लांबी L' = 72 मिमी ब्रेकिंग लोड P 32 kN = x 103 N

उत्पन्न ताण =?, अंतिम ताण =? ब्रेकिंग स्ट्रेस =7 आणि टक्के वाढ =?

पायरी २:

= A 1. उत्पन्नाचा ताण शोधण्यासाठी =? Py 48x103 113.09 = 424.413 N/mm^2

= 2. अंतिम ताण शोधण्यासाठी =? .. अंतिम ताण 113.09 = 512.86 N/mm^2 32 x103 .. ब्रेकिंग स्ट्रेस =A 113.09 = 282.96 N/mm^2

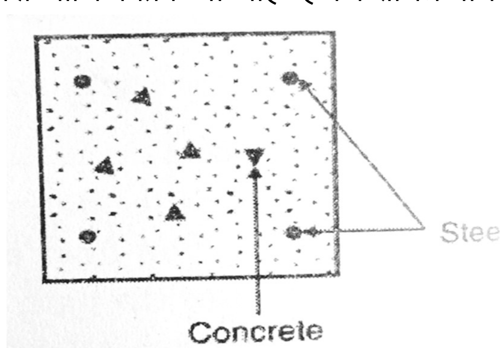
4. टक्के वाढ शोधण्यासाठी =?

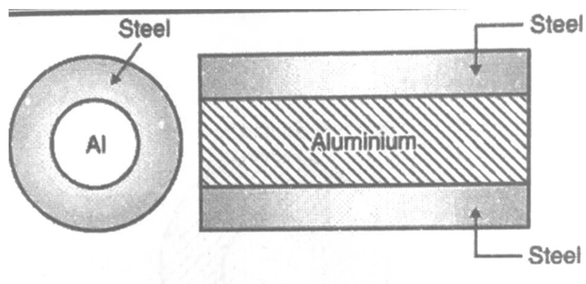
s= अंतिम गेज लांबी आरंभिक गेज लांबी आरंभिक गेज लांबी टक्केवारी लांबी -72-60 x 100 = 20% x 100

2.17 संमिश्र विभाग (composite section)

व्याख्यायुनिल म्हणून काम करण्यासाठी : आणखी दोन भिन्न पदार्थांनी बनलेल्या संरचनात्मक सदस्यास संयुक्त विभाग म्हणतात.

उदाहरण.एक रचना स्टील आणि काँक्रीटची आहे म्हणजे संमिश्र बीम :



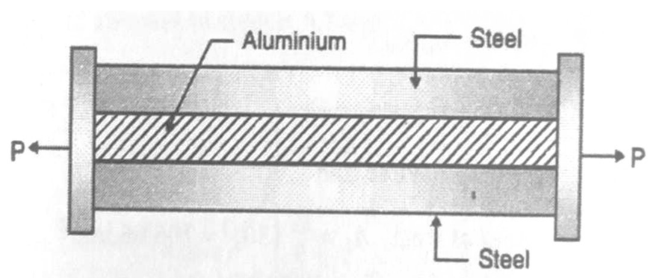


2.18 मॉड्यूलर गुणोत्तर (Modular ratio)

व्याख्या: हे कंपोझिट मटेरियलद्वारे बांधकामातील दोन भिन्न सामग्रीच्या लवचिकतेच्या तरुणांच्या मोड्युलीचे गुणोत्तर आहे.

उदाहरण:
दोन भिन्न सामग्री असलेल्या संमिश्र बारमध्ये, एका मटेरियलमध्ये यंगचे मॉड्यूलस E_1 आणि दुसऱ्यामध्ये तरुणांचे मॉड्यूलर E2.. मॉड्यूलर गुणोत्तर, m = E2

2.19 संमिश्र विभागातील ताण (stresses in composite section)



- स्टील आणि ॲल्युमिनियमचा बनलेला संमिश्र विभाग विचारात घ्या.

चला, P = अक्षीय भार लागू केला P.
स्टील PAI द्वारे घेतलेले लोड ॲल्युमिनियम PP+PA ने घेतलेले भार जसे आपल्याला माहीत आहे, A. P=σA P = σε A + AI. AAI कुठे =स्टीलमध्ये ताण, A = ॲल्युमिनियम A मध्ये ताण, स्टील रॉडचे क्षेत्रफळ ॲल्युमिनियम रॉडचे .AAI क्षेत्र.
-26

रॉडची दोन्ही टोके स्थिर असल्याने दोन दांड्यांची वाढ सारखीच असेल.

L = PL AE

PL A ॲल्युमिनियम रॉड आणि स्टील रॉडची लांबी सारखीच आहे,

. समीकरण)1) 1 = σ EA m = मॉड्यूलर गुणोत्तर =E

2.20 ताण (strain)

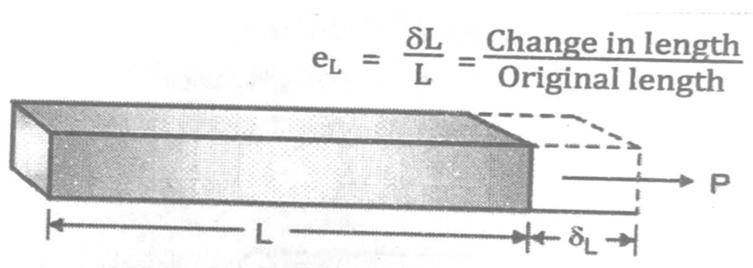
व्याख्या: जेव्हा एखादी लवचिक सामग्री अक्षीय शक्तीच्या अधीन असते तेव्हा तिच्या परिमाणांमध्ये काही बदल होतात, म्हणून मूळ परिमाणानुसार परिमाणांमध्ये या बदलांना ताण म्हणतात.

.. ताण = (ई)SL/L

2.20.1 रेखांशाचा ताण रेखीय ताण (longitudinal strain (e)- (linear strain)

व्याख्याजेव्हा लवचिक वस्तू अक्षीय बलाच्या अधीन असते तेव्हा वस्तूाच्या : मूळ लांबीच्या प्रति युनिट लांबीमध्ये बदल होतो त्याला रेखांशाचा ताण म्हणतात.

SL लांबीमध्ये बदल /मूळ लांबी



2.20.2 बाजूकडील ताण (ई) (lateral strain (e)

व्याख्या: जेव्हा लवचिक वस्तू अक्षीय बलाच्या अधीन असते तेव्हा लागू केलेल्या बलाच्या लंब परिमाणात बदल होतो. म्हणून लागू केलेल्या बलाच्या लंब दिशेने जो ताण येतो त्याला पार्श्व ताण म्हणतात.

आयताकृती विभागासाठी,

8b सेंट किंवा टी बाजूकडील ताण

कुठे, b= विभागाची रुंदी

t=विभागाची जाडी

ob =विभागाच्या रुंदीमध्ये बदल

विभागाच्या जाडीत बदल

वर्तुळाकार विभागासाठी,

पार्श्व ताण =8d/ d

कुठे, d बारचा व्यास

बारच्या= व्यासातील बदल

2.20.3 पॉसन्सचे गुणोत्तर) द्वारे)1/m) (poisson's ratio)

व्याख्या: पार्श्व ताण आणि रेखीय ताण यांच्या गुणोत्तराला पॉसॉनचे गुणोत्तर असे म्हणतात.

पॉसॉनचे गुणोत्तर)μor) = - पार्श्व ताण m) रेखीय ताण पार्श्व ताण /रेखीय ताण

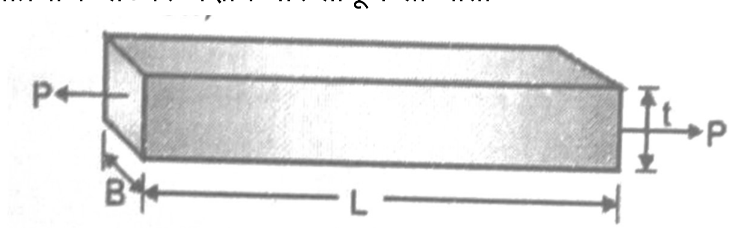
- Ve चिन्ह सूचित करते की पार्श्विक ताण आणि रेखीय ताण विरुद्ध निसर्गात उद्भवते.

म्हणजे आयताकृती पट्टीची लांबी वाढल्यास त्या पट्टीची रुंदी आणि जाडी कमी होते.

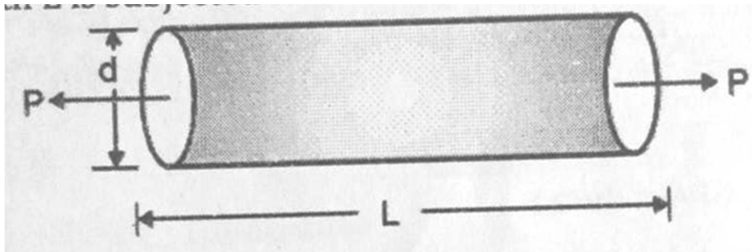
विविध सामग्रीसाठी पॉसॉनचे प्रमाण 0.25 ते 0.5 पर्यंत बदलते.

2.21 युनिअक्षियल फोर्स किंवा युनिअक्षियल स्ट्रेस सिस्टम्समुळे व्हॉल्यूमेट्रिक ताण (volumetric strain due to uniaxial force or uniaxial stress system)

लांबी L. रुंदी बँड जाडी t असलेली आयताकृती प्लेट विचारात घ्या
मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे प्लेटवर अक्षीय भार लागू केला जातो



d आणि लांबी L व्यास असलेल्या वर्तुळाकार पट्टीच्या बाबतीत अक्षीय भार P च्या अधीन आहे.



दोन्ही बाबतीत x दिशेने ताण

8V = V [e (1-2 μ)] आता, [V=Ax L = 20 × 15 × 2.8 × 103 = 840 x 10^3 mm^3] .8V = 840 x 103 [6.66 × 104 (1-2 × 0.32)] = २०१मिमी ३९.^{3}

2.22 द्विअक्षीय ताण प्रणाली

व्याख्याजेव्हा दोन बल दोन परस्पर लंब असलेल्या प्लॅन्सवर लागू केले जातात तेव्हा : प्रणालीमध्ये ताण विकसित होतात त्यालाद्विअक्षीय ताण प्रणाली म्हणतात.

समजा Px आणि Py हे दोन भार दोन परस्पर लंबवर्तुळांवर लागू केले जातात ज्यामुळे ताण, σχ आणि o, तयार होतात.

ताण x आणि y दिशेने तयार होतात

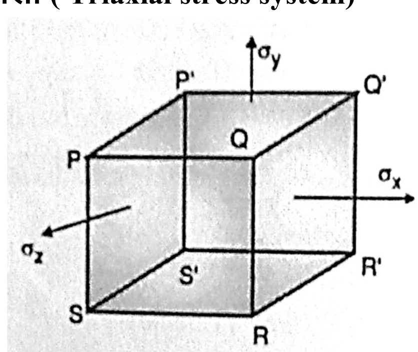
.... x दिशेने ताण

....y दिशेने ताण

टीप :ox आणि oy हे तन्य तणाव +ve म्हणून घेतात

.. वरील सूत्र बैलासाठी खरे आहे आणि σy तन्य आहेत.

2.23 त्रिअक्षीय ताण प्रणाली (Triaxial stress system)



σχ, σy आणि o_2 हे आकृती मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे अनुक्रमे x, y आणि z दिशेने कार्य करणारे तन्य ताण आहेत.

जेथे μ = पॉसॉनचे गुणोत्तर.

चला, x दिशेने ताण द्या exEE E

ey = y दिशेने ताण

e_2 = z दिशेने ताण

व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन शोधण्यासाठी,

8V V = e = ex + y + ez

जेथे σχ, σy आणि o_2 हे तन्य प्रकृतीचे आहेत तेथे आवाजातील बदल शोधण्यासाठी,

2.24 व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन्स (volumetric strains)

व्याख्या: प्रति युनिट मूळ व्हॉल्यूममध्ये व्हॉल्यूममध्ये बदल म्हणून त्याची व्याख्या केली जाते त्याला व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन म्हणतात.

Ev=8V /v

कोठे, ई, व्हॉल्यूमेट्रिक ताण

व्हॉल्यूममध्ये 8V बदल

V = मूळ खंड

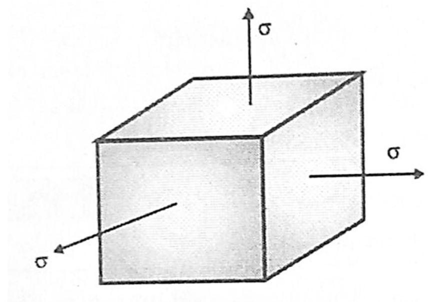
2.24.1 बल्क मॉड्यूलस (k) (Bulk modulus) (k)

व्याख्या: व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेनच्या थेट ताणाच्या गुणोत्तराला बल्क मॉड्यूलस असे म्हणतात.
किंवा

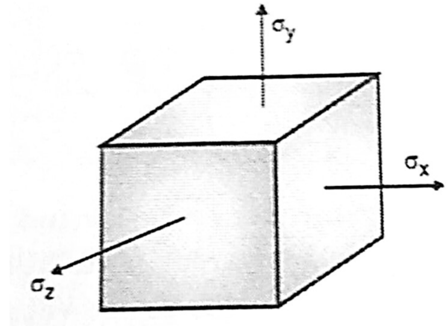
मोठ्या प्रमाणात मापांक (k)

व्याख्या: जेव्हा एखादे वस्तू समान तीव्रतेच्या ताणांसारखे तीन परस्पर लंबांच्या अधीन असते तेव्हा थेट ताण आणि वस्तूाच्या संबंधित आकारमानाच्या ताणाचे गुणोत्तर स्थिर असते याला बल्क मापांक म्हणतात.

बल्क मॉड्यूलस k =व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन (ई)/थेट ताण)σ)



2.25 लवचिकता "E" आणि बल्क मॉड्यूलस "K" च्या मॉड्यूलसमधील संबंध (Relation between modulus of elasticity "E" and bulk modulus "K")



चला तर मग वस्तू त्रिअक्षीय ताण प्रणालीच्या अधीन आहे,

व्ही स्प्लिट)1-2मी(

व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन e, = जर σ_1 = ση = σ_1 = σ = शरीरावर समान ताण 8V στατα (1-2μ) E 30 ==(1-24) E बल्क मॉड्यूलसच्या व्याख्येनुसार, K = थेट ताण व्हॉल्यूमेट्रिक स्ट्रेन ev 3d - (1-2μ)
जेथे म

2.26 कातरणे ताण (Shear stress)

व्याख्या: जेव्हा वस्तू दोन समान आणि विरुद्ध शक्तींच्या अधीन असते जे स्पर्शिकरित्या कार्य करणाऱ्या, प्रतिकार करणाऱ्या विभागात, तेव्हा शरीराचा भाग कापून टाकण्याची प्रवृत्ती असते. होणारा ताण शिअर स्ट्रेस म्हणून ओळखला जातो.

चित्र 2.26.1 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे दोन प्लेट्स जोडण्यासाठी रिव्हेटचा वापर केला जातो याचा विचार करूया. जेव्हा दोन समान शक्ती दोन प्लेट्सवर विरुद्ध दिशेने कार्य करत असतात.

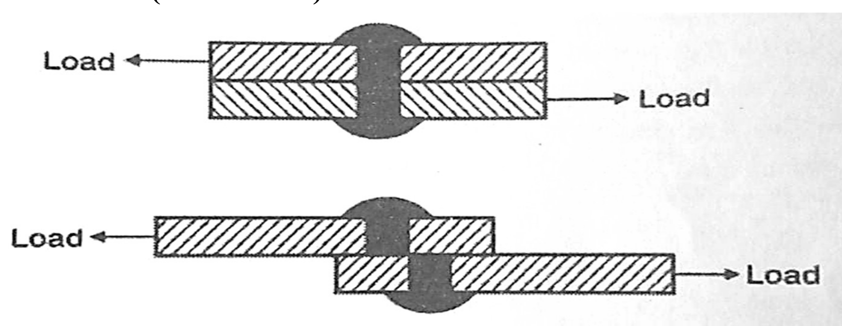
मग रिव्हेटवर एक कातरणे बल कार्य केले जाते आणि रिव्हेटच्या क्रॉस विभागात एक कातरणे ताण तयार होईल. जर हा भार किंवा बल लवचिक मर्यादा ओलांडत असेल तर वरील चित्र 2.26.1 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे रिव्हेट निकामी होईल. या कातरण तणावाची गणना रिव्हेटच्या क्रॉस सेक्शन क्षेत्रावर रिव्हेटवर कार्य करणाऱ्या स्पर्शिक बलाचे गुणोत्तर म्हणून केली जाऊ शकते.

गणिताच्या दृष्टीने आपण असे म्हणू शकतो की,

.. कातरणे ताण)t) = स्पर्शिक बल प्रतिरोधक क्रॉस सेक्शन क्षेत्र

कातरणे तणावाचे एकक N/mm² आहे

2.26.1 कातरणे ताण (shear strain)



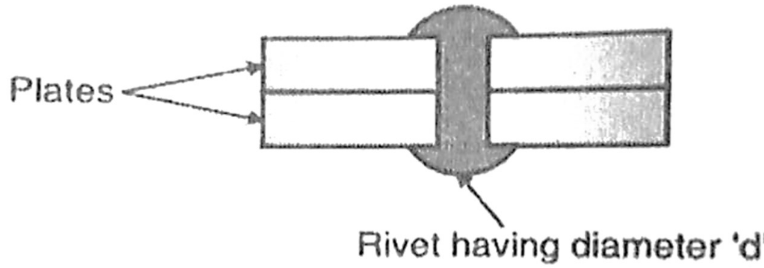
व्याख्याशिअर स्ट्रेनची व्याख्या लागू केलेल्या बलाच्या समतलातील लंब लांबीने भागलेली विकृतीची : लांबी म्हणून केली जाते

2.27 सिंगल शिअर आणि डबल शिअरची संकल्पना (concept of single shear and double shear)

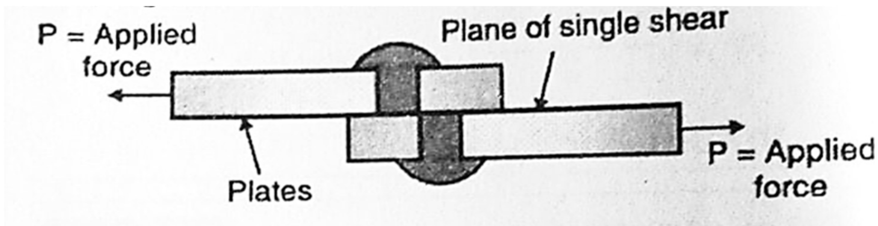
- रिव्हेटेड सांधे हे कायमचे फास्टनिंग आहेत.
- कठोर आणि कायमचे सांधे तयार करण्यासाठी, रिवेट सांधे वापरले जातातसाठवण .उदा . टाक्या, बॉयलर इउत्पादन .

एकच कातरणे

दोन प्लेट्स रिव्हेटने जोडलेल्या आहेत याचा विचार करू या२.२७.१ .



P ला प्लेटवर लावलेले बल मानू या नंतर प्लेटमध्ये रिव्हेटेड जॉइंट बिघाड होतो P मुळे प्लेटमध्ये फक्त एकच कातरणे होते आणि म्हणून आकृती मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे रिव्हेट सिंगल शिअरमध्ये असल्याचे म्हटले आहे.

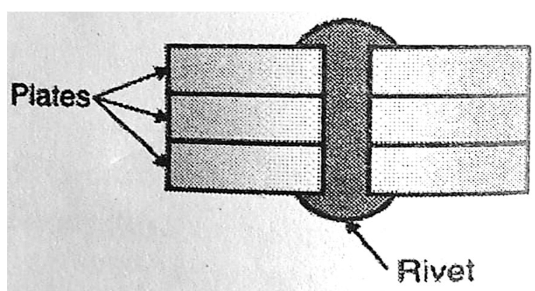


कातरणे ताण (एकल कातरणे)

q = शिअर फोर्स एरिया PP =A = 4

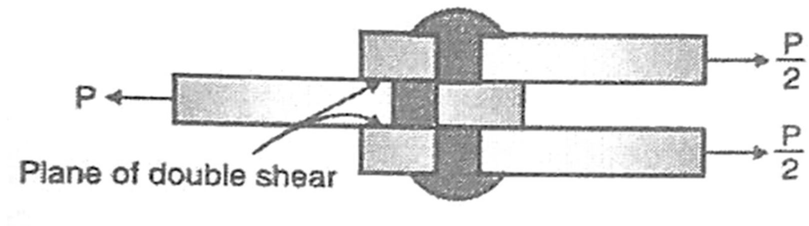
कोठे, d रिव्हेटचा व्यास

दुहेरी कातरणे:



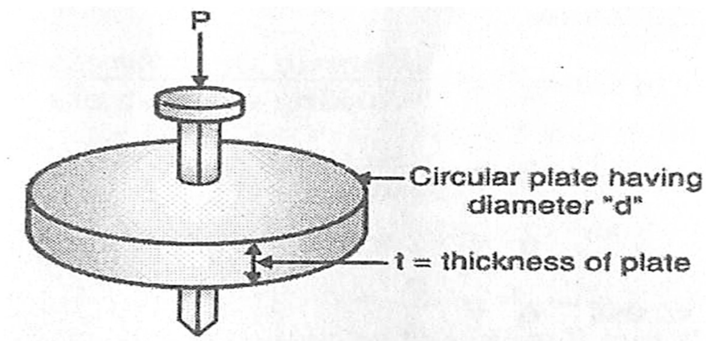
तीन प्लेट्स रिव्हेटने जोडलेल्या आहेत याचा विचार करूया.

कारण या तीन प्लेट्समध्ये P बल असेल तर P बल लागू होईलत्यामुळे दोन प्लेट्समध्ये दोन प्लेनमध्ये . .कातरणे असेल



2.28 पंचिंग कातरणे (punching shear)

व्याख्या: पंचिंग शीअर अशी व्याख्या केली जाते जेव्हा प्लेट प्लेटमध्ये काही ठोसा मारते, तेव्हा पंचच्या परिघाला त्या प्लेटच्या कातरणे प्रतिरोधकतेला पंचिंग शीअर म्हणतात.



जेथे, भोक ओलांडून P संकुचित शक्ती.

t = प्लेटची जाडी.

F = भोक पंच करण्यासाठी आवश्यक बल

q = कातरणे ताण

A = प्लेटचे कातरणे क्षेत्र

= छिद्राचा घेर x प्लेटची जाडी

$A = \pi d x t$

कातरणे ताण)q) (व्याख्या(

व्याख्या: प्लेटमध्ये पंचिंग केल्यामुळे निर्माण होणाऱ्या शीअर स्ट्रेसला पंचिंग शीअर स्ट्रेस म्हणतात त्याला कातरणे ताण म्हणतात

2.29 कडकपणाचे मॉड्यूलस किंवा शिअर मॉड्यूलस

व्याख्या: हे कातरणे ताण आणि कातरणे ताण यांचे गुणोत्तर म्हणून परिभाषित केले जाते त्याला कडकपणाचे मॉड्यूलस म्हणतात.

नोटेशन → C, G किंवा N

. जी कातरणे ताण=/ कातरणे ताण

S.I युनिट N/mm^2 आहे

2.30 मॉड्युलस ऑफ लवचिकता (E) आणि कडकपणाचे मॉड्यूलस (G) यांच्यातील संबंध (Modulus of rigidity or shear modulus)

E,G आणि K ह्यांच्यातील u सोबत असलेला संबंन्ध –

a) मॉड्युलस ऑफ लवचिकता (E) आणि कडकपणाचे मॉड्यूलस (G) ह्यांच्यातील संबंन्ध-

E= 2G (1+ u)

म्हणजे, E= Modulus of elasticity or Youngs modulus

G= Modulus of rigidity or Shear modulus

μ= Poisson's ratio

b) मॉड्युलस ऑफ लवचिकता (E) आणि बल्क मॉड्यूलस)k-ह्यांच्यातील संबंन्ध (

E=3K (1-2 u)

म्हणजे, E= Modulus of elasticity

K= Bulk Modulus

u = Poisson's ratio

c (मॉड्युलस ऑफ लवचिकता (E) कडकपणाचे मॉड्यूलस (G) आणि बल्क मॉड्यूलस)k (-ह्यांच्यातील संबंन्ध

E=9KG/G+3K)

Derivation between E,G and K

आपल्याला माहीत आहे की, E=2G(1+ u)

1+ u = E/2G

u = E/2G-1

आपल्याला माहीत आहे की,

E=3K (1-2 u)

E=3K [1-2(E[1-E/2G-1)]

E= 3K [1-E/G+2]

E= 3K [3G-E/G]

EG = 3K (3G-E)

EG= 9KG-3KE

EG+3KE=9KG

E (G+3K)=9KG

E= 9KG/G+3K

- **संख्यात्मक उदाहरण -E,G AND K**

1) **विशिष्ट सामग्रीसाठी लवचिकतेचे मॉड्यूलस 200 MPa आहे जर पोझिशनचे प्रमाण 0.32 असेल कडकपणाचे मॉड्यूलस आणि बल्क .मॉड्यूलसची मूल्ये मोजा.**

उत्तर -दिलेली माहिती-

यंग्स मॉड्युलस(E) =200mpa, u =0.32
यंग्स मॉड्युलस (E) =2G(1+2 u)
200= 2G (1+2X0.32)
200=2.64G
G=200/2.64
G=75.75mpa

आता,
यंग्स मॉड्युलस (E)=3K (1-2 u)
200=3K (1-2X0.32)
200=3K (1-0.64)
200=3K* 0.36
200=1.08K
बल्क मॉड्यूलस (K)= 200/1.08
बल्क मॉड्यूलस (K) =185.18mpa

2) **25 मिमी व्यासाचा बार 75 kN च्या खेचण्याच्या अधीन आहे लांबीचा विस्तार .230 मिमी लांबीचा 0.1 मिमी मोजला जातो त्याचा व्यास .0.004 मिमी आहे यंग्स मॉड्यूलस . Eची गणना करा ; पॉसन्सचे गुणोत्तर (u) आणि बल्क मॉड्युलस (K).**

उत्तर -दिलेली माहिती-

व्यास)Diameter)(d - (25mm
त्रिज्या)Radius)) r) - 12.5mm
क्षेत्र)Area) (A) = Π*12.5^2
= 490.62mm^2
फोर्स)P) = 75KN= 75*10^3N

$\delta l = 0.1mm$

Modulus of elasticity (E) =? Poisons ratio(u)=? Bulk modulus (K)=?

$\delta d = 0.004mm$

लांबी)L) =230mm,

ताण)Stress) = P/A

$= 75*10^3/490.62$

$= 152.86 N/mm^2$

Linear strain (e) = $\delta l/l$

$= 0.1/230$

$4.34*10^{-4}$

म्हणून, यंग्स मॉड्युलस (E) = Stress/strain

$E = \sigma / e$

$E = 152.86/4.34*10^{-4}$

$\boxed{E = 352.21*10^3 N/mm^2}$

आता, lateral strain= $\delta d/d$

$= 0.004/25$

$= 1.6*10^{-4}$

Poissons ratio- (u) = Lateran strain/Linear strain

$u = 1.6*10^{-4}/4.34*10^{-4}$

$\boxed{u = 0.368}$

म्हणून, E=3K (1-2 u)

$352.21*10^3 = 3K (1-2*0.368)$

$352.21*10^3 = 3K (0.264)$

$K = 352.21*10^3/3*0.264$

$\boxed{K = 444.70*10^3 N/mm^2}$

7 मिमी जाडीच्या ॲल्युमिनियम प्लेटमधून गोलाकार छिद्र पाडायचे आहेजर ॲल्युमिनियमची . अंतिम कातरण्याची ताकद150 MPa असेल आणि पंचसाठी सुरक्षित कॉम्प्रेसिनची ताकद 90 MPa असेल, तर छिद्र पाडता येणाऱ्या छिद्राचा जास्तीत जास्त व्यास निश्चित करापंच .सोल . कोमप्रेससिव मध्ये ताण आहे.

उत्तर- दिलेली माहिती-

) कोमप्रेससिव स्ट्रैस$\sigma_{c)}$ = P/A

फोर्स)P)= σ_c/A

क्षेत्र)A) $=\Pi/4*d^2$

σ_c =90mpa

P= 90* $\Pi/4*d^2$

P= $22.5\Pi d^2$ .... (1)

जर t जाडी कातरनास प्रतिकार करणारे क्षेत्र आहे

A=Πdt

जाडी)t7 = (mm

क्षेत्र)AΠ = (d*7

ζ= P/A

= P/Πd*7

म्हणून,

ζ 150 = mpa

P= 150*Πd*7

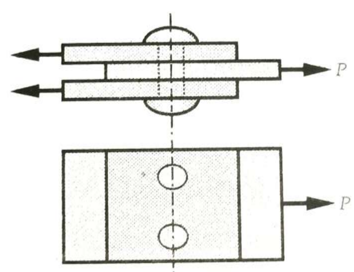
P= 750Πd .... (2)

समीकरणामधून 2 आणि 1,

$22.5\Pi d^2$ = 750Πd

d = 33.33mm

3) आकृती मध्ये दाखवल्याप्रमाणे तीन स्टील प्लेट्स दोन रिवेट्सने जोडल्या आहेत . रिव्हट्सचा व्यास30 मिमी आहे .rivets 220MPa साठी अंतिम कातरणे ताण . कातरणेमध्ये रिवेट्स अयशस्वी होण्यासाठीP शक्तीचे मूल्य किती आहे?



उत्तर- दिलेली माहिती-

प्रत्येक रिव्हेट दुहेरी कातरण्याच्या अवस्थेत आहे.

म्हणून,एका रिव्हेटसाठी

= ζF/2A

F= 2A*ζ

दोन रिव्हेटसाठी P=2F=4Aζ

$A=\Pi/4*d^2$

$A= \Pi/4*30^2$

$A= 706.85mm^2$

म्हणून , $P=230*706.85*4$

$P= 650.30KN$

4) आकृती मध्ये दाखवल्याप्रमाणे तीन स्टील प्लेट्स दोन रिवेट्सने जोडल्या आहेत. रिव्हट्सचा व्यास 30 मिमी आहे. rivets 220MPa साठी अंतिम कातरणे ताण. कातरणेमध्ये रिवेट्स अयशस्वी होण्यासाठी P शक्तीचे मूल्य किती आहे?

उत्तर- दिलेली माहिती-

क्षेत्र प्रतिरोधक कातरणे(Area resisting shear) $A = \pi \times 100 \times L$
$= \zeta 0.5$ mpa
$P = \zeta * A = 0.5 \times л \times 100 \times L$

कातरणे बल (Shear force) (P)
$P = 50\Pi * L$

$P = 200 \text{ kN} = 200 \times 10^3 N$

$50 \Pi L = 200\times10^3$

$L = 1273.24$ mm

युनिट 3 कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट
Shear force and Bending moment

- **विषय निष्पत्ती (Course Outcome):-** विविध प्रकारच्या बीम आणि बलांच्या **(**Loading**)** परिस्थितीसाठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृतीचा अर्थ लावा.
- **सिद्धांत शिकण्याचे परिणाम** (**Theory Learning Outcome):-**

TLO.1 आधार (Support) आणि बीमच्या (Beam) प्रकारांची यादी तयार करा.

TLO.2 बीमवर येणाऱ्या भारांची (Load) यादी तयार करा.

TLO.3 कर्तन बल, बेंडिंग मोमेंटआणि भारांची तीव्रता यांच्यातील संबंध समजून घ्या.

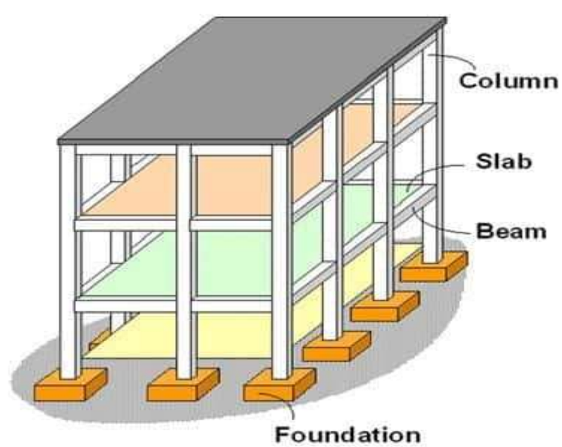
TLO.4 साधा आधार असलेली बीम (Simply Supported Beam) ,कॅन्टीलीव्हर बीम (CantileverBeam) आणि ओव्हर हँग बीम (Over Hang Beam) साठी कर्तन बल आकृती **(**SFD) आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती (BMD) रेखाटा.

TLO.5 जास्तीत जास्त बेंडिंग मोमेंट (Max. BM) आणि नतिपरिवर्तन बिंदु (Point Of Contraflexure) दाखवा.

3.1.बीम (Beam):- बीम हे संरचनात्मक (Structural) घटक म्हणून परिभाषित (Defined) केले गेले आहे ज्याचे एक परिमाण (Dimension) इतर दोन परिमाणा पेक्षा बरेच मोठे आहे आणि तेकाही बिंदूवर सपोर्टेड (Supported By loads) आहे **.** हा आडवा संरचनात्मक घटक (Structural Member) आहे**,**जो अक्षाला काटकोनात असणाऱ्या भाराच्या (Transverse Load) अधीन आहे.

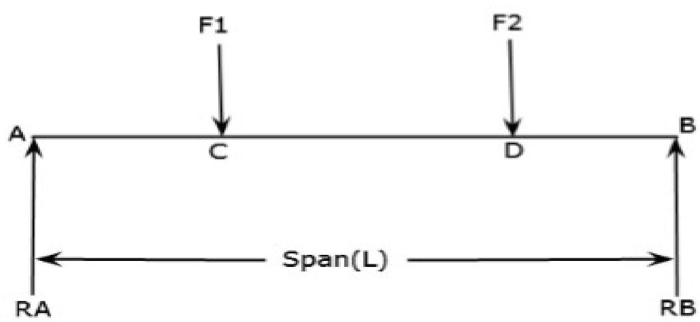
किंवा (Or)

हा एक क्षैतिज किंवा झुकलेला संरचनात्मक सदस्य (Structural Member) आहे ज्यामध्ये एक किंवा अधिक आधारांमध्ये अंतर आहे आणि त्याच्या छेदक अक्षा (Transverse Axis) वर उभा बल वाहतो.



Typical RC Frame Building

3.1.1 बीम चा स्पॅन (Span of Beam):-स्पॅन म्हणजे संरचनेच्या दोन आधारांमधील (Support) अंतर**.** उदा. एक बीम (Beam) किंवा पूल (Bridge)**.**

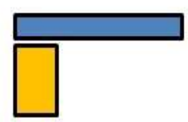


3.1.2 आधाराचे विविध प्रकार (Types of Support):-

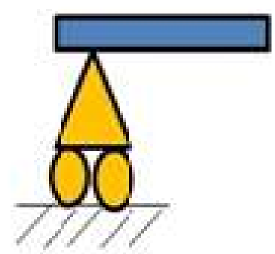
आधाराचे विविध प्रकार आहेत,

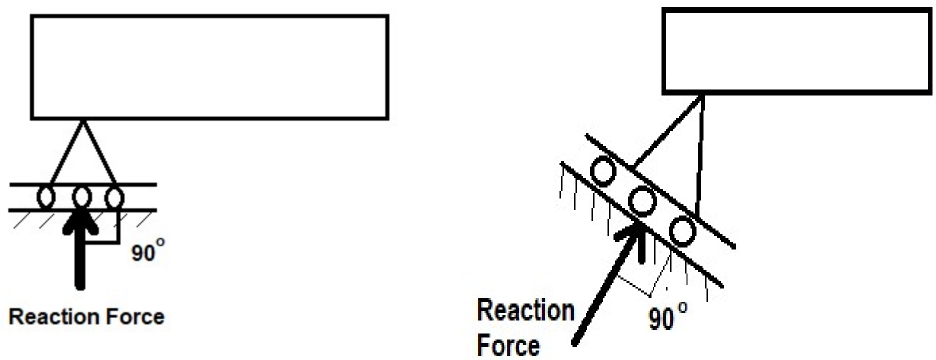
- **साधा आधार (Simple Support):-**साध्या आधाराच्या बाबतीत, बीम संरचनेवर (स्ट्रक्चरवर) ठेवला जातो ज्यामध्ये बल (फोर्स) आधाराकडे हस्तांतरित (ट्रान्सफर) केले जाते.

अश्या प्रकारातील आधारवरील प्रतिक्रिया (Reaction) बीमला काटकोनात (Perpendicular) असते .



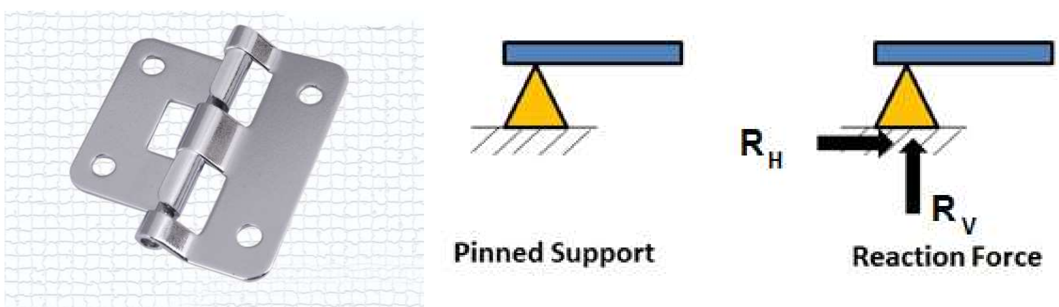
रोलरआधार (Roller Support):- रोलर सपोर्टच्या बाबतीत बीम रोलर्सवर ठेवली जाते .
अश्या प्रकारातील आधारवरील प्रतिक्रिया (Reaction) फक्त पृष्ठभागाला (Surface) काटकोनातच (Perpendicular) असते.





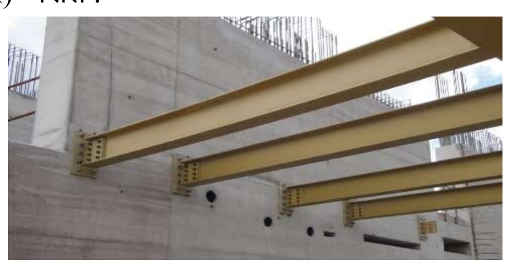
- **बिजागर आधार (Hinge Support):-**बिजागर आधार पृष्ठभागाच्या कोणत्याही दिशेने कार्य करणाऱ्या शक्तींचा प्रतिकार करण्यास सक्षम आहे. हे समर्थन रोटेशनसाठी कोणतेही प्रतिकार प्रदान करत नाही.

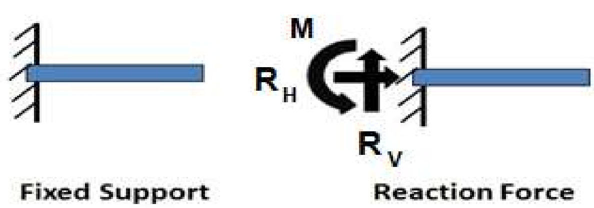
अश्या प्रकारातील आधारवरील प्रतिक्रिया (Reaction) बीमला उभी (Vertical) तसेच आडवी (Horizontal) असते .



- **फिक्स आधार (Fixed Support):-**फिक्स सपोर्ट हा सपोर्ट किंवा कनेक्शनचा सर्वात कठोर प्रकार आहे. फिक्स सपोर्ट बीमला फिरणे किंवा हालचाल करण्याची परवानगी देत नाही.

अश्या प्रकारातील आधारवरील प्रतिक्रिया (Reaction) बीमला उभी (Vertical), आडवी (Horizontal) तसेच फिरणारी (Rotational) असते .

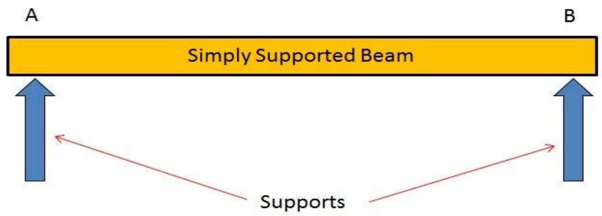




3.1.3 बीमचे प्रकार (Types of Beam):-

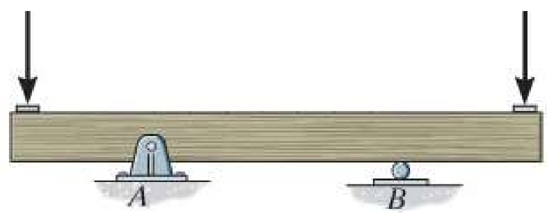
आधाराच्या प्रकारांवर आधारित वर्गीकरण

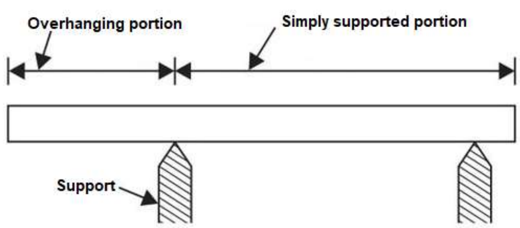
- **साधा आधार असलेली बीम (Simply supported beam):-**भिंती किंवा स्तंभांवर त्याच्या दोन्ही टोकांना मुक्तपणे सपोर्ट केलेला बीम साधा आधार असलेली बीम (Simply supported beam) म्हणून ओळखला जातो.

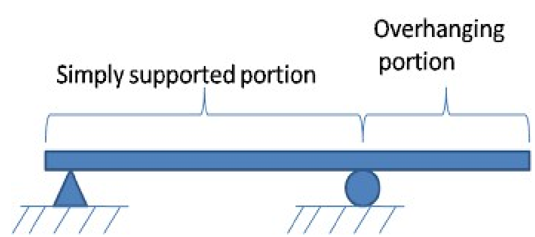


- **कॅन्टीलीव्हर बीम (Cantilever Beam):-** जर बीम एका टोकाला स्थिर (Fix) आणि दुसऱ्या टोकाला मोकळा **(**free) असेल तर त्याला कॅन्टिलिव्हर बीम असे म्हणतात.

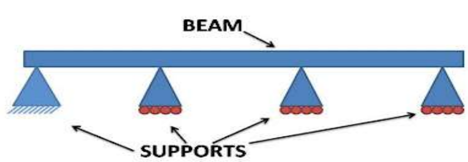
- **ओव्हर हँग बीम (Over Hang Beam):-** जर बीम मुक्तपणे दोन आधारांवर ठेवलेला आहे**,** पण त्याचे एक टोक किंवा दोन्ही टोके आधारांच्या पलीकडे सरकलेली आहेत. अश्या बीमला ओव्हर हँग बीम असे म्हणतात.







- **सततआधार असलेली बीम (Continuous Beam):-** जर बीम दोन पेक्षा जास्त आधारांवर (Support) ठेवलेला असेल तर तो बीम सतत बीम (Continuous Beam) म्हणून ओळखला जातो.

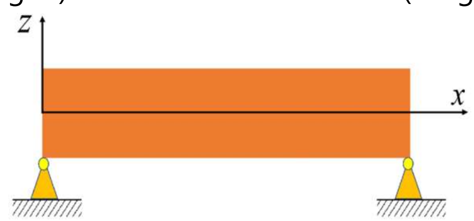


CONTINUOUS BEAM

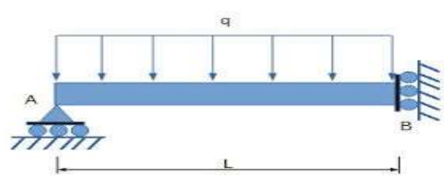
- **फिक्स्ड बीम (Fixed Beam):-** ज्या बीमची दोन्ही टोके कठोरपणे स्थिर (Fix) असतात त्याला स्थिर बीम (Fixed Beam) म्हणतात.

- **बिजागर बीम (Hinged Beam):-**

ज्या बीमची टोके बिजागर **(**Hinged) असतात त्याला बिजागर बीम (Hinged Beam) म्हणतात.



- **रोलर बीम (Roller supported Beam):-**रोलरआधार (Support) असलेल्या बीमला रोलर बीम म्हणतात.



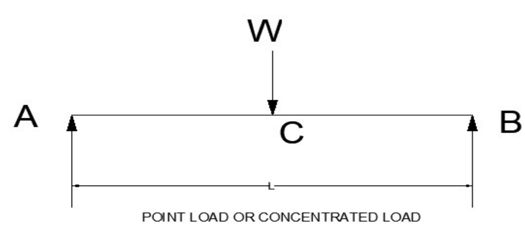
3.2 बलांचे प्रकार (Types of Loading):-

बलांचे विविध प्रकार आहेत,

3.2.1 केंद्रित भार (Concentrated load):-जेव्हा भार (Load) एकाचबिंदूवर केंद्रीत केलेलाअथवा कार्य करत असतो तेव्हा त्याला केंद्रित भार (Concentrated load) मानले जाते.

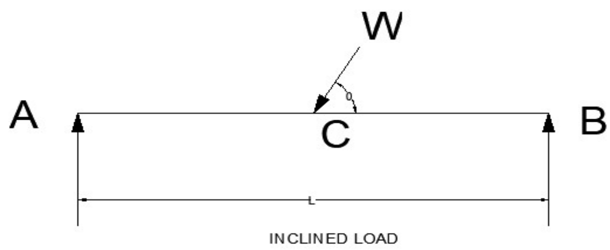
W = केंद्रित भार (Concentrated load)

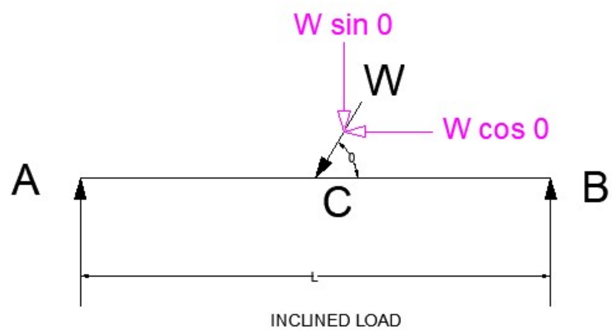
या लोड चे एकक N किंवा KN असे आहे



3.2.2 तिरपाभार (Inclined load):-

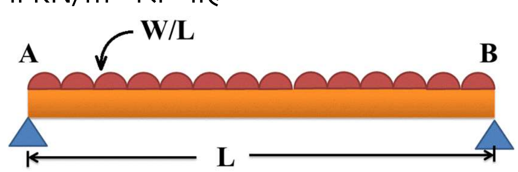
जेव्हा भार (Load) एका बिंदूवर तिरपा केंद्रीत केलेला अथवा कार्य करत असतो तेव्हा त्याला तिरपा भार (Inclined load) मानले जाते.





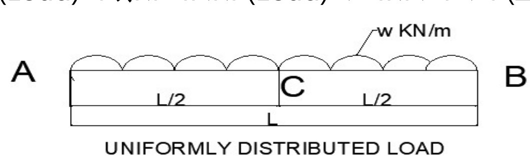
3.2.3 एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed Load):- बीमवर पसरलेला भार अशा रीतीने पसरलेला असतो की बीमची प्रत्येक एकक लांबी समान तीव्रतेने लोड केली जाते, त्याला एकसमान वितरित भार (Load) असे म्हणतात.

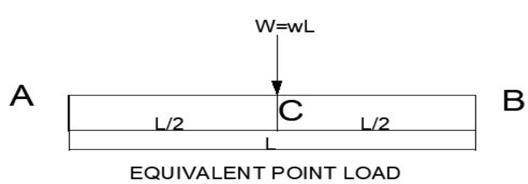
या लोड चे एकक N/m किंवा KN/m असे आहे



Uniformly Distributed Load(UDL)

एकसमान वितरित भाराचे (Load) केंद्रीत भारात (Load) रूपांतर करणे (**EquivalentPoint Load)** :-



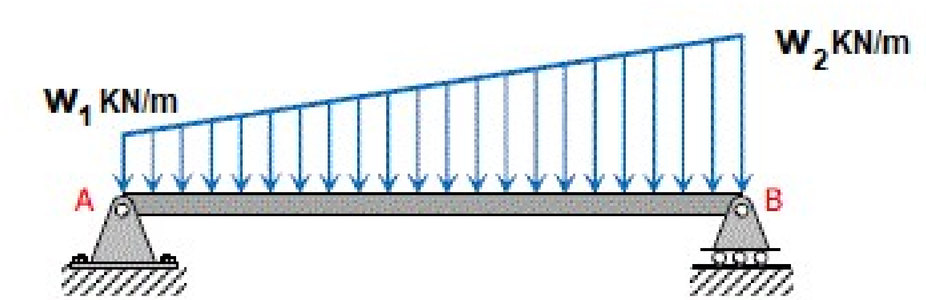


एकसमान वितरित भाराचे (Load) केंद्रीत भारात (Load) रूपांतर करतांना एकसमान वितरित भाराची (Load) **(**udl)ची तीव्रता आणि एकसमान वितरित भार (Load) पसरलेली लांबी यांचे गुणोत्तर घ्यावे.

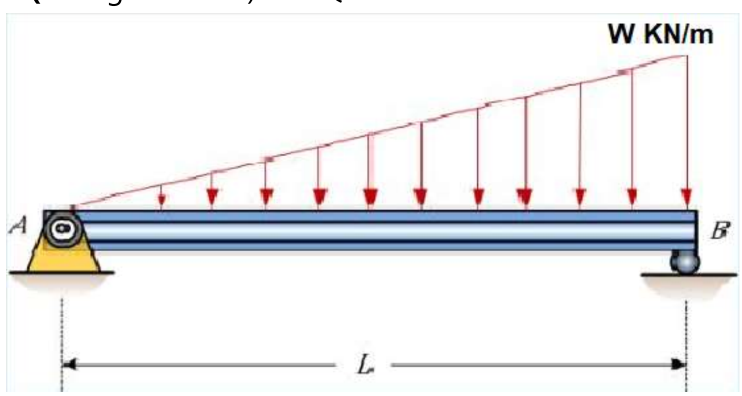
$$W = w \times L$$

बदल केलेले एकसमान वितरित भार (Load) पसरलेल्या लांबीच्या (L) मध्यबिंदूवर (L/2) कार्य करतात.

3.2.4 एकसमान भिन्न भार (Uniformly varying load):- जो भार (Load) बीमवर अशा रीतीने पसरलेला असतो की त्याची तीव्रता प्रत्येक एकक लांबीवर एकसमान बदलते त्याला एकसमान भिन्न भार (Load) म्हणतात.



या प्रकारामध्ये जेव्हा एका टोकाला भार शून्य असतो आणि दुसऱ्या टोकापर्यंत एकसमान वाढतो तेव्हा त्याला त्रिकोणी भार **(**Triangular Load) असे म्हणतात.



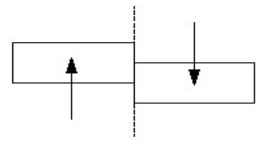
3.3 कर्तन बल (Shear Force):- हा बीमच्या लांबीचा विचार करता कुठल्याही एका बिंदु वरती कापलेल्या (Cut) भागाच्या डावीकडे किंवा उजवीकडे कार्य करणाऱ्या उभ्या बलांची **(**Vertical Forces) बीजगणितीय बेरीज **(**algebraic sum) असतो.

कर्तन बल (Shear Force) हा SF अथवा S अथवा F अथवा V या अक्षरांद्वारे दर्शविला जातो.

कर्तन बल (Shear Force)चे एकक हे: N किंवा KN.

Sign Convention

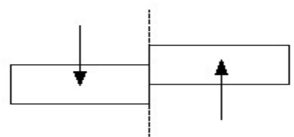
कर्तन बलविचारात घेता छेदरेषा (Section) च्याउजव्या बाजूचा बल (Force) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Force) वरच्या दिशेने जात असेल तर कर्तन बलअधिक म्हणजेच (+ve**)** विचारात घ्यावा.



+ve

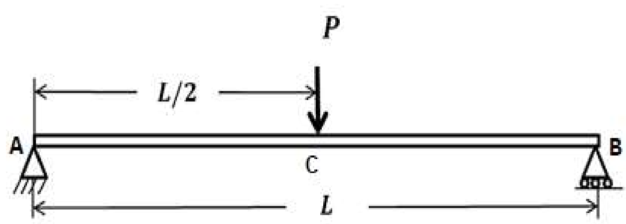
आणि

कर्तन बलविचारात घेता छेदरेषा (Section) च्याउजव्या बाजूचा बल (Force) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Force) खालच्या दिशेने जात असेल तर कर्तन बलवजा म्हणजेच (-ve**)** विचारात घ्यावा.



-ve

3.3.1 मोमेंट (Moment):- म्हणजेच बीमच्या लांबीचा विचार करता कुठल्याही एका बिंदु वरती बल कार्यान्वित असल्यास**,** एखाद्या बिंदूच्या ठिकाणी किती मोमेंट झाला आहे असे विचारात घेण्यासाठी बल कार्यान्वित असलेल्या बिंदुपासुनचे सरल रेषेतील त्या बिंदूचे अंतर व बल यांचा गुणाकार म्हणजेच मोमेंट होय.



बिंदु **A** च्या ठिकाणी असणारीमोमेंट **=** बल **x** अंतर (बिंदु **A** पासून बिंदु **C** चे अंतर)

Momentat A =M_A**=** P (L**/**2)

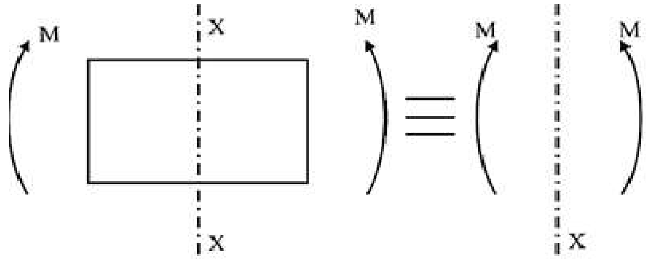
3.3.2 बेंडिंग मोमेंट (Bending moment):-म्हणजेच बीमच्या लांबीचा विचार करता कुठल्याही एका किंवा अधिक बिंदु वरती बल कार्यान्वित असल्यास**,** एखाद्या छेद बिंदूच्या ठिकाणी किती बेंडिंग मोमेंट तयार झाला आहे असे विचारात घेण्यासाठी छेद बिन्दुच्या डाव्या बाजूला तयार होणारी मोमेंट अथवाउजव्या बाजूला तयार होणारी मोमेंट यांच्या बीजगणितीय बेरीज **(**Algebraic sum) म्हणजेच बेंडिंग मोमेंट होय**.**

बेंडिंग मोमेंट चे एकक हे: N.m.किंवा KN.m.

बेंडिंग मोमेंट **(**BendingMoment)हा BMअक्षरांद्वारे दर्शविला जातो.

Sign Convention:-

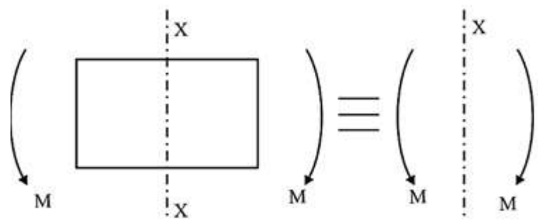
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यास Sagging असे म्हणतात. म्हणजेच जर बीमच्या वरच्या भागाला दबाव (Compression) आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणाव (Tension) असेलतर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो.



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा ऋण (-ve**)** असतो त्यास Hogging असे म्हणतात, म्हणजेच जर बीमच्या वरच्या भागाला तणाव (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबाव (Compression) असेलतर बेंडिंग मोमेंट हा ऋण (-ve**)** असतो.



Bending Moment = -ve

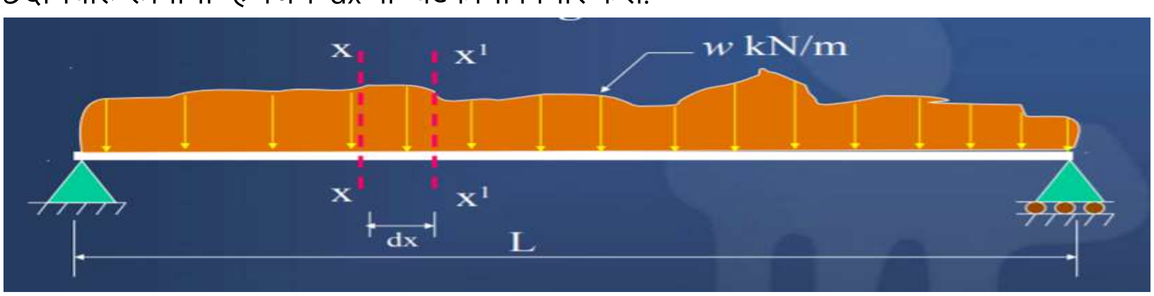
3.3.3 कर्तन बल आकृती (Shear Force Diagram):-बीमच्या लांबीसह कर्तन बलाची (Shear Force) भिन्नता दर्शविणाऱ्या आकृतीला कर्तन बल आकृती **(**SFD) असे म्हणतात.

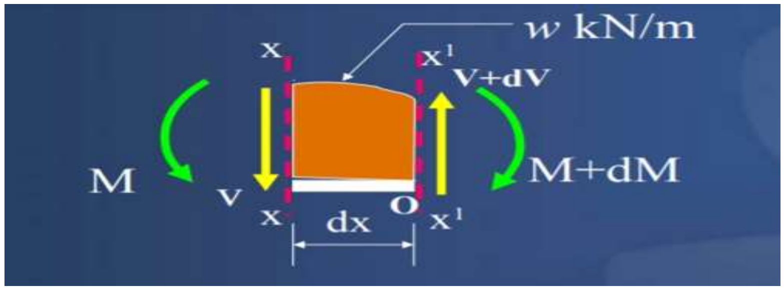
3.3.4 बेंडिंग मोमेंट आकृती (**Bending Moment Diagram):-**बीमच्या लांबीसह बेंडिंग मोमेंटची भिन्नता दर्शविणाऱ्या आकृतीला बेंडिंग मोमेंट आकृती **(**BMD) असे म्हणतात.

3.3.5 बल, कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंटयांच्या मधील संबंध:-

(RELATION BETWEEN LOAD, SF and BM):-

खाली दर्शवलेली आकृती सामान्य प्रकारच्या बलाच्या **(**Loading) अधीन असलेला साध्या आधाराचा बीम **(**Simply Supported Beam) दर्शवते. आकृत्तीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे x-x आणि x_1 -x_1 या दोन छेदांमधील लांबीचा म्हणजेच 'dx'या घटकाचा विचार करा.





बिंदु 'O'ला मोमेंट घेतली

$- M + (M+dM) – V.dx – w.dx.dx/2 = 0$

[या ठिकाणी M हा वजा (-ve) घेतला कारण तो घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने फिरत आहे तसेच,(M+dM) हा अधिक (+ve**)** घेतला कारण तो घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने फिरत आहे व**,**V आणि dx यांचा गुणाकार घेतला (बल xअंतर) म्हणजेच Vया बलाचा 'O'या बिंदूवर मोमेंट घेतला आणि त्याला वजा (-ve)घेतला कारण तो घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने फिरत आहे**,** आणि wही u.d.l.ची तीव्रता असल्या कारणाने त्याचे बलामध्ये रूपांतर करण्यासाठी लांबीने गुणाकार केला म्हणजेच **(**w.dx) आणि **(**w.dx) या बलाचा 'O'या बिंदूवर मोमेंट घेण्यासाठी **(**dx/2) या अंतराने गुणविले म्हणजेच w.dx.(dx/2) व त्याला वजा (-ve)घेतला कारण तो घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने फिरत आहे.]

$- M + M+dM – V.dx – w.dx2/2 = 0$--------- (जास्त घातांक असलेल्या लहान प्रमाणाकडे दुर्लक्ष केले)

$dM – V.dx= 0$

$dM = V.dx$

dM/dx = V------अंतराच्या संदर्भात बेंडिंग मोमेंटच्या बदलाचा दर कर्तन बलाच्या बरोबरीचा आहे.
हा कर्तन बल (Shear Force) आणि बेंडिंग मोमेंट (Bending moment) यांच्या मधील संबंध आहे .
समतोल (Equilibrium) समीकरण लक्षात घेता**,**

ΣFy = 0 **(+ve, -ve)** ↑ ↓

$- V + (V+dV) – w dx = 0$

[वरील समीकरणामध्ये उभ्या बलांची समतोल समीकरणानुसार बेरीज केली . यामध्ये **v** हा बल खालक्या दिशेने जात असल्या कारणाने वजा **(**-ve) घेतला व (V+dV) हा बल वरच्या दिशेने जात असल्या कारणाने अधिक **(+**ve) घेतला आणि **w** तीव्रता असलेला u.d.l**.** त्या ठिकाणी आहे त्याचे बला मध्ये रूपांतर करण्यासाठी तो जेवढ्या लांबी वर पसरलेला आहे त्या लांबी ने त्याला गुणविले म्हणजेच **(**Intensity of load x Distance) w dx व हा बल खालक्या दिशेने जात असल्या कारणाने वजा **(-**ve) घेतला.]

$- V + V+dV – w dx = 0$

$dV= w dx$

dV/dx = w ----------कर्तन बलाच्या बदलाचा दर लोडिंगच्या तीव्रते इतका असतो**.**
हा कर्तन बल (Shear Force) आणि बल तीव्रतेचा हा संबंध आहे.
म्हणून**,**

बल (Load) = w**=**(dv/dx) =(df/dx)

कर्तन बल (Load) (Shear Force) = SF =dM/dx

3.3.6 कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढायचे नियम:-

1. कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती रेखाटताना अधिक (+ve) संख्या तळ रेषेच्या (Base Line) वर मांडाव्या व वजा (-ve) संख्या तळ रेषेच्या (baseline) खाली मांडाव्या.
2. दोन बिंदूमध्ये बल (Load) नसेल तर त्या ठिकाणी कर्तन बल ची संख्या बदलत नाही आणि त्या ठिकाणी कर्तन बल आकृती आडवी रेषा (Horizontal line) येते .
3. जर त्या ठिकाणी उभा बल किंवा उभी प्रतिक्रिया (Reaction) असेल तर त्या ठिकाणी कर्तन बल ताबडतोब कमी किंवा जास्त होतो व तो बलाच्या दिशेनुसार बदलतो.
4. कर्तन बल चा लांबी नुसार बदलाव हा उभ्या बलां (Vertical Force) करिता आडवी रेषा (Horizontal line) असतो तर एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed Load) साठी तिरपी रेषा (straight inclined line) असतो.
5. बेंडिंग मोमेंटचा लांबी नुसार बदलाव हा उभ्या बलां (Vertical Force) करिता तिरपी रेषा (straight inclined line) असतो तर एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed Load) साठी वक्र(Curve) पॅराबोलीक (Parabolic) असतो.
6. सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर (Support) बेंडिंग मोमेंट (BM) शून्य नेहमीच असतो.
7. कॅन्टीलीवर बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला (Free End) बेंडिंग मोमेंट (BM) शून्य नेहमीच असतो.
8. ओवर हँग बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला (Free End) व ज्या आधारावर बीम पुढे सरकलेली नाही अश्या टोकाला बेंडिंग मोमेंट नेहमीच (BM) शून्य असतो.
9. ज्या बिंदूवर कर्तन बल (Load) (शिअर फोर्स) शून्य (Zero) असतो अश्या बिंदूवर बेंडिंग मोमेंट (BM) सर्वात जास्त असतो.

3.3.7कॉन्ट्रा शिअर बिंदू (Pointof contra Shear):- शिअरफोर्स आकृतीमध्ये, ज्या बिंदूवर शिअरफोर्स त्याचे चिन्ह अधिक(+ve) ते वजा(-ve) किंवा वजा(-ve) ते अधिक(+ve) बदलते त्या बिंदूला कॉन्ट्रा शिअर बिंदू असे म्हणतात.

या बिंदूवर बेंडिंग मोमेंट हा सर्वात जास्त असतो.

3.3.8 कॉन्ट्रा फ्लेक्सर बिंदू (Point of contra flexure):- बेंडिंग मोमेंट आकृतीमध्ये, ज्या बिंदूवर बेंडिंग मोमेंट त्याचे चिन्ह अधिक(+ve) ते वजा(-ve) किंवा वजा(-ve) ते अधिक(+ve) बदलते त्या बिंदूला कॉन्ट्रा फ्लेक्सर बिंदू असे म्हणतात.

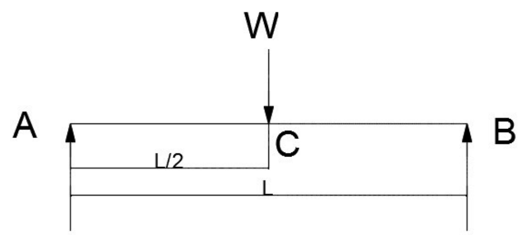
हा एक असा बिंदू आहे जिथे बीम उलट दिशेने वाकतो. हा असा बिंदू आहे ज्यावर बीमची वक्रता बदलते.

या बिंदूवर बेंडिंग मोमेंट हा शून्य (Zero) असतो.

3.4 प्रकार-1

सिंपली सपोर्टेड बीमवर केंद्रित भार/बल (Concentrated load) येत असताना.

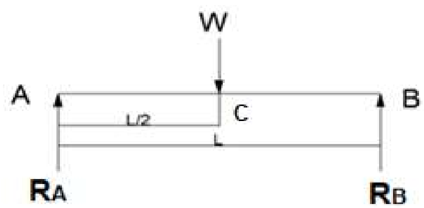
उदा. क्र . 1 खालील आकृती मध्ये सिंपली सपोर्टेड बीम ज्याची लांबी (span) 'L'मीटर आहे व त्यावर 'W'KNचा केंद्रित भार(Concentrated load) बीमच्या मधोमद लागू होत असतील तर त्या साठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



LOADING DIAGRAM

उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.



समतोल अटी (Equilibrium equation) लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

$\Sigma F_y = 0$--------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे.

Sign Convention:-

$R_A - W + R_B = 0$

$R_A + R_B = W$**..................**समीकरण (1)

$\Sigma M_A = 0$**.....................**बिंदू A भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने **(**Clockwise)मोमेंट फिरत असेल तर अधिक **(+**ve) आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने **(**Anticlockwise**)** मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-ve).

$R_A \times 0 + W \times (L/2) - R_B \times L = 0$

$WL/2 = R_B \times L$

$W\cancel{L}/2 = R_B \times \cancel{L}$

$W/2 = R_B$

$\mathbf{R_B = W/2}$

$R_B = W/2$ हा समीकरण (1) मधे टाकून R_A शोधला जाऊ शकतो.

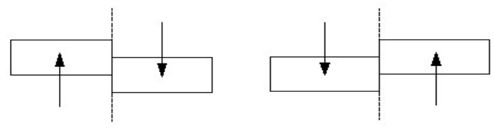
$R_A + W/2 = W$

$R_A = W - W/2$

$\mathbf{R_A = W/2}$

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force) शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा(-ve) घ्यायचा.



$(SF_A)_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_A)_L = 0$

$(SF_A)_R$= म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_A)_R = +R_A$

$(SF_A)_R = +W/2$

$(SF_C)_L$= म्हणजेच बिंदू C च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_C)_L = +R_A = +W/2$

$(SF_C)_R$= म्हणजेच बिंदू C च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_C)_R = +R_A - W = +W/2 - W$

$(SF_C)_R = -W/2$

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_L = +R_A - W = +W/2 - W$

$(SF_B)_L = -W/2$

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_R = = +R_A - W + R_B$

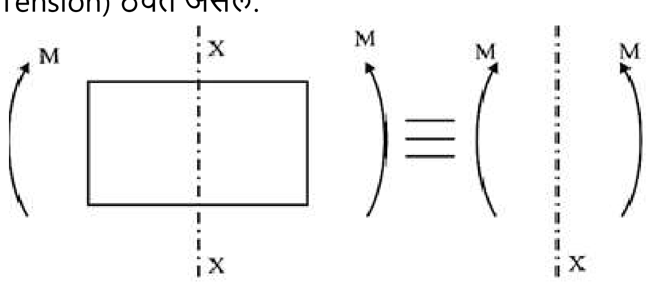
$(SF_B)_R = +W/2 - W + W/2$

$(SF_B)_R = 0$

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM) शोधणे.

Sign Convention:-

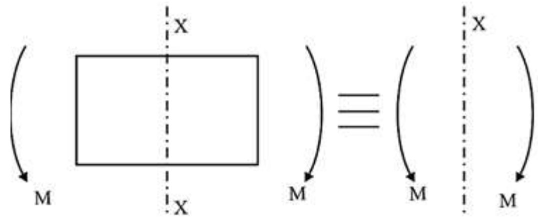
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension) ठेवत असेल.



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यास Hogging असे म्हणतात. किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.



Bending Moment = -ve

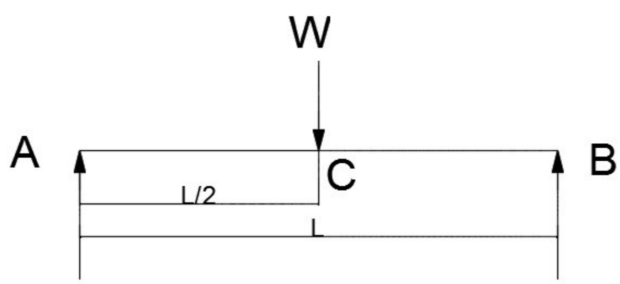
(BM)$_C$= म्हणजेच बिंदू C वर बेंडिंग मोमेंट

(BM)$_C$**=**+R$_A$x(L/2) .... बिंदू C च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

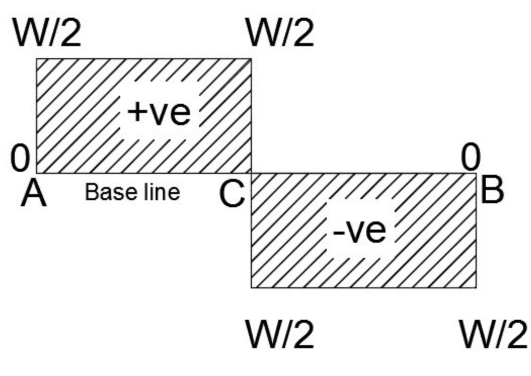
(BM)$_C$**=**+(W/2)x(L/2)

(BM)$_C$**=**+WL/4

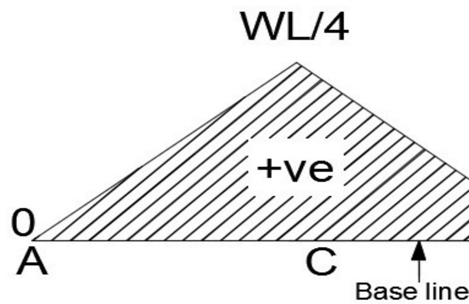
(BM)$_A$**=(**BM)$_B$= 0 .... सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर (Support) बेंडिंग मोमेंट **(**BM)नेहमीच शून्य असतो.



LOADING DIAGRAM



SHEAR FORCE DIAGRAM

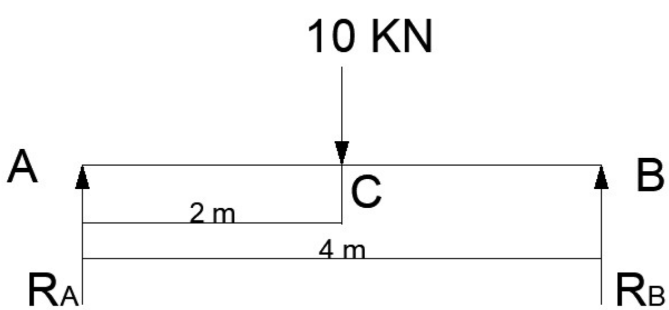


BENDING MOMENT DIAGRAM

म्हणून सर्वोच्च शिअर फोर्स (Max.SF)=W/2

सर्वोच्च बेंडिंग मोमेंट (Max.BM)=WL/4

उदा. क्र . 2 खालील आकृती मध्ये सिंपली सपोर्टेड बीम ज्याची लांबी (span) '4'मीटर आहे व त्यावर '10'KNचा केंद्रित भार(Concentrated load) बीमच्या मधोमद लागू होत आहे तर त्या साठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



LOADING DIAGRAM

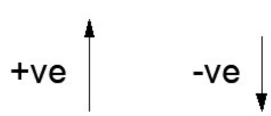
उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

$\Sigma Fy = 0$ --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



$R_A - 10 + R_B = 0$

$R_A + R_B = 10$**....................**समीकरण (1)

$\Sigma M_A = 0$**......................**बिंदू Aभोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (Clockwise)मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+ve) आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (Anticlockwise) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-ve).

$R_A x\ 0 + 10x2 - R_B x\ 4 = 0$

$10 \times 2 = R_B \times 4$

$20 = R_B \times 4$

$20/4 = R_B$

R_B = 5KN

R_B= 5 KNहा समीकरण (1) मधे टाकून R_Aशोधला जाऊ शकतो.

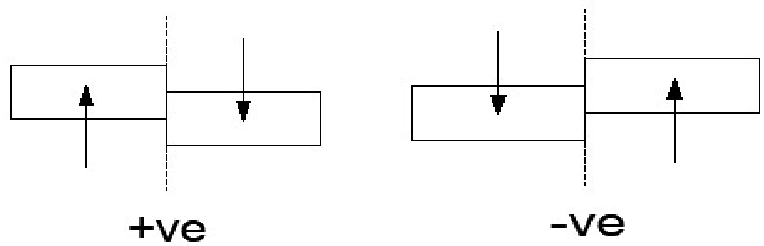
$R_A + 5 = 10$

$R_A = 10 - 5$

R_A =5KN

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force) शोधणे.

Sign Convention:- छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा(-ve) घ्यायचा.



$(SF_A)_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_A)_L = 0$

$(SF_A)_R$= म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_A)_R = +R_A$

$(SF_A)_R = +5$ KN

$(SF_C)_L$= म्हणजेच बिंदू Cच्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_C)_L = +R_A = +5$ KN

$(SF_C)_R$= म्हणजेच बिंदू Cच्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_C)_R = +R_A - 10 = 5 - 10$

$(SF_C)_R = -5$ KN

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_L = +R_A - 10 = 5 - 10$

$(SF_B)_L = -5$ KN

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_R == +R_A - 10 + R_B$

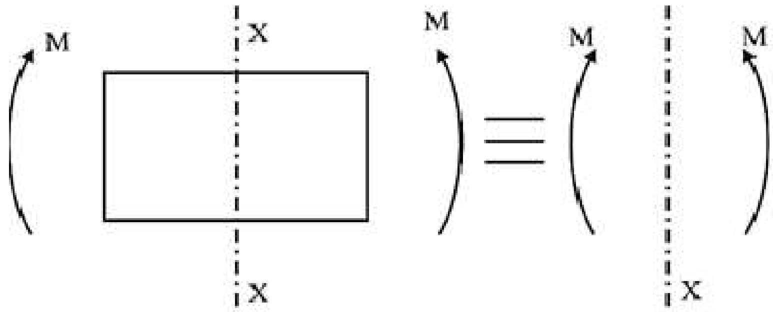
$(SF_B)_R = +5 - 10 + 5$

$(SF_B)_R = 0$

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM) शोधणे.

Sign Convention:-

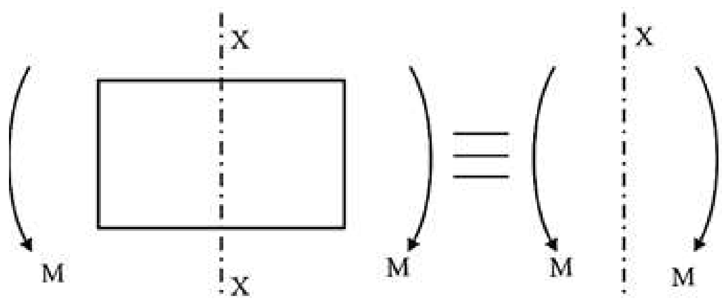
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension) ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.



Bending Moment = -ve

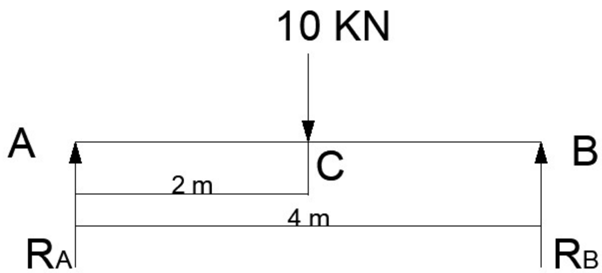
(BM)$_C$= म्हणजेच बिंदू C वर बेंडिंग मोमेंट

(BM)$_C$**=**+R$_A$x2 .... बिंदू C च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

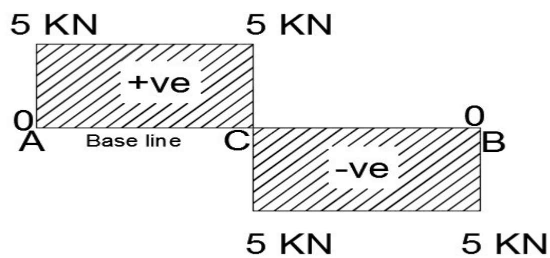
(BM)$_C$=**+**5 **x** 2

(BM)$_C$**=**+10 KNm

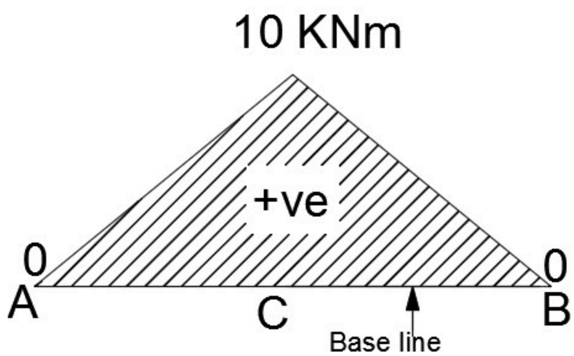
(BM)$_A$**=(**BM)$_B$= 0 .... सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर (Support) बेंडिंग मोमेंट **(**BM)शून्य असतो.



LOADING DIAGRAM



SHEAR FORCE DIAGRAM



BENDING MOMENT DIAGRAM

तपासणी (Check):- सदरील तपासणी (Check) फक्त विद्यार्थ्यांच्या महितीकरिता आहे परीक्षेत लिहिण्याची आवश्यकता नाही.

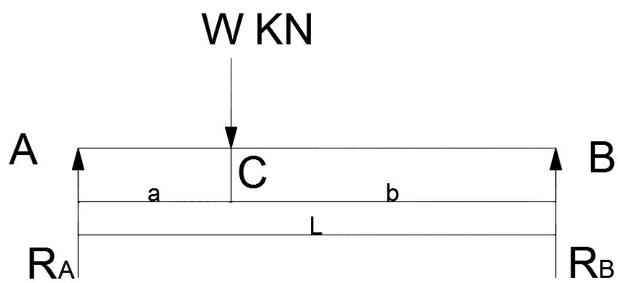
सर्वोच्च शिअर फोर्स**(**Max.SF)=W/2 **=** 10/2 = 5 KN

सर्वोच्च बेंडिंग मोमेंट (Max.BM)=WL/4 = (10x4)/ 4 = 10 KN.m

3.4 प्रकार-2

सिंपली सपोर्टेड बीमवर विक्षिप्त भार/बल (Eccentric load) येत असताना.

उदा. क्र . **1** खालील आकृती मध्ये सिंपली सपोर्टेड बीम ज्याची लांबी (Span) 'L'मीटर आहे व त्यावर 'W'KNचा विक्षिप्त भार/बल(Eccentric load) बीमच्या Aआधारपासून (Support) a अंतरावर लागू होत आहे तर त्या साठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



LOADING DIAGRAM

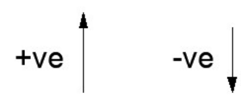
उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



$R_A - W + R_B = 0$

$R_A + R_B = W$**...................**समीकरण (1)

$\Sigma M_A = 0$.......................बिंदू A भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (Clockwise) मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+ve) आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (Anticlockwise**)** मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-ve).

$R_A x\ 0 + Wxa - R_B x L = 0$

$Wxa = R_B x\ L$

$Wa/L = R_B$

$R_B = Wa/L$ KN

$R_B = Wa/L$हा समीकरण (1) मधे टाकून R_Aशोधला जाऊ शकतो.

$R_A + Wa/L = W$

$R_A = W - (Wa/L)$

$R_A = [WL - Wa]/L$

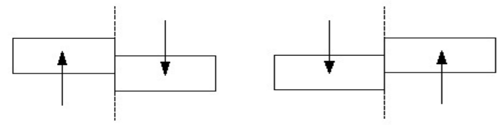
$R_A = W[L-a]/L$----------------- [या ठिकाणी आपण **(**L-a) **=** b असे म्हणू शकतो]

$R_A = Wb/L$

$R_A = Wb/L$ KN

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force) शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



$(\mathbf{SF_A})_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(\mathbf{SF_A})_L$=0

$(\mathbf{SF_A})_R$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(\mathbf{SF_A})_R = +R_A$

$(\mathbf{SF_A})_R$ = + Wb/L KN

$(\mathbf{SF_C})_L$= म्हणजेच बिंदू C च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(\mathbf{SF_C})_L = +R_A =$ + Wb/L KN

$(\mathbf{SF_C})_R$= म्हणजेच बिंदू C च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(\mathbf{SF_C})_R = +R_A - W = Wb/L - W$

$(\mathbf{SF_C})_R = [Wb - WL]/L$

$(\mathbf{SF_C})_R$= W [b–L]/L----------------- [या ठिकाणी आपण (b-L) = a असे म्हणू शकतो]

$(\mathbf{SF_C})_R = -Wa/L$

$(\mathbf{SF_B})_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(\mathbf{SF_B})_L = +R_A - W = Wb/L - W$

$(\mathbf{SF_B})_L = [Wb - WL]/L$

$(\mathbf{SF_B})_L$= W [b–L]/L----------------- [या ठिकाणी आपण (b-L) = a असे म्हणू शकतो]

$(\mathbf{SF_B})_L = -Wa/L$

$(\mathbf{SF_B})_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(\mathbf{SF_B})_R == +R_A - W + R_B$

$(\mathbf{SF_B})_R = +Wb/L - W + Wa/L$

$(\mathbf{SF_B})_R = +Wb/L + Wa/L - W$

$(\mathbf{SF_B})_R$=(W/L) [b+a]–W -------------[या ठिकाणी आपण (b+a) = L असे म्हणू शकतो]

$(\mathbf{SF_B})_R = (W/L)L - W$

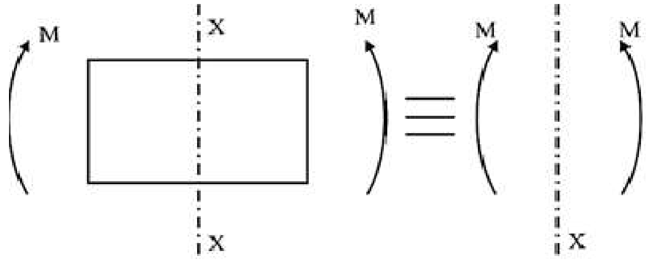
$(\mathbf{SF_B})_R = W - W$

$(\mathbf{SF_B})_R = \mathbf{0}$

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM) शोधणे.

Sign Convention:-

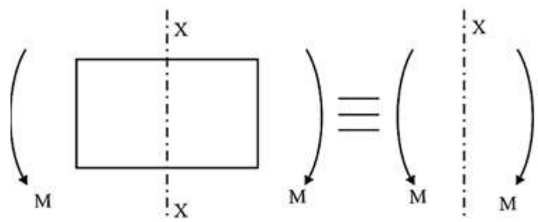
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve) असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension) ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

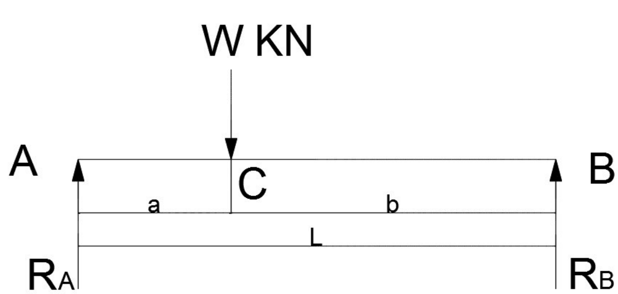
(**BM)**$_C$= म्हणजेच बिंदू **C** वर बेंडिंग मोमेंट

(**BM)**$_C$=**+**R_A**x a** .... बिंदू **C** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

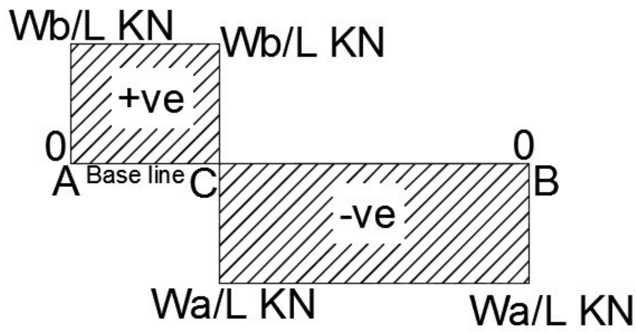
(**BM)**$_C$=**+(Wb/L) x a**

(**BM)**$_C$=**+Wab/L KNm**

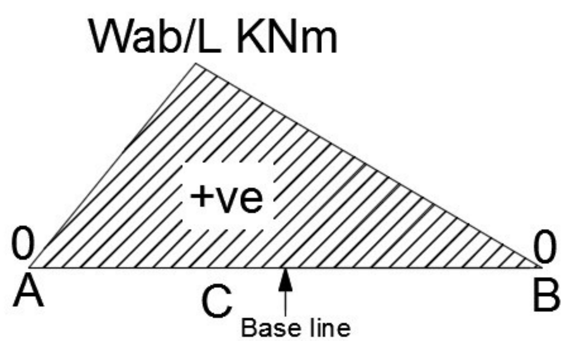
(**BM)**$_A$=(**BM)**$_B$= 0 .... सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर (Support) बेंडिंग मोमेंट (BM) नेहमीच शून्य असतो.



LOADING DIAGRAM



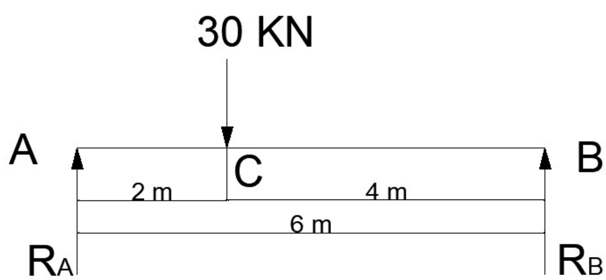
SHEAR FORCE DIAGRAM



BENDING MOMENT DIAGRAM

म्हणून
सर्वोच्च बेंडिंग मोमेंट (Max.BM)=Wab/L

उदा. क्र . **2** खालील आकृती मध्ये सिंपली सपोर्टेड बीम ज्याची लांबी **(**span**)** '6 'मीटर आहे व त्यावर **'**30'KNचा केंद्रित भार(Concentrated load) बीमच्या A आधारपासून (सपोर्ट पासून) 2 m अंतरावर लागू होत आहे तर त्या साठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



LOADING DIAGRAM

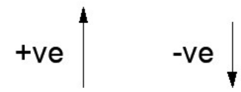
उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



R_A-30+R_B=0

R_A +R_B=30**…………………**समीकरण (1)

ΣM_A = 0…………………..बिंदू A भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (Clockwise) मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+ve) आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (Anticlockwise) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-ve).

R_Ax 0 +30x **2** -R_Bx 6 =0

30x2=R_Bx 6

60=R_Bx ~~6~~

60/6=R_B

R_B= 10KN

R_B= 10 KNहा समीकरण (1) मधे टाकून R_Aशोधला जाऊ शकतो.

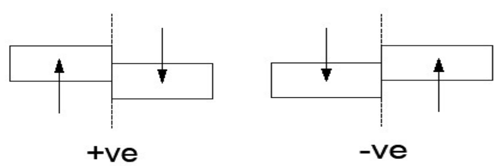
R_A + 10=30

R_A =30- 10

R_A =20KN

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force) शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



(SF_A)$_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

(SF_A)$_L$=0

(SF_A)$_R$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

(SF_A)$_R$=+R_A

(SF_A)$_R$=+20 KN

(SF_C)$_L$= म्हणजेच बिंदू C च्या डाव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

(SF_C)$_L$= +R_A=+20 KN

(SF_C)$_R$= म्हणजेच बिंदू C च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

(SF_C)$_R$= +R_A– 30 = 20 **–** 30

(SF_C)$_R$=- 10 KN

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_B)_L = +R_A - 30 = 20 - 30$

$(SF_B)_L = -10$ KN

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)कर्तन बल (ShearForce)

$(SF_B)_R = = +R_A - 30 + R_B$

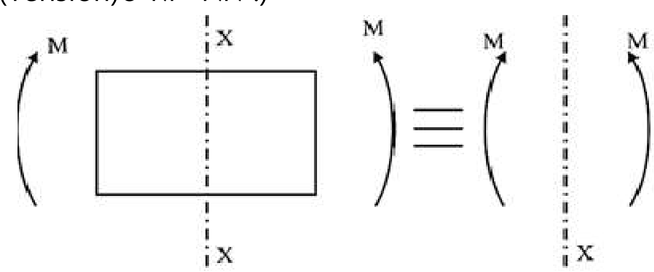
$(SF_B)_R = +20 - 30 + 10$

$(SF_B)_R = 0$

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM) शोधणे.

Sign Convention:-

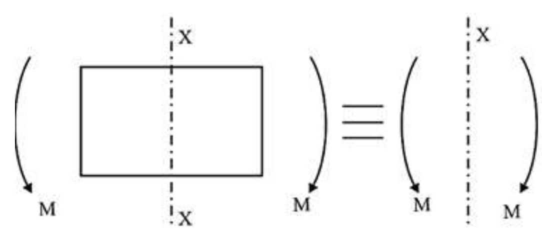
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve) असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension)ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve) असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension)आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

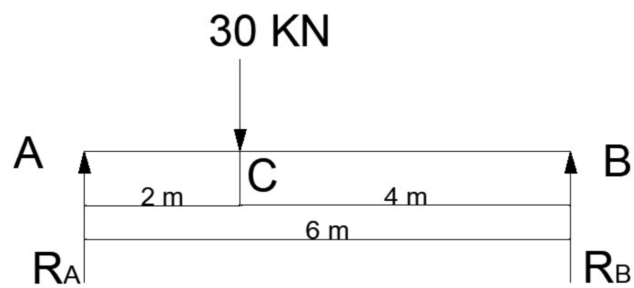
$(BM)_C$= म्हणजेच बिंदू **C** वर बेंडिंग मोमेंट

$(BM)_C = +R_A \times 2$ .... बिंदू **C** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

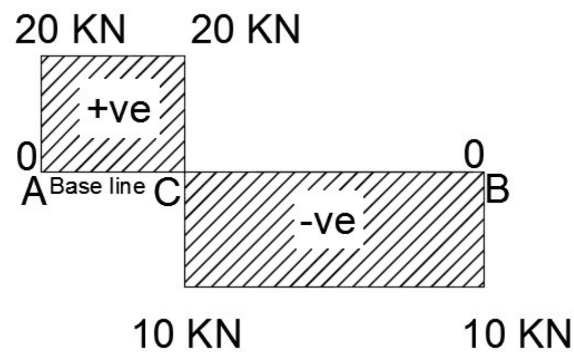
$(BM)_C = +20 \times 2$

$(BM)_C = +40$ **KNm**

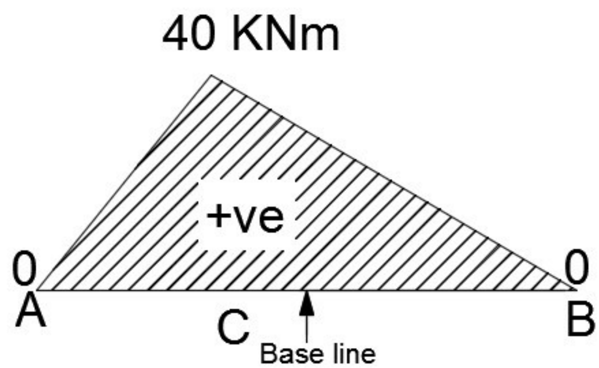
$(BM)_A = (BM)_B = 0$ .... सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर (Support) बेंडिंग मोमेंट (**BM**) शून्य असतो.



LOADING DIAGRAM



SHEAR FORCE DIAGRAM

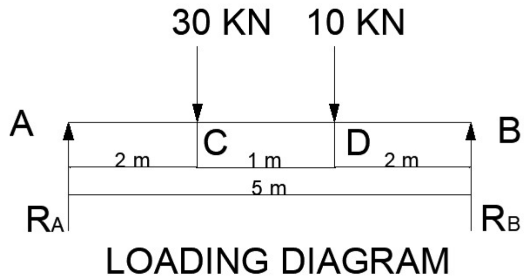


BENDING MOMENT DIAGRAM

तपासणी (Check):- सदरील तपासणी (Check) फक्त विद्यार्थ्यांच्या महितीकरिता आहे परीक्षेत लिहिण्याची आवश्यकता नाही.

सर्वोच्च बेंडिंग मोमेंट (Max.BM)=Wab/L = (30x2x4)/6= 40 KN.m

उदा. क्र . **4** खालील आकृती मध्ये सिंपली सपोर्टेड बीम ज्याची लांबी (**span**) **'5** 'मीटर आहे व त्यावर **'30'KN** चा केंद्रित भार(Concentrated load) बीमच्या **A** आधारपासून (सपोर्ट पासून) 2 **m** अंतरावरवर लागू होत आहेआणि **'10'KN** चा केंद्रित भार(Concentrated load) बीमच्या **A** आधारपासून (सपोर्ट पासून) 3 **m** अंतरावरवर लागू होत आहे तर त्या साठी शिअरफोर्स आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



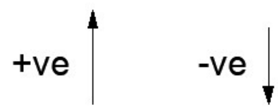
उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



R_A-30-10 +R_B=0

R_A +R_B=40....................समीकरण (1)

ΣM_A = 0.......................बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने **(**Clockwise) मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने **(**Anticlockwise**)** मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

R_Ax 0 +30x2+10x3 -R_Bx 5 =0

30x2+10x 3 =R_Bx 5

90=R_Bx 5

90/5 =R_B

R_B= 18 KN

R_B= 18 KNहा समीकरण (1) मधे टाकून **R_A**शोधला जाऊ शकतो.

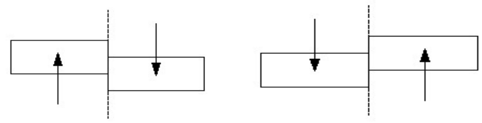
R_A + 18 =40

R_A =40- 18

R_A =22KN

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force) शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



+ve -ve

$(SF_A)_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_A)_L$=**0**

$(SF_A)_R$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_A)_R = +R_A$

$(SF_A)_R$=+22 KN

$(SF_C)_L$= म्हणजेच बिंदू C च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_C)_L = +R_A = +22$ KN

$(SF_C)_R$= म्हणजेच बिंदू C च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_C)_R = +R_A - 30 = 22 - 30$

$(SF_C)_R$=-8 KN

$(SF_D)_L$= म्हणजेच बिंदू D च्या डाव्या बाजूलाकर्तन बल(Shear Force)

$(SF_D)_L = +R_A - 30 = 22 - 30 = -8$ KN

$(SF_D)_R$= म्हणजेच बिंदू D च्या उजव्या बाजूलाकर्तन बल(Shear Force)

$(SF_D)_R = +R_A - 30 - 10 = 22 - 30 - 10 = -18$ KN

$(SF_D)_R$= -18 KN

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_L = +R_A - 30 - 10 = 22 - 30 - 10$

$(SF_B)_L$= **-18** KN

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_R == +R_A - 30 - 10 + R_B$

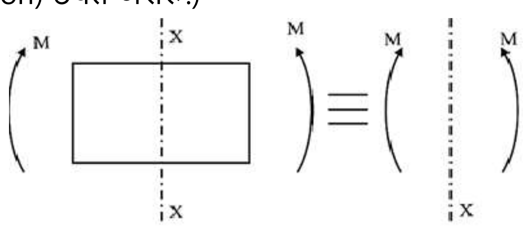
$(SF_B)_R = +22 - 30 - 10 + 18$

$(SF_B)_R$=**0**

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

Sign Convention:-

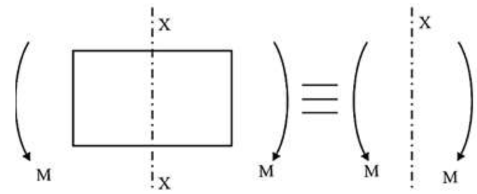
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension) ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

(**BM)$_C$**= म्हणजेच बिंदू **C** वर बेंडिंग मोमेंट

(**BM)$_C$**=**+**R$_A$x 2 .... बिंदू **C** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

(**BM)$_C$**=+22**x** 2

(**BM)$_C$**=**+44 KNm**

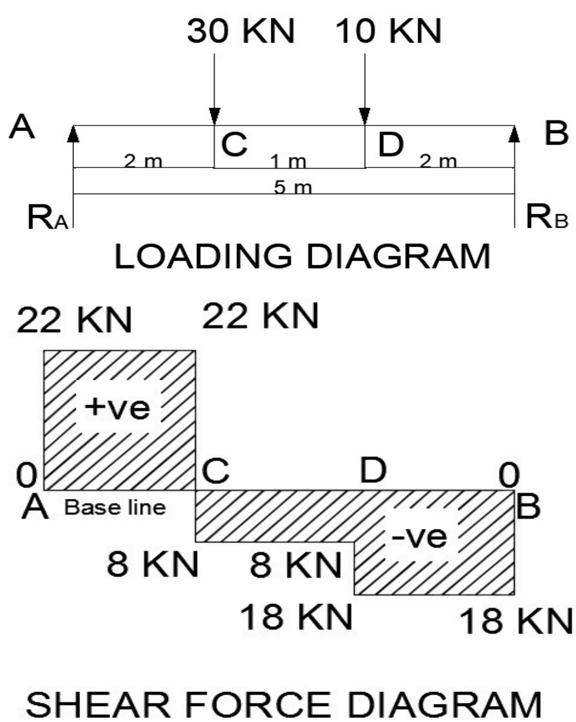
(**BM)$_D$**= म्हणजेच बिंदू **C** वर बेंडिंग मोमेंट

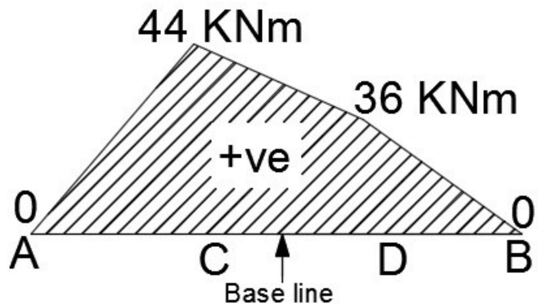
(**BM)$_D$**=**+**R$_B$x 2 .... बिंदू **C** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

(**BM)$_D$**=**+**18**x** 2

(**BM)$_D$**=**+36 KNm**

(**BM)$_A$**=(**BM)$_B$**= 0 .... सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर **(**Support**)** बेंडिंग मोमेंट (**BM)** शून्य असतो.



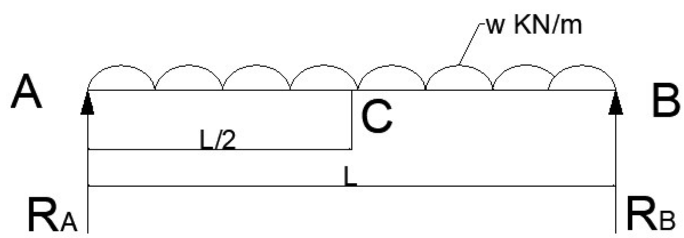


BENDING MOMENT DIAGRAM

3.4 प्रकार-3

सिंपली सपोर्टेड बीमवर एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed load) येत असताना.

उदा. क्र . 1 खालील आकृती मध्ये सिंपली सपोर्टेड बीम ज्याची लांबी **(**span**)** 'L'मीटर आहे व त्यावर **'w' 'KN/m** चा एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed load)बीमच्या संपूर्ण लांबीवर लागू होत असेल तर त्या साठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



LOADING DIAGRAM

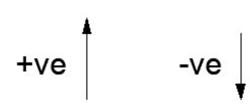
उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0--------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे.

Sign Convention:-



$R_A-(wxL)+R_B=0$

$R_A+R_B=wL$**...................**समीकरण (1)

$\Sigma M_A = 0$.......................बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (**Clockwise)**मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (**Anticlockwise**) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

$R_A x\ 0 + wx\ L\ x\ (L/2) - R_B x\ L = 0$

$wL^2/2=R_B x\ L$

$wL^2/2=R_B x$ ~~L~~

$wL/2=R_B$

$\mathbf{R_B= wL/2}$

$R_B= wL/2$हा समीकरण (1) मधे टाकून $\mathbf{R_A}$शोधला जाऊ शकतो .

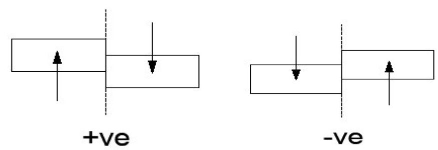
$R_A + wL/2=wL$

$R_A =wL- wL/2$

$\mathbf{R_A =wL/2}$

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force)शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



$\mathbf{(SF_A)_L}$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$\mathbf{(SF_A)_L=0}$

$\mathbf{(SF_A)_R}$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$\mathbf{(SF_A)_R=+R_A}$

$\mathbf{(SF_A)_R=+wL/2}$

$\mathbf{(SF_C)_L}$= म्हणजेच बिंदू C च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$\mathbf{(SF_C)_L= +R_A- w \times (L/2)=+wL/2- w \times (L/2)=0}$

$\mathbf{(SF_C)_R}$= म्हणजेच बिंदू C च्या उजव्या बाजूला कर्तनबल(Shear Force)

$\mathbf{(SF_C)_R= +R_A- w \times (L/2)=+wL/2- w \times (L/2)}$

$\mathbf{(SF_C)_R= 0}$

$\mathbf{(SF_B)_L}$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$\mathbf{(SF_B)_L=+R_A-wL = +wL/2 -wL}$

$\mathbf{(SF_B)_L= -wL/2}$

$\mathbf{(SF_B)_R}$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तनबल(Shear Force)

$\mathbf{(SF_B)_R==+R_A-wL + R_B}$

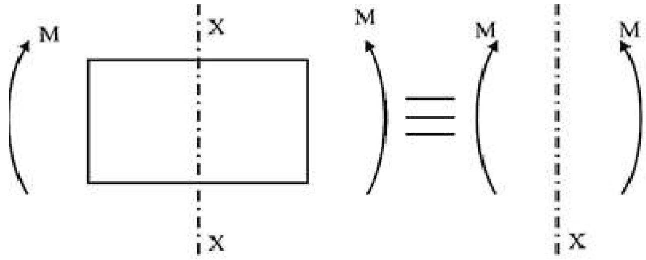
$\mathbf{(SF_B)_R=+wL/2 -wL+wL/2}$

$\mathbf{(SF_B)_R=0}$

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM) शोधणे.

Sign Convention:-

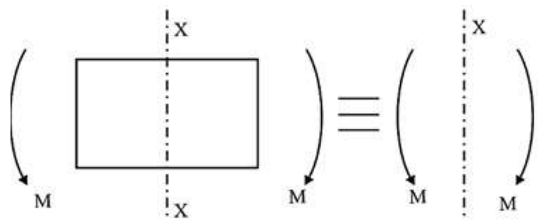
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension) ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

(BM**)**$_C$= म्हणजेच बिंदू **C** वर बेंडिंग मोमेंट

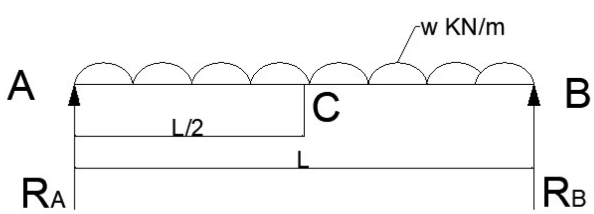
(BM)$_C$**=**+R_Ax(L/2)-[wx(L/2)]x(L/4) .... बिंदू **C** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

(BM)$_C$**=**+(wL/2)x(L/2)-[wx(L/2)]x(L/4)

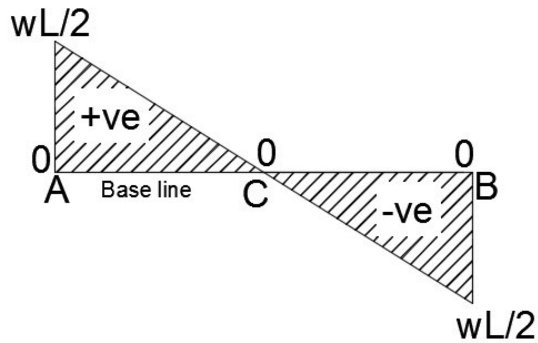
(BM)$_C$**=**+wL^2/4- wL^2/8

(BM)$_C$**=**+ wL^2/8

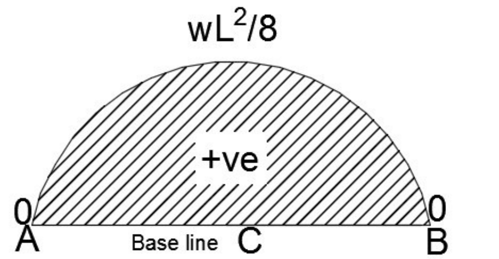
(BM)$_A$**=(**BM)$_B$**=** 0 .... सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर **(**Support**)** बेंडिंग मोमेंट **(**BM)शून्य असतो.



LOADING DIAGRAM



SHEAR FORCE DIAGRAM



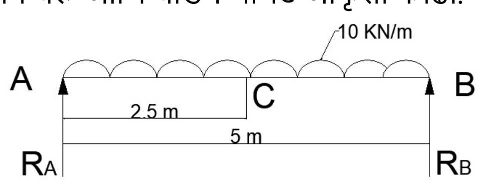
BENDING MOMENT DIAGRAM

म्हणून

सर्वोच्च कर्तन बल (Max.SF) = wL/2KN

सर्वोच्च बेंडिंग मोमेंट (Max.BM) = $wL^2/2$

उदा. क्र . **2** खालील आकृती मध्ये सिंपली सपोर्टेड बीम ज्याची लांबी **(**span**)** '5'मीटर आहे व त्यावर 'w'KN/mचा एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed load)बीमच्या संपूर्ण लांबीवर लागू होत असेल तर त्या साठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



LOADING DIAGRAM

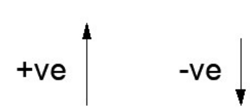
उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकतात.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



R_A-(10x5)+R_B=0

R_A +R_B=50 **....................**समीकरण (1)

ΣM_A = 0.......................बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (**Clockwise)**मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (**Anticlockwise**) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

R_Ax 0 +10x 5 x **(**5/2)-R_Bx 5 =0

125=R_Bx 5

125/5=R_B

25=R_B

R_B= 25 KN

R_B= 25 KNहा समीकरण (1) मधे टाकून **R_A**शोधला जाऊ शकतो .

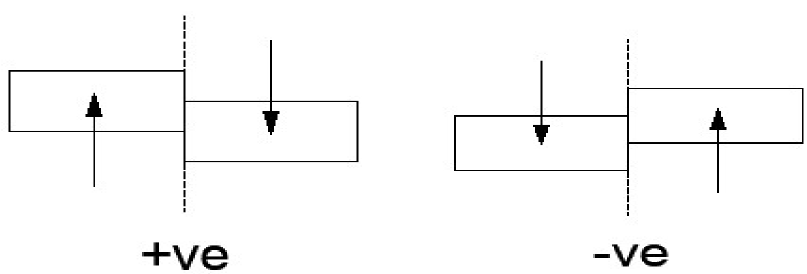
R_A + 25=50

R_A =50- 25

R_A =25 KN

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force) शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



(SF_A)$_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

(SF_A)$_L$=0 kN

(SF_A)$_R$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

(SF_A)$_R$=+R_A

(SF_A)$_R$=+25 KN

(SF_C)$_L$= म्हणजेच बिंदू Cच्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

(SF_C)$_L$= +R_A– 10 x (2.5)=+25– 25=0

(SF_C)$_R$= म्हणजेच बिंदू Cच्या उजव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

(SF_C)$_R$= +R_A– 10 x (2.5)=+25– 25

(SF_C)$_R$= 0 KN

(SF_B)$_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

(SF_B)$_L$=+R_A–10x5 = +25–50

(SF_B)$_L$= -25 KN

(SF_B)$_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

(SF_B)$_R$==+R_A–10 x 5 + R_B

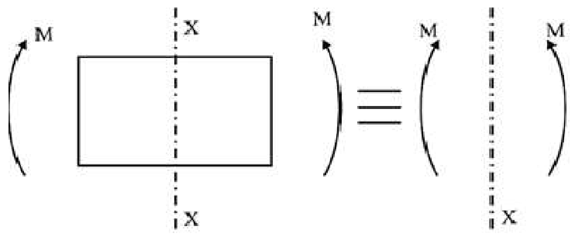
(SF_B)$_R$=+25–50+ 25

(SF_B)$_R$=0

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

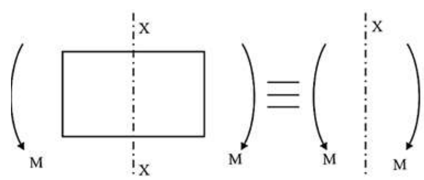
Sign Convention:-

जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension) ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

(BM)$_C$= म्हणजेच बिंदू **C** वर बेंडिंग मोमेंट

(BM)$_C$=+R_Ax(2.5)-[10x2.5x(2.5/2)] .... बिंदू **C** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

(BM)$_C$=+25x2.5-10x2.5x(2.5/2)

(BM)$_C$=**+**62.5- 31.25

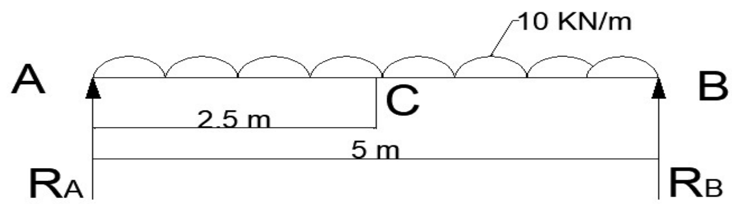
(BM)$_C$=**+** 31.25 KNm

(BM)$_A$=**(BM)$_B$**= 0 .... सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर (Support) बेंडिंग मोमेंट **(BM)** शून्य असतो.

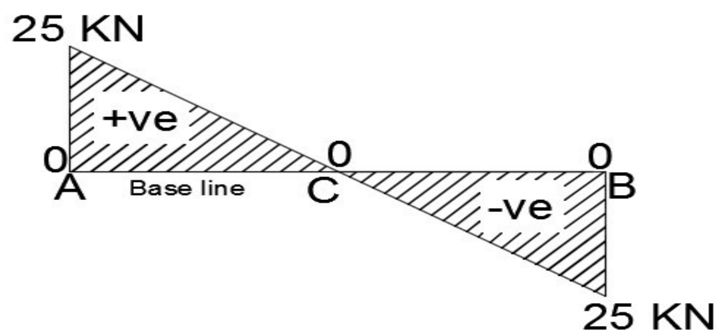
तपासणी (Check):- सदरील तपासणी (Check) फक्त विद्यार्थ्यांच्या महितीकरिता आहे परीक्षेत लिहिण्याची आवश्यकता नाही.

सर्वोच्च कर्तन बल (Max.SF) = wL/2KN = (10x5) / 2 = 25 KN

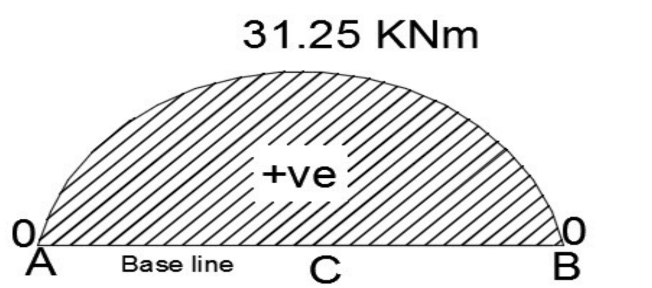
सर्वोच्च बेंडिंग मोमेंट (Max.BM) = $wL^2/8$ = $(10x5^2)/8$ = 31.25 KN.m



LOADING DIAGRAM

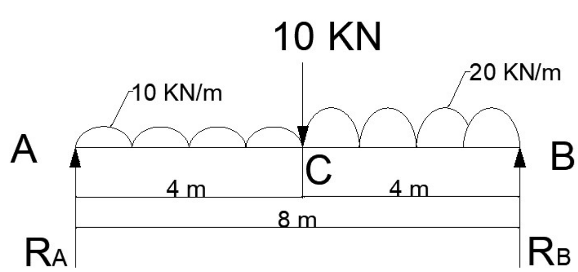


SHEAR FORCE DIAGRAM



BENDING MOMENT DIAGRAM

उदा. क्र . **3** खालीलदिलेल्या आकृतीसाठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



LOADING DIAGRAM

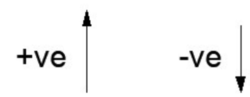
उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 ---------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे.

Sign Convention:-



R_A-(10x4)-10 –(20x4)+R_B=0

R_A +R_B=130 **....................**समीकरण (1)

ΣM$_A$ = 0 ....बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (**Clockwise)** मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (**Anticlockwise**) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

R_Ax 0 +10x 4 x **(**4/2)+10x4+20x 4 x[4+**(**4/2)]-R_Bx 8 =0

600=R_Bx 8

600/8=R_B

75=R_B

R_B= 75 KN

R_B= 75KNहा समीकरण (1) मधे टाकून **R_A**शोधला जाऊ शकतो .

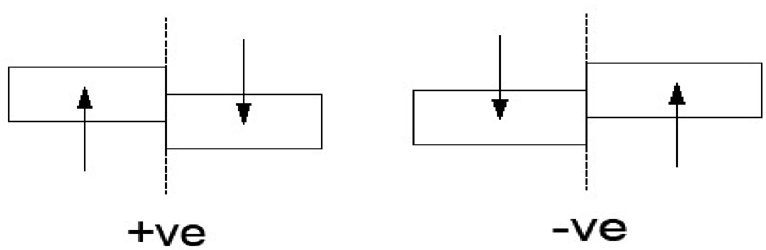
R_A + 75=130

R_A =130- 75

R_A =55 KN

पायरी (2) :- कर्तन बल (**Shear Force)शोधणे.**

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



(**SF$_A$)$_L$=** म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

(SF$_A$)$_L$=0 kN

(**SF$_A$)$_R$ =** म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

(SF$_A$)$_R$=+R$_A$

(SF$_A$)$_R$=+55 KN

(**SF$_C$)$_L$=** म्हणजेच बिंदू C च्या डाव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

(SF$_C$)$_L$= +R$_A$– 10 x (4)=+55– 40=15 KN

(**SF$_C$)$_R$=** म्हणजेच बिंदू C च्या उजव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

$(SF_C)_R$= +R_A– 10 x (4)-10=+55– 40-10

$(SF_C)_R$=+5 KN

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_B)_L$=+R_A–10x4-10-20x4 = +55–40-10-80

$(SF_B)_L$= -75 KN

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

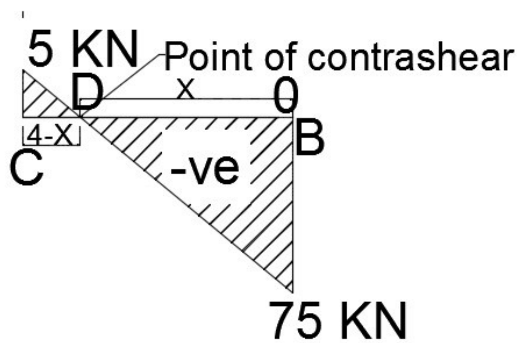
$(SF_B)_R$=+R_A–10x4-10-20x4 + **R_B**

$(SF_B)_R$=+55–40-10-80 +**75**

$(SF_B)_R$=0

पायरी (3) :- कॉन्ट्रा शिअर बिंदूचे (Pointof contra shear) अंतर काढणे.

समजा,X हे कॉन्ट्रा शिअर बिंदूचे (Pointof contra shear) अंतर **B** बिंदु पासून आहे.



समान त्रिकोणाचा गुणधर्म वापरुन

75/x = 5/(4-x)

75(4-x)=5(x)

300-75x=5x

300=5x+75x

300=80x

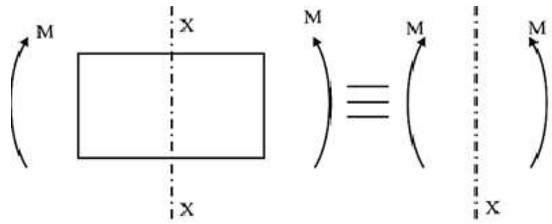
X=300/80

X=3.75 m -------------**B** बिंदु पासून

पायरी (4) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

Sign Convention:-

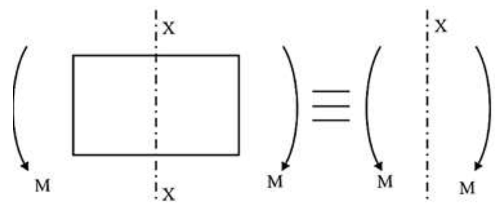
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension)ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

(**BM)$_C$**= म्हणजेच बिंदू **C** वर बेंडिंग मोमेंट

(**BM)$_C$=+R_Ax(4)-[10x4(4/2)]** .... बिंदू **C** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

(**BM)$_C$=+55x4-10x4(4/2)**

(**BM)$_C$=+220- 80**

(**BM)$_C$=+ 140 KNm**

(**BM)$_D$**= म्हणजेच बिंदू **D**वर बेंडिंग मोमेंट

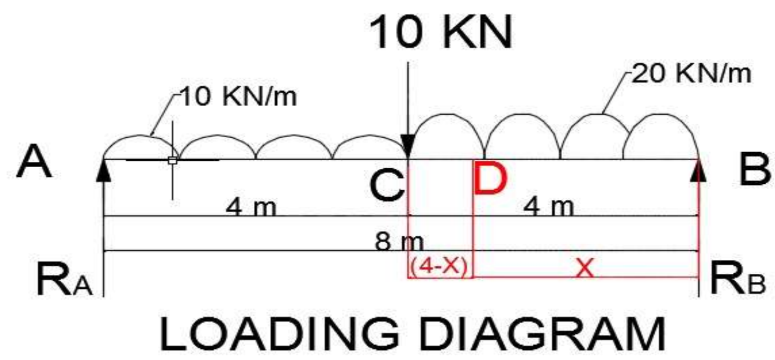
(**BM)$_D$=+R_Bx(X)-[20xX(X/2)]** .... बिंदू **D** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

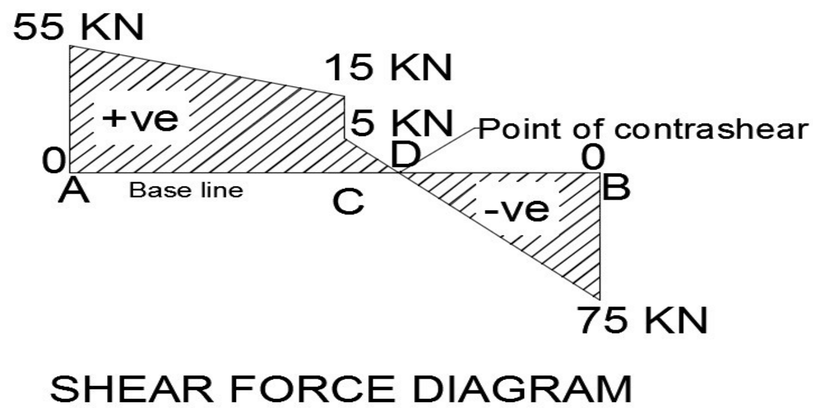
(**BM)$_D$=+75x3.75-10x3.75(3.75/2)**

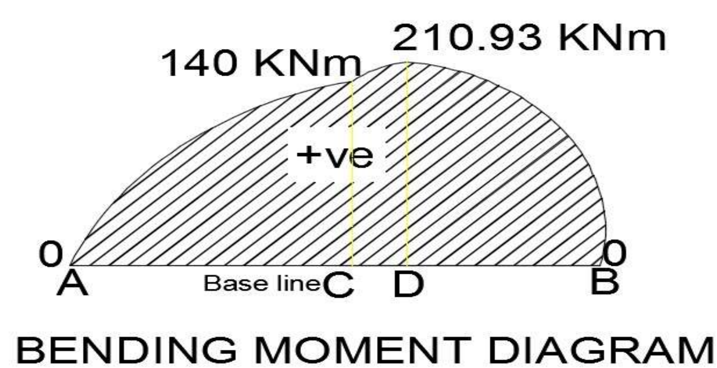
(**BM)$_D$=+281.25–** 70.31

(**BM)$_D$=+210.93 KNm**

(**BM)$_A$**=(**BM)$_B$**= 0 .... सिंपली सपोर्टेड बीमच्या दोन आधारांवर (**Support**) बेंडिंग मोमेंट (**BM)** नेहमीच शून्य असतो.







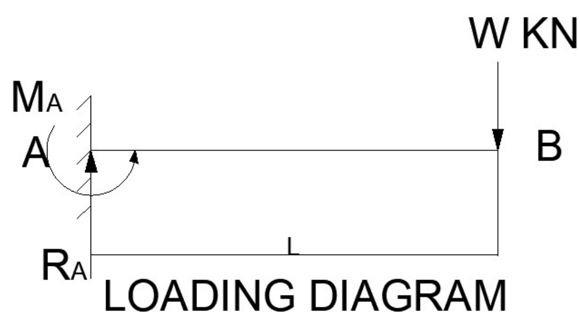
3.4 प्रकार-4

कॅन्टीलीवर बीमवर केंद्रित भार(Concentrated load) येत असताना .

उदा. क्र . **1** खालील आकृती मध्ये कॅन्टीलीवर बीम ज्याची लांबी (**span**) **'L'** मीटर आहे व त्यावर **'W'KN** चा केंद्रित भार(Concentrated load) बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला **(**Free end)लागू होत असेल तर त्या बीमसाठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.

उत्तर:-

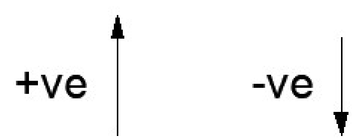
पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.



समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



R_A-W =0

R_A =W KN....................समीकरण (1)

ΣM_A = 0.......................बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (**Clockwise)**मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (**Anticlockwise**) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

R_Ax 0 +WxL-M_A =0

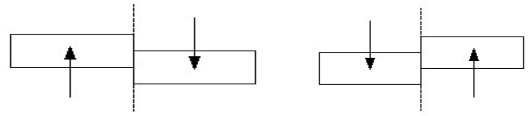
WxL=M_A

M_A= WL

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force)शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या

बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



$(SF_A)_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_A)_L = 0$

$(SF_A)_R$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

$(SF_A)_R = +R_A$

$(SF_A)_R = +W$

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_B)_L = +R_A = +W$

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तनबल (Shear Force)

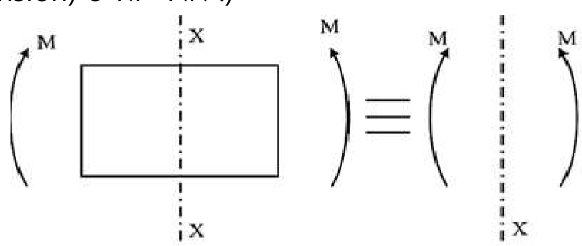
$(SF_B)_R = +R_A - W = +W - W$

$(SF_B)_R = 0$

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

Sign Convention:-

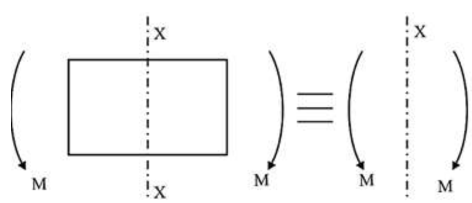
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension) ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

$(\mathbf{BM})_{AL}$= म्हणजेच बिंदू **A** च्या डाव्या बाजूला बेंडिंग मोमेंट

ज्या बिंदूवर मोमेंट लागत असेल अश्या बिंदूवर बेंडिंग मोमेंट घेताना त्या बिंदूच्या डाव्या व उजव्या अश्या दोन्ही बाजूला बेंडिंग मोमेंट घ्यावी लागते.

$(BM)_{AL}=0$............(**A** च्या डाव्या बाजूलाछेद घेतला असता छेदाच्या डाव्या बाजूला एकही बल **(**Force) किंवा प्रतिक्रिया **(**Reaction**)** नाही)

$(BM)_{AR}$= म्हणजेच बिंदू **A** च्या उजव्या बाजूला बेंडिंग मोमेंट

$(BM)_{AR}= -M_A$

$(BM)_{AR}= -WL$ ------- (**Hogging)**

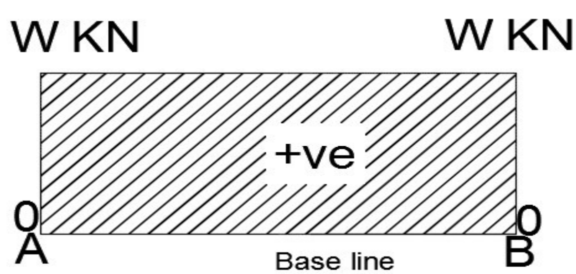
$(BM)_C= 0$ ....कॅन्टीलीवर बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला (**Free End)**बेंडिंग मोमेंट (**BM)** शून्य असतो.

म्हणजेच

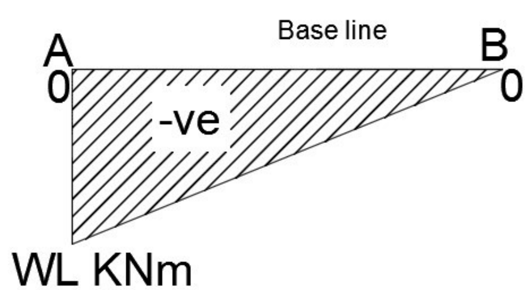
सर्वात जास्त कर्तन बल (Max.SF)=WKN

सर्वात जास्त बेंडिंग मोमेंट (Max.BM)=WLKN.m

LOADING DIAGRAM

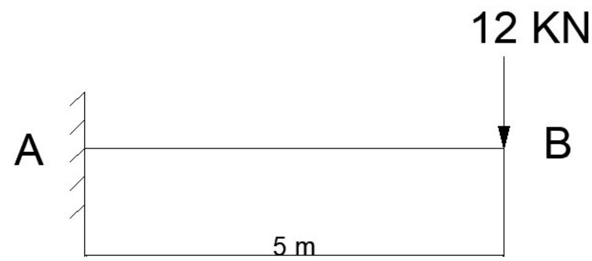


SHEAR FORCE DIAGRAM



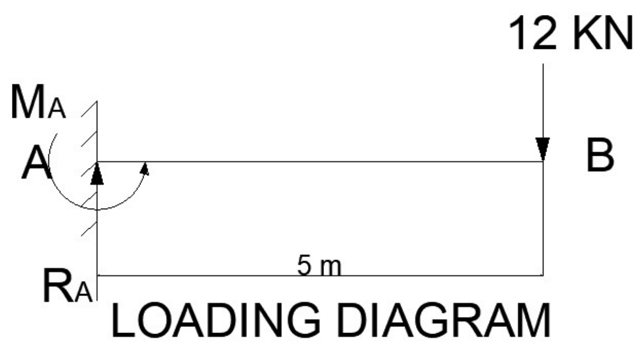
BENDING MOMENT DIAGRAM

उदा. क्र . **2** खालील आकृती मध्ये कॅन्टीलीवर बीम ज्याची लांबी (**span**) **'5'** मीटर आहे व त्यावर **'12'KN** चा केंद्रित भार**(Concentrated load)** बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला (**Free end)** लागू होत असेल तर त्या बीमसाठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



उत्तर:-

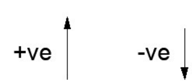
पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.



समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



R_A-12 =0

R_A =12 KN....................समीकरण (1)

ΣM_A = 0.......................बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने **(Clockwise)**मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (**+ve**) आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने **(Anticlockwise)** मोमेंट फिरत असेल तर वजा (**-ve**).

R_Ax 0 +12x5-M_A =0

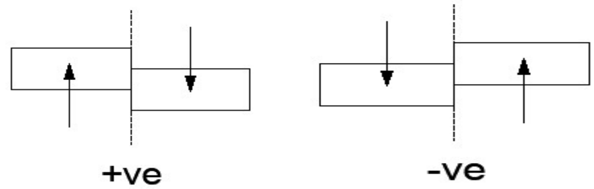
12x5=M_A

M_A= 60 KNm

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force) शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या

बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



$(SF_A)_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_A)_L = 0$

$(SF_A)_R$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_A)_R = +R_A$

$(SF_A)_R = +12$ **KN**

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

$(SF_B)_L = +R_A = +12$ **KN**

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल(Shear Force)

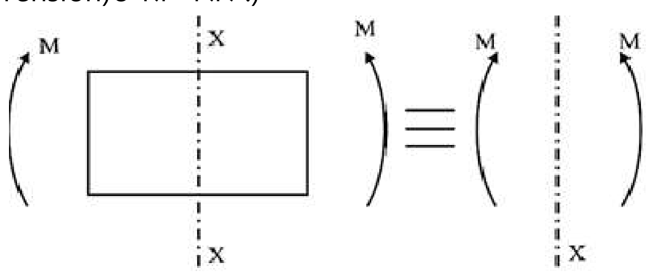
$(SF_B)_R = +R_A - 12 = +12 - 12$

$(SF_B)_R = 0$

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

Sign Convention:-

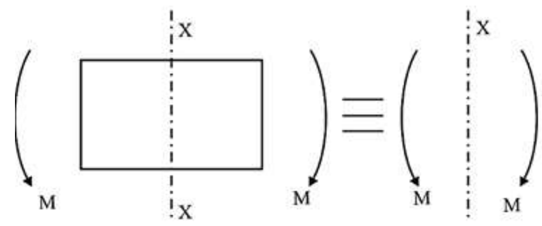
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression) आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension)ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension) आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये **(**Compression**)**ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

($BM)_{AL}$= म्हणजेच बिंदू **A** च्या डाव्या बाजूला बेंडिंग मोमेंट

ज्या बिंदूवर मोमेंट लागत असेल अश्या बिंदूवर बेंडिंग मोमेंट घेताना त्या बिंदूच्या डाव्या व उजव्या अश्या दोन्ही बाजूला बेंडिंग मोमेंट घ्यावी लागते.

($BM)_{AL}$=**0**............(**A** च्या डाव्या बाजूलाछेद घेतला असता छेदाच्या डाव्या बाजूला एकही बल (**Force)** किंवा प्रतिक्रिया **(Reaction)** नाही)

($BM)_{A R}$= म्हणजेच बिंदू **A** च्या उजव्या बाजूला बेंडिंग मोमेंट

($BM)_{AR}$= $-M_A$

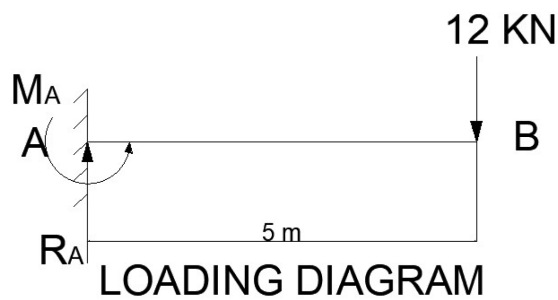
($BM)_{AR}$= **-60** ------- (**Hogging)**

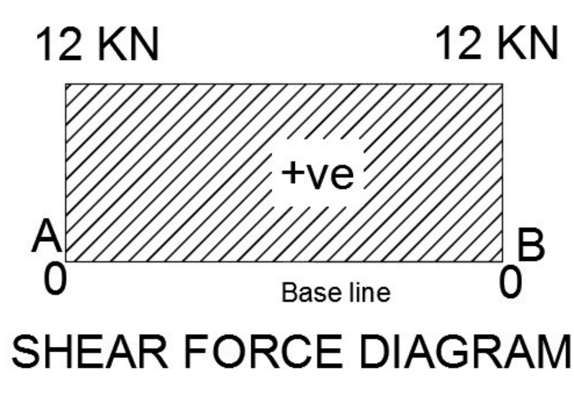
($BM)_C$= 0 ....कॅन्टीलीवर बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला **(**Free End)बेंडिंग मोमेंट **(**BM) शून्य असतो.

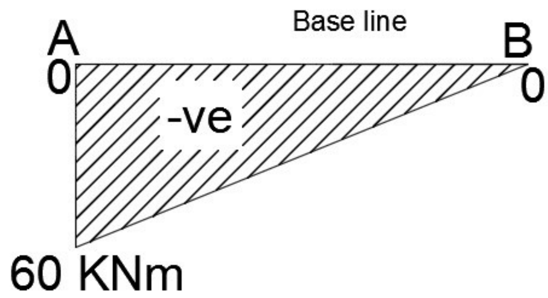
तपासणी (Check):- सदरील तपासणी (Check) फक्त विद्यार्थ्यांच्या महितीकरिता आहे परीक्षेत लिहिण्याची आवश्यकता नाही.

सर्वात जास्त कर्तन बल (Max.SF)=WKN = 12 KN

सर्वात जास्त बेंडिंग मोमेंट (Max.BM)=WLKN.m = 12x5 = 60 KN.m





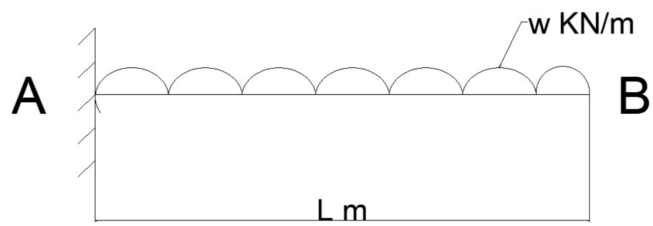


BENDING MOMENT DIAGRAM

3.4 प्रकार-5

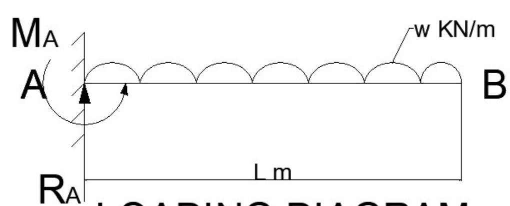
कॅन्टीलीवर बीमवर एकसमान वितरित लोड(Uniformly Distributed load) येत असताना .

उदा. क्र . **1** खालील आकृती मध्ये कॅन्टीलीवर बीम ज्याची लांबी **(**span**)** 'L'मीटर आहे व त्यावर **'**w'KN/mचा एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed load)बीमच्या संपूर्ण लांबीवर लागू होत असेल तर त्या बीमसाठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.



LOADING DIAGRAM

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-

+ve ↑ -ve ↓

R_A- **w x L** =0 --------या ठिकाणी एकसमान वितरित लोड **(Uniformly Distributed load)** ला केंद्रीत लोड **(Concentrated load)** मधे रूपांतर करण्यासाठी तीव्रता गुणीले लांबी **(Intensity x Length)** असे केले.

R_A =wL KN………………..समीकरण (1)

ΣM_A = 0…………………..बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (**Clockwise)**मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (**Anticlockwise**) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

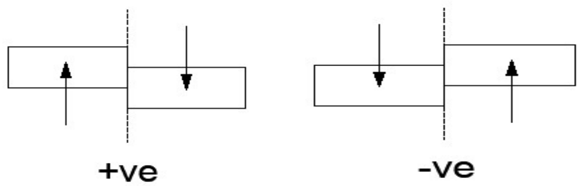
$R_A x\ 0 + wxL\ x\ (L/2) - M_A = 0$

$WL^2/2 = M_A$

$\mathbf{M_A = WL^2/2\ KNm}$

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force)शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



$\mathbf{(SF_A)_L}$= म्हणजेच बिंदू **A** च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$\mathbf{(SF_A)_L=0}$

$\mathbf{(SF_A)_R}$ = म्हणजेच बिंदू **A** च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$\mathbf{(SF_A)_R=+R_A}$

$\mathbf{(SF_A)_R=+wL\ \ KN}$

$\mathbf{(SF_B)_L}$= म्हणजेच बिंदू **B** च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$\mathbf{(SF_B)_L= +R_A-wL=+wL-wL}$

$\mathbf{(SF_B)_L= 0}$

$\mathbf{(SF_B)_R}$= म्हणजेच बिंदू **B** च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

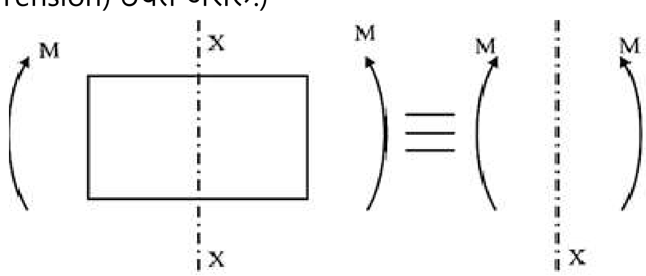
$\mathbf{(SF_B)_R= +R_A-wL=+wL-wL}$

$\mathbf{(SF_B)_R= 0}$

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

Sign Convention:-

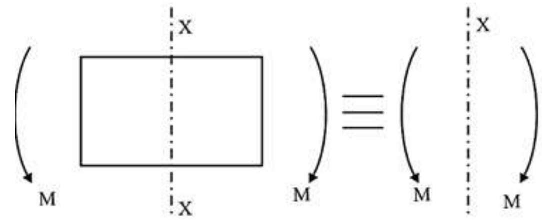
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression) आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension) ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension)आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

(**BM)**$_{AL}$= म्हणजेच बिंदू **A** च्या डाव्या बाजूला बेंडिंग मोमेंट

ज्या बिंदूवर मोमेंट लागत असेल अश्या बिंदूवर बेंडिंग मोमेंट घेताना त्या बिंदूच्या डाव्या व उजव्या अश्या दोन्ही बाजूला बेंडिंग मोमेंट घ्यावी लागते.

(**BM)**$_{AL}$=**0**............(**A** च्या डाव्या बाजूलाछेद घेतला असता छेदाच्या डाव्या बाजूला एकही बल (**Force)** किंवा प्रतिक्रिया **(Reaction)** नाही)

(**BM)**$_{AR}$= म्हणजेच बिंदू **A** च्या उजव्या बाजूला बेंडिंग मोमेंट

(**BM)**$_{AR}$= **-M**$_A$

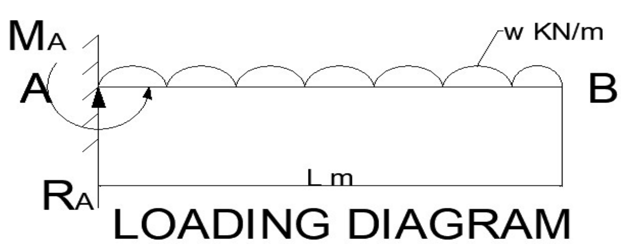
(**BM)**$_{AR}$= **-WL²/2** ------- (**Hogging)**

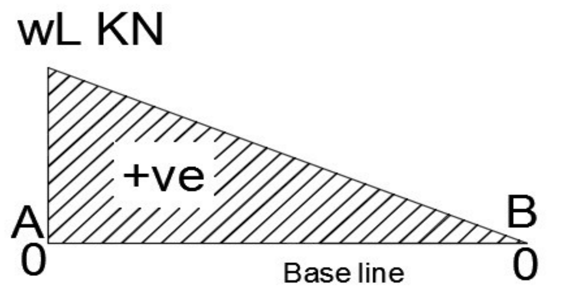
(**BM)**$_C$= 0 ....कॅन्टीलीवर बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला (**Free End)**बेंडिंग मोमेंट (**BM)** शून्य असतो.

म्हणजेच

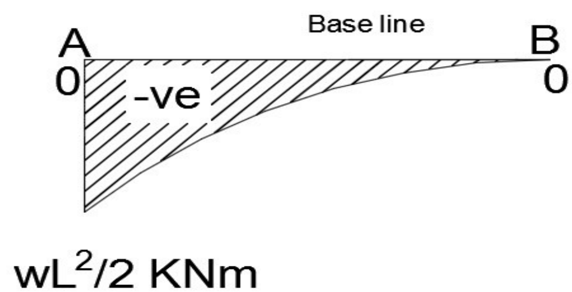
सर्वात जास्त कर्तन बल (Max.SF)=wLKN

सर्वात जास्त बेंडिंग मोमेंट (Max.BM)=wL^2/2KN.m



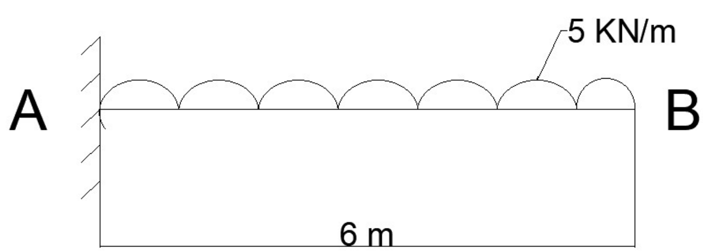


SHEAR FORCE DIAGRAM



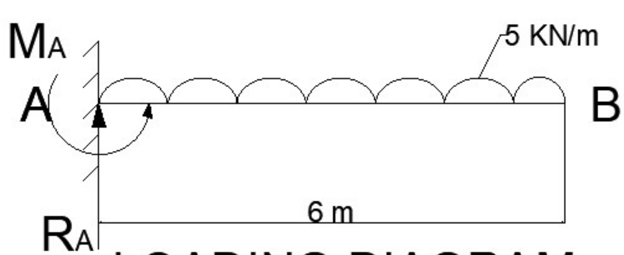
BENDING MOMENT DIAGRAM

उदा. क्र . **2** खालील आकृती मध्ये कॅन्टीलीवर बीम ज्याची लांबी (**span**) **'6'** मीटर आहे व त्यावर **'5'KN/m** चा एकसमान वितरित लोड **(Uniformly Distributed load)** बीमच्या संपूर्ण लांबीवर लागू होत असेल तर त्या बीमसाठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

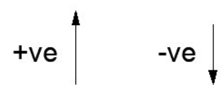


LOADING DIAGRAM

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



R_A- **5 x 6** =0 --------या ठिकाणी एकसमान वितरित लोड **(Uniformly Distributed load)** ला केंद्रीत लोड (**Concentrated load)** मधे रूपांतर करण्यासाठी तीव्रता गुणीले लांबी **(Intensity x Length)** असे केले.

R_A =30 KN……………….समीकरण (1)

ΣM_A = 0…………………..बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (**Clockwise)**मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (**Anticlockwise**) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

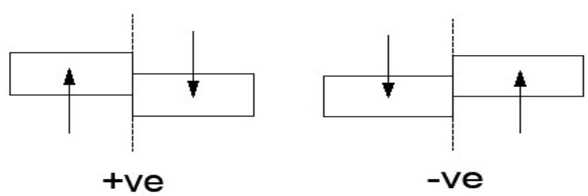
R_Ax 0 +5x6 x (6/2)-M_A =0

90=M_A

M_A= 90 KNm

पायरी (2) :- कर्तन बल (Shear Force)शोधणे.

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



(**SF_A)$_L$**= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

(SF_A)$_L$=0

(**SF_A)$_R$** = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

(SF_A)$_R$=+R_A

(SF_A)$_R$=+30 KN

(**SF_B)$_L$**= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

(SF_B)$_L$= +R_A-5x6=+30-30

(SF_B)$_L$= 0

(**SF_B)$_R$**= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

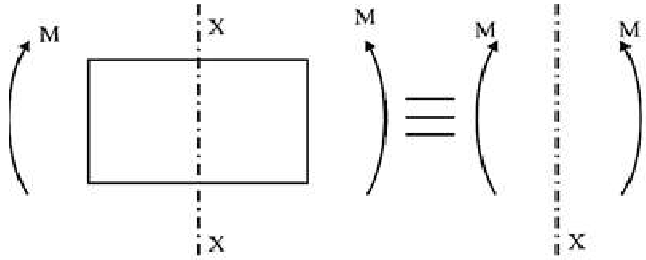
(SF_B)$_R$= +R_A-5x6=+30-30

(SF_B)$_R$= 0

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

Sign Convention:-

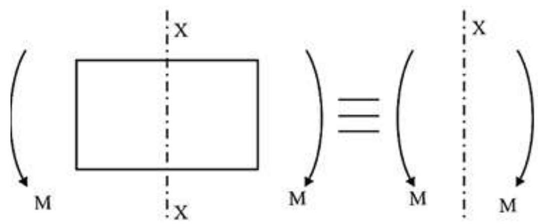
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension)ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension)आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

(**BM)$_{AL}$**= म्हणजेच बिंदू **A** च्या डाव्या बाजूला बेंडिंग मोमेंट

ज्या बिंदूवर मोमेंट लागत असेल अश्या बिंदूवर बेंडिंग मोमेंट घेताना त्या बिंदूच्या डाव्या व उजव्या अश्या दोन्ही बाजूला बेंडिंग मोमेंट घ्यावी लागते.

(**BM)$_{AL}$**=**0**............(**A** च्या डाव्या बाजूलाछेद घेतला असता छेदाच्या डाव्या बाजूला एकही बल (**Force)** किंवा प्रतिक्रिया **(Reaction)** नाही)

(**BM)$_{A\ R}$**= म्हणजेच बिंदू **A** च्या उजव्या बाजूला बेंडिंग मोमेंट

(**BM)$_{AR}$**= **-M$_A$**

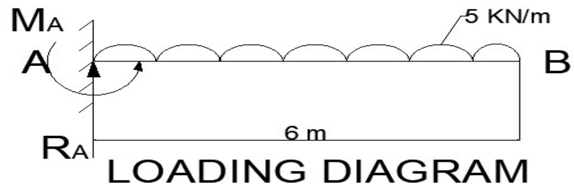
(**BM)$_{AR}$**= **-90** ------- (**Hogging)**

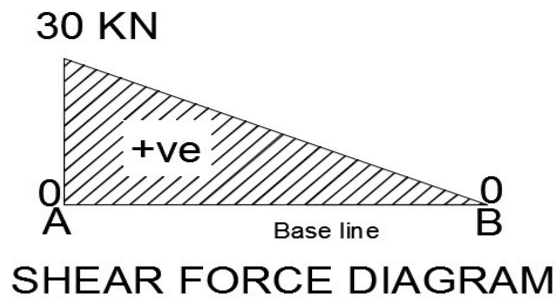
(**BM)$_C$**= 0 ....कॅन्टीलीवर बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला (**Free End)**बेंडिंग मोमेंट (**BM)** शून्य असतो.

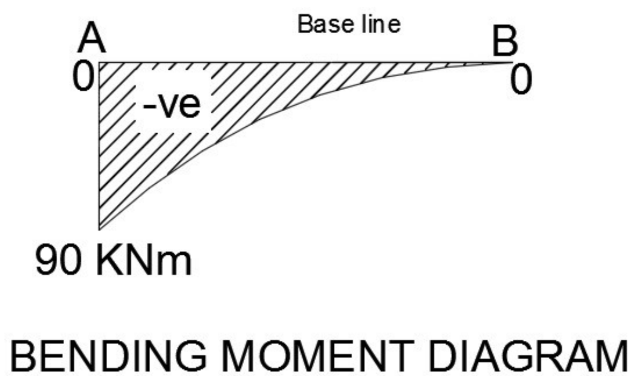
तपासणी (Check):- सदरील तपासणी (Check) फक्त विद्यार्थ्यांच्या महितीकरिता आहे परीक्षेत लिहिण्याची आवश्यकता नाही.

सर्वात जास्त कर्तन बल (Max.SF)=wL = 5x6 = 30 KN

सर्वात जास्त बेंडिंग मोमेंट (Max.BM)=$wL^2/2$ = 5 x 6^2 = 90 KN.m



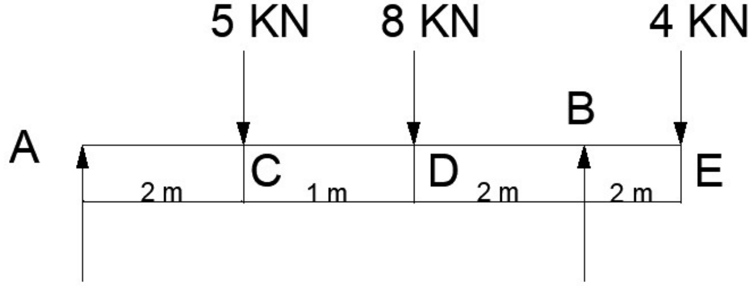




3.4 प्रकार-6

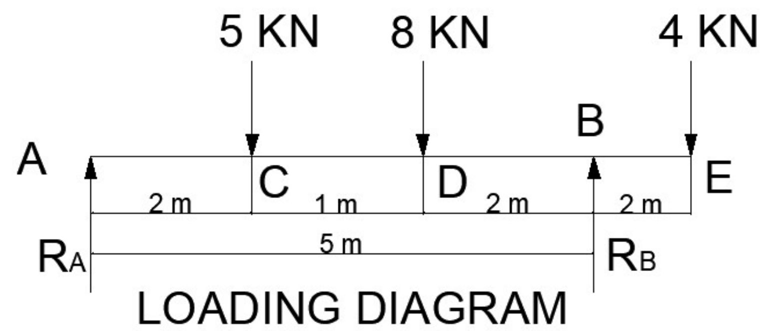
ओव्हर हँग बीमवर केंद्रीत बल (concentratedload) येत असताना.

उदा. क्र . **1** खालील आकृती मध्ये दिलेल्या ओव्हर हँग बीमसाठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



उत्तर:-

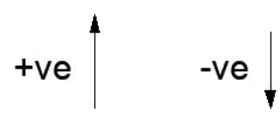
पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.



समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



R_A-5-8 +R_B - 4=0

R_A +R_B=17**....................**समीकरण (1)

ΣM_A = 0.......................बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (**Clockwise)**मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (**Anticlockwise**) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

R_Ax 0 +5x2+8x3 -R_Bx 5+ 4 x 7 =0

10+24+28 =R_Bx 5

53=R_Bx 5

53/5 =R_B

R_B= 10.6 KN

R_B= 10.6 KNहा समीकरण (1) मधे टाकून R_Aशोधला जाऊ शकतो.

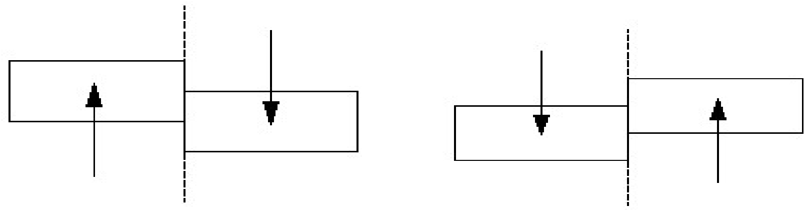
R_A + 10.6 =17

R_A =17- 10.6

R_A =6.4KN

पायरी (2) :- कर्तन बल **(Shear Force)शोधणे.**

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



$(SF_A)_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_A)_L$=**0**

$(SF_A)_R$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_A)_R$=+R_A

$(SF_A)_R$=+**6.4** KN

$(SF_C)_L$= म्हणजेच बिंदू Cच्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_C)_L$= +R_A=+**6.4** KN

$(SF_C)_R$= म्हणजेच बिंदू C च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_C)_R$= +R_A–**5** = **6.4–5**

$(SF_C)_R$=+**1.4** KN

$(SF_D)_L$= म्हणजेच बिंदू **D** च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल **(**Shear Force)

$(SF_D)_L$= +R_A-**5**=**6.4–5**= +**1.4** KN

$(SF_D)_R$= म्हणजेच बिंदू **D** च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल **(**Shear Force)

$(SF_D)_R$= +R_A–**5** - **8** = **6.4–5** -**8** = -**6.6KN**

$(SF_D)_R$= -**6.6KN**

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू **B** च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल **(**Shear Force)

$(SF_B)_L$=+R_A–**5** - **8** = **6.4–5** -**8**

$(SF_B)_L$= **-6.6** KN

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू **B** च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल **(**Shear Force)

$(SF_B)_R$=+R_A–**5** - **8** + R_B

$(SF_B)_R$=+**6.4–5-8+ 10.6**

$(SF_B)_R$=**4 KN**

$(SF_D)_L$= म्हणजेच बिंदू D च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_L$=+R_A–5 - 8 **+** R_B

$(SF_B)_L$= **-**6.6 KN

$(SF_D)_R$= म्हणजेच बिंदू D च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_D)_R$==+R_A–5 - 8 **+** R_B - 4

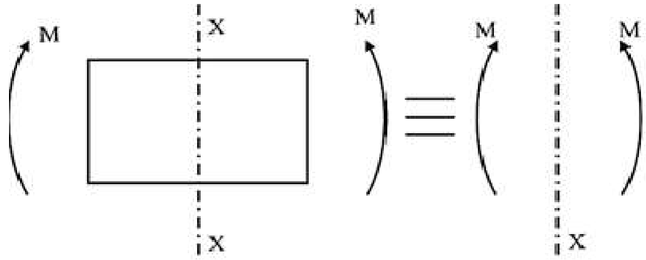
$(SF_B)_R$=**+**6.4–5-8+ 10.6- 4

$(SF_B)_R$=0 KN

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

Sign Convention:-

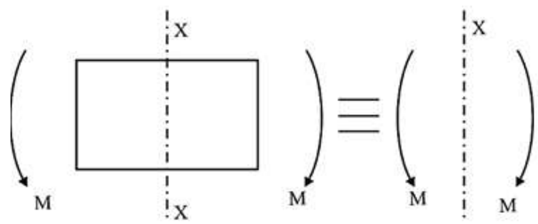
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension)ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension)आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

$(BM)_C$= म्हणजेच बिंदू **C** वर बेंडिंग मोमेंट

$(BM)_C$=+R_Ax 2 .... बिंदू **C** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

$(BM)_C$=+**6.4x** 2

$(BM)_C$=+12.8 KNm

$(BM)_D$= म्हणजेच बिंदू **D** वर बेंडिंग मोमेंट

$(BM)_D$=+R_Ax3-5x1 .... बिंदू **D** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

$(BM)_D$=+6.4x3-5x1

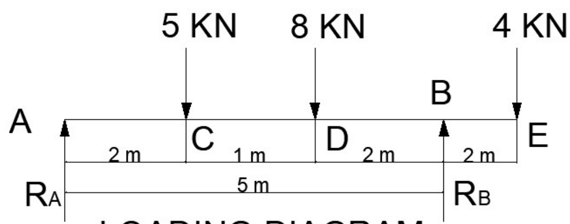
$(BM)_D$=+14.2 KNm

$(BM)_B$=-4x1 .... बिंदू **B** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

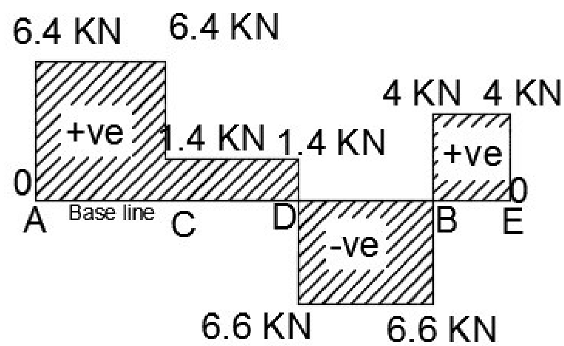
$(BM)_B$=-4 KNm

$(BM)_A$=0**..........**सिंपली सपोर्टेड बीमच्या आधारांवर (**Support)** बेंडिंग मोमेंट (**BM)** शून्य असतो.

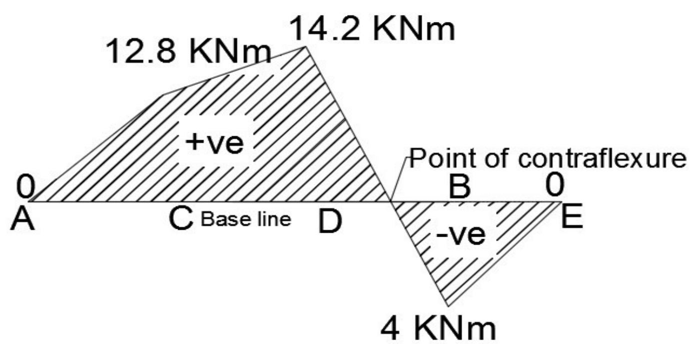
$(BM)_E$= 0 ...ओवर हँग बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला (**Free End)**बेंडिंग मोमेंट (**BM)** शून्य असतो.



LOADING DIAGRAM

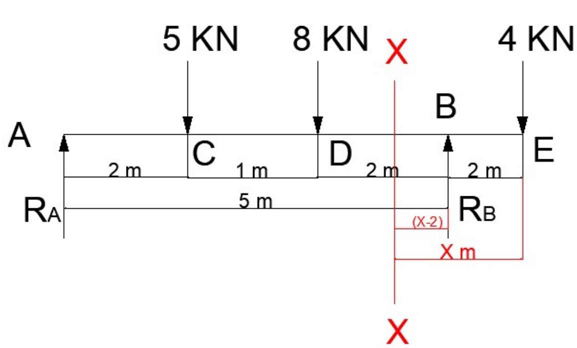


SHEAR FORCE DIAGRAM



BENDING MOMENT DIAGRAM

पायरी (4) :- कॉन्ट्रा फ्लेक्सर बिंदूचे (Pointof contra flexure) अंतर काढणे.
बिंदु D आणि B या मध्ये छेद (Section)X-X बिंदू E पासून X m या अंतरावर घ्या.



$(BM)_{xx}$= म्हणजेच छेद **(**Section) x-xवर बेंडिंग मोमेंट

$(BM)_{xx}$=**0**............ कॉन्ट्रा फ्लेक्सर बिंदूवर (**Pointof contra flexure)** बेंडिंग मोमेंट शून्य असतो.

-4 xX + 10.6 x (X-2)=0

-4X + 10.6X-21.2=0

6.6X=21.2

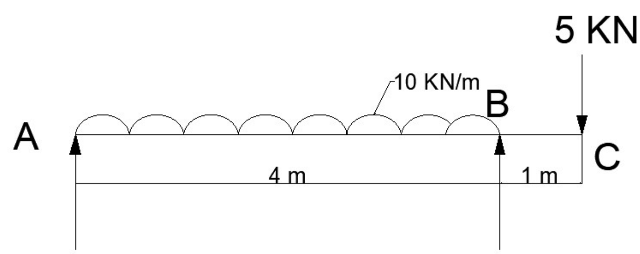
X=21.2/6.6

X=3.212 m ....बिंदू E पासून.

3.5 प्रकार-7 **कॉन्ट्रा फ्लेक्सर बिंदूचे (Pointof contra flexure) अंतर काढणे.**

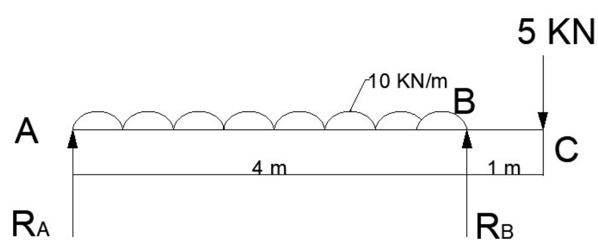
ओव्हर हँग बीमवर एकसमान वितरित बल (Uniformly Distributedload) येत असताना.

उदा. क्र . **1** खालील आकृती मध्ये दिलेल्या ओव्हर हँग बीमसाठी कर्तन बल आणि बेंडिंग मोमेंट आकृती काढा.



उत्तर:-

पायरी (1) :- प्रतिक्रिया (Reaction) शोधणे.

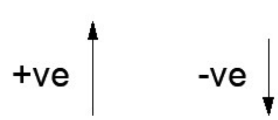


LOADING DIAGRAM

समतोल अटी लागू करून सपोर्टच्या प्रतिक्रिया शोधल्या जाऊ शकता.

ΣFy = 0 --------बलांच्या सर्व घटकांची बीजगणीतीय बेरीज शून्य असणे अवश्यक आहे .

Sign Convention:-



R_A-(10x4) +R_B -5=0

R_A +R_B=45**..................**समीकरण (1)

ΣM_A = 0......................बिंदू **A** भोवती मोमेंट घेतल्या नंतर

घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने (**Clockwise)**मोमेंट फिरत असेल तर अधिक (+**ve)** आणि घड्याळाच्या काट्याच्या उलट दिशेने (**Anticlockwise**) मोमेंट फिरत असेल तर वजा (-**ve).**

R_Ax 0 +(10x4) x (4/2) -R_Bx 4+ 5 x 5 =0

80+25 =R_Bx4

105=R_Bx 4

105/4 =R_B

R_B= 26.25 KN

R_B= 26.25 KN **हा समीकरण (1) मधे टाकून** R_A**शोधला जाऊ शकतो.**

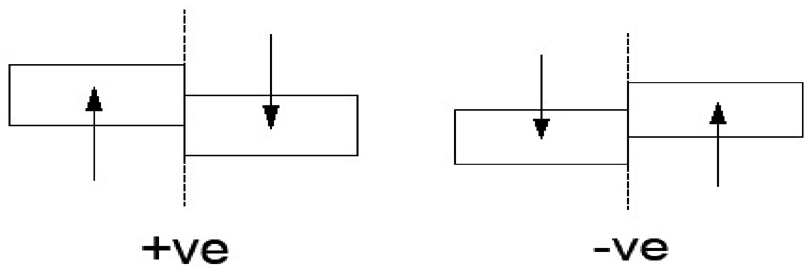
R_A + 26.25 =45

R_A =45- 26.25

R_A =18.75KN

पायरी (2) :- कर्तन बल **(Shear Force)शोधणे.**

Sign Convention:-छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल तर अधिक (+ve) घ्यायचा आणि छेदाच्या उजव्या बाजूचा बल (Load) वरच्या दिशेने जात असेल व डाव्या बाजूचा बल (Load) खालच्या दिशेने जात असेल तर वजा (-ve) घ्यायचा.



$(SF_A)_L$= म्हणजेच बिंदू A च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_A)_L$=0

$(SF_A)_R$ = म्हणजेच बिंदू A च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_A)_R$=+R_A

$(SF_A)_R$=+18.75 KN

$(SF_B)_L$= म्हणजेच बिंदू B च्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_L$=+R_A**–** (10x4)=18.75- 40

$(SF_B)_L$= 21.25 KN

$(SF_B)_R$= म्हणजेच बिंदू B च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_B)_R$=+R_A**–** (10x4)+ R_B

$(SF_B)_R$=+18.75–40+26.25

$(SF_B)_R$= +5 KN

$(SF_C)_L$= म्हणजेच बिंदू Cच्या डाव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

$(SF_C)_L$= +R_A**–** (10x4)+ R_B **=+**18.75–40+26.25

$(SF_C)_R$= +5 KN

$(SF_C)_R$= म्हणजेच बिंदू C च्या उजव्या बाजूला कर्तन बल (Shear Force)

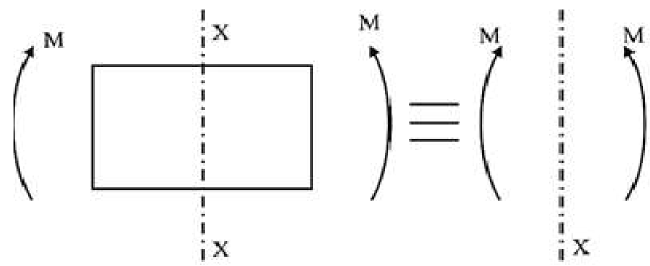
$(SF_C)_R$= $+R_A$**–** (10x4)+ R_B -5 **=+**18.75–40 + 26.25 - 5

$(SF_C)_R$=0 KN

पायरी (3) :- बेंडिंग मोमेंट (BM)शोधणे.

Sign Convention:-

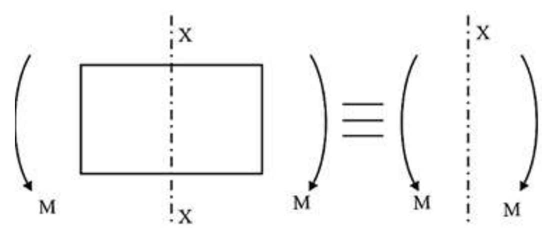
जर बीम वरच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (+ve**)** असतो त्यासSaggingअसे म्हणतात. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला दबावात (Compression)आणि बीमच्या खालच्या भागाला तणावात (Tension)ठेवत असेल.)



Bending Moment = +ve

आणि

जर बीम वरच्या खालच्या दिशेने वाकत असेल तर बेंडिंग मोमेंट हा अधिक (-ve**)** असतो त्यासHoggingअसे म्हणतात.. (किंवा जर बीमच्या वरच्या भागाला तणावात (Tension)आणि बीमच्या खालच्या भागाला दबावामध्ये (Compression)ठेवत असेल.)



Bending Moment = -ve

$(BM)_B$= म्हणजेच बिंदू **B** वर बेंडिंग मोमेंट

$(BM)_B$=**-5x1** .... बिंदू **B** च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

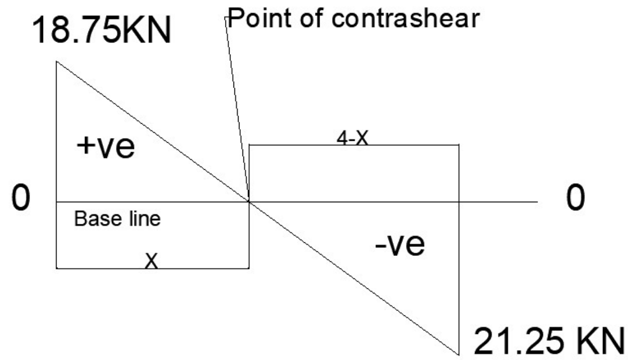
$(BM)_B$=**-5 KNm**

$(BM)_A$=0**..........**सिंपली सपोर्टेड बीमच्या आधारांवर (**Support)** बेंडिंग मोमेंट (**BM)** शून्य असतो.

$(BM)_C$= 0 ...ओवर हँग बीमच्या आधार नसलेल्या टोकाला (**Free End)**बेंडिंग मोमेंट (**BM)** शून्य असतो.

पायरी (4) :- कॉन्ट्रा शिअर बिंदूचे (**Pointof contra shear)** अंतर काढणे.

समजा,X हे कॉन्ट्रा शिअर बिंदूचे (Pointof contra shear) अंतर **A** बिंदु पासून आहे.



समान त्रिकोणाचा गुणधर्म वापरुन

18.75/x = 21.25/(4-x)

18.75(4-x)=21.25(x)

75-18.75x=21.25x

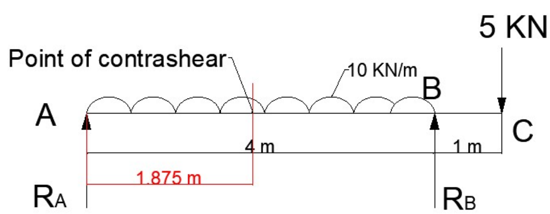
75=21.25x+18.75x

75=40x

X=75/40

X=1.875 m ------------- **A** बिंदु पासून

पायरी (5) :- कॉन्ट्रा शिअर बिंदूच्या (Pointof contra shear) ठिकाणी सर्वात जास्त (Maximum) बेंडिंग मोमेंट काढणे.



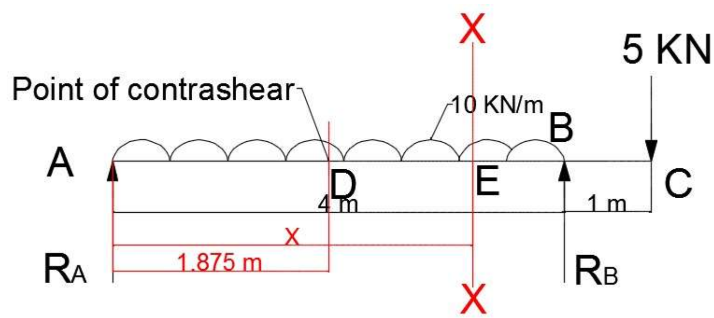
LOADING DIAGRAM

$(BM)_{max}$= म्हणजेच कॉन्ट्रा शिअर बिंदूच्या (**Pointof contra shear)** ठिकाणी सर्वात जास्त **(Maximum)** बेंडिंग मोमेंट

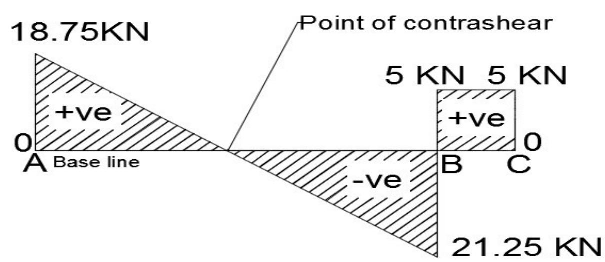
$(BM)_{max}=+R_A$ x 1.875-[10x1.875x(1.875/2)] .... बिंदूकॉन्ट्रा शिअर च्या कोणत्याही एका बाजूने लक्ष्यात घेऊ शकता

$(BM)_B$=+18.75x 1.875-[10x1.875x(1.875/2)]

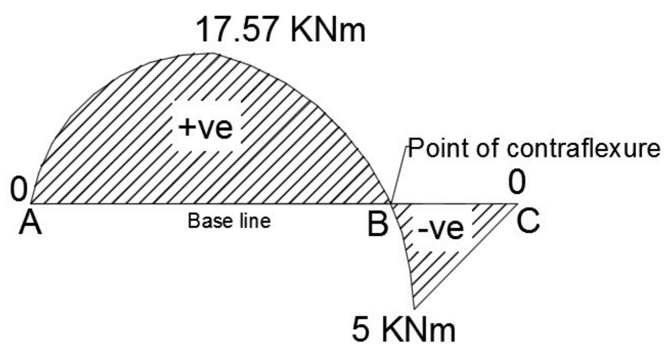
$(BM)_B$=+17.578 KNm



LOADING DIAGRAM

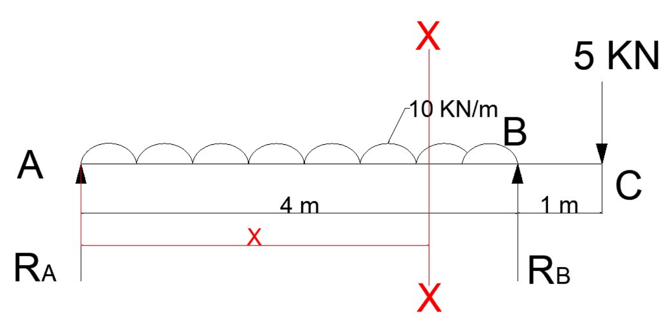


SHEAR FORCE DIAGRAM



BENDING MOMENT DIAGRAM

पायरी (6) :- कॉन्ट्रा फ्लेक्सर बिंदूचे (Point of contra flexure) अंतर काढणे.
बिंदु A आणि B या मध्ये छेद (Section)X-X बिंदू A पासून X m या अंतरावर घ्या.



$(\textbf{BM})_E$= म्हणजेच बिंदु **E**वर बेंडिंग मोमेंट

$(\mathbf{BM})_E = \mathbf{0}$............ कॉन्ट्रा फ्लेक्सर बिंदूवर **(Pointof contra flexure)** बेंडिंग मोमेंट शून्य असतो.

$\mathbf{R_A \times X - 10 \times X \times (X/2) = 0}$

$\mathbf{18.75 \times X - [10 \times X \times (X/2)] = 0}$

$\mathbf{18.75X - 5X^2 = 0}$

$18.75X = 5X^2$

$X = 18.75/5$

$\mathbf{X_E = 3.75\ m}$ ....बिंदू A पासून.

यूनिट -04: बीम मधील झुकणे आणि कातरणे प्रतिबल

Bending and Shear stresses in beams

- **विषय निष्पत्ती (Course Outcome):** वेगवेगळ्या लोडिंग परिस्थितींमध्ये बीममध्ये वाकणे आणि कातरणे तणाव निश्चित करा.
- **सिद्धांत शिक्षण निष्पत्ती (Theory Learning Outcome):**

TLO .1 प्युअर बेंडिंग (Pure Bending) आणि तटस्थ अक्ष (Neutral axis) संकल्पना समजून घ्या.

TLO.2 फ्लेक्सरल फॉर्म्युला वापरून प्रतिकार मोमेन्ट (Resisting moment) आणि विभाग मॉड्यूलस (Z) निश्चित करा.

TLO.3 मानक भाराच्य फक्त (Point and UDL Load) अधीन असलेल्या फक्त समर्थित आणि कँटिलीव्हर बीममध्ये दिलेल्या स्थानावर झुकणारे प्रतिबल (Bending stress) निश्चित करा.

TLO.4 आयताकृती आणि वर्तुळाकार विभागासाठी जास्तीत जास्त आणि सरासरी कातरण ताण मोजा आणि काढा.

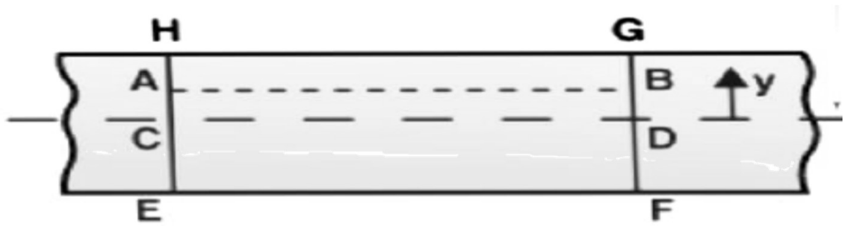
TLO.5 दिलेल्या विभागासाठी त्याच्या खोलीपर्यंत कातरणे ताण वितरण आकृती काढा.

थोडक्यात माहिती(Introduction)

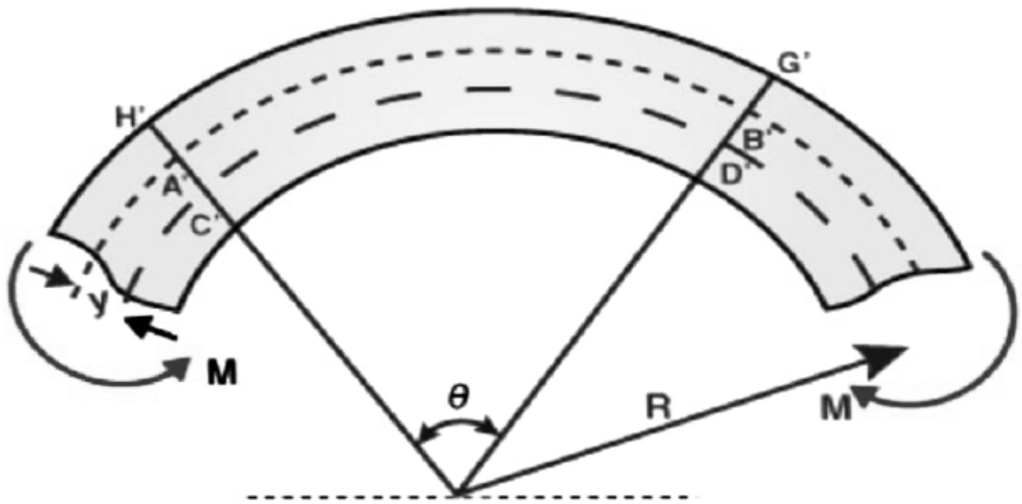
जेव्हा बीमला बाह्य भार (External load) अनुलंब (vertically) लागू केला जातो, तेव्हा हे आधी अभ्यासले गेले आहे की, बीमच्या प्रत्येक भागावर कातरणे बल (Shear force) आणि झुकणारे मोमेन्ट (Bending moment) असतात बीमच्या प्रत्येक भागाला .कातरणे बल (Shear force) आणि झुकणारे मोमेन्ट (Bending moment) मुळे विशिष्ट विकृती (Deformation) येते, ज्याचा बीमच्या सामग्रीद्वारे (material) प्रतिकार केला जातोसामग्रीच्या विकृतीला .(Deformation) प्रतिकारामुळे (resistance) अंतर्गत कातरणे प्रतिबल (Shear stress) आणि झुकणारा प्रतिबल (Bending stress) निर्माण करतो.

41..1 झुकण्याचा सिद्धांत (Theory of pure bending)

झुकणारा मोमेन्ट (Bending moment) किंवा जोडप्याच्या (couple) परिणामामुळे, बीमची लांबी वक्र आकार घेईल आणि अगदी लहान लांबीला वर्तुळाच्या कमानीचा भाग मानला जाऊ शकतो. हे खालील प्रमाणे आहे की, बाह्य त्रिज्यामुळे (Outer radius) सामग्री तणावात (tension) मध्ये असेल आणि आतील त्रिज्या संकुचण (Compression) मध्ये असेल आणि काही त्रिज्यामध्ये कोणताही प्रतिबल नसेल. सामग्रीचा हा स्तर तटस्थ स्तर किंवा तटस्थ अक्ष (Neutral axis) आहे.



(a) Before bending



(b) After bending

आकृती 4.1 Bending equation

आकृती 4.1 मध्ये बीमचा रेखांश विभाग दर्शविला आहे .तटस्थ अक्ष (θ तयार होतो.

C'D' = Rθ आणि A'B' = (R-y)θ

सुरुवातीला समांतर स्तरांची लांबी समान असल्यामुळे CD = AB होईल आणि त्या तटस्थ स्तरावर कोणताही ताण (stress) नसल्यामुळे कोणताही ओढ-ताण (strain) येत नाही.

C'D' = AB

आता स्ट्रैन

स्ट्रैन= AB - A'B'/ AB -----------परंतुAB =CD= C'D' आहे

म्हणून, स्ट्रैन= C'D'- A'B'/ AB ------- परंतुC'D' = Rθ

आणिA'B' = (R-y)θ

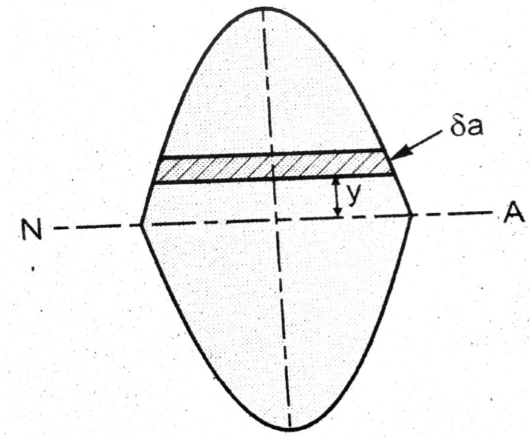
म्हणून, स्ट्रैन = Rθ-(R-y)θ/ Rθ = $\frac{y}{R}$

आता जर स्ट्रेस AB = σ आणि यंग्स मोडुलूस (Young's Modulus) =E,

तर स्ट्रैन =$\frac{\sigma}{E}$

म्हणून, $\frac{\sigma}{E} = \frac{y}{R}$किंवा $\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$---------------------------(I)

आता,बीमचा आडवा भाग विचारात घेतल्यास आकृती 4.2, क्षेत्रफळाची एक पट्टी (strip) तटस्थ अक्षा (Neutral axis) पासून y अंतरावर आहे असे मानू.



आकृती :4.2 क्षेत्रफळाची एक पट्टी

नंतर, या क्षेत्रावरील सामान्य बल (δa)= $\frac{E}{R} X y \delta a$

आता तटस्थ अक्षल या बलाचा मोमेन्ट= $\frac{E}{R} X\ y\delta a\ X y$ किंवा $\frac{E}{R} X y^2 \delta a$

निर्माण झालेल्या टेन्शनमुळे निर्माण होणारा पदार्थाचा हा प्रतिरोधक मोमेन्ट आहे आणि प्रतिरोधक मोमेन्ट (resisting moment) आहे,

$= \sum \frac{E}{R} X y^2 \delta a$ किंवा $\frac{E}{R} \sum y^2 \delta a$

आणि $\sum y^2 \delta a$ हा तटस्थ अक्ष, I_{NA}च्या क्षेत्रफळाचा दुसरा मोमेन्ट आहे.

प्रतिरोधक मोमेन्ट (Resisting moment) $M = \frac{E}{R} X I$

परंतु, प्रतिरोधक मोमेन्ट (Resisting moment) झुकण्याच्या मोमेन्टला (Bending moment) संतुलित करत असल्याने,

$M = \frac{E}{R} X I$ किंवा $\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$

परंतु, $\frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$

म्हणून, $\mathbf{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}}$

येथे, M = प्रतिकाराचा मोमेन्ट,

I = विभागाच्या तटस्थ अक्षाला (N.A.) जडत्वाचा मोमेन्ट

यंगचे लवचिकता मॉड्यूलस =E,

R = N.A च्या वक्रतेची त्रिज्या आणि

σ = झुकणारा प्रतिबल (Bending stress)

वरील समीकरण 'झुकणारे समीकरण'(Bending equation) म्हणून ओळखले जाते.

41.2 झुकनाऱ्या सिद्धांतातील गृहितक (Assumptions in theory of bending)-

1) बीमचे ट्रान्सव्हर्स विभाग जे समतल आहेत, झुकण्या आधी आणि झुकल्यानंतर पण समतल राहतात.
2) बीमचे सामग्री एकसंध, समस्थानिक आहे आणि हुकच्या सिद्धांतचे पालन करतो.
3) तणावात (Tension) आणि संकुचण (Compression) मध्ये लवचिकतेचे मॉड्यूलस (Young's Modulus) समान आहे.
4) बीम सुरुवातीला सरळ आणि क्रॉससेक्शन एकसमानआहे-.
5) प्रत्येक स्तर तणावात (Tension) आणि संकुचण (Compression) मध्ये मुक्त आहे, आणि इतर स्तरांपेक्षा स्वतंत्र आहे.
6) बीमच्या ट्रान्सव्हर्स विभागातील परिणामी बल (Resultant force) शून्य आहे.

4.2.1 फ्लेक्जरल समीकरण (Flexural Equation)

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$$

4.2.2 समीकरणातील घटकांचा अर्थ (Meaning of terms used in equation)

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$$

येथे, M = प्रतिकाराचा मोमेन्ट (Resisting moment),

I = तटस्थ अक्षला (Neutral axis) विभागाच्या जडत्वाचा मोमेन्ट

Eयंगचे लवचिकता मॉड्यूलस = (Young's modulus),

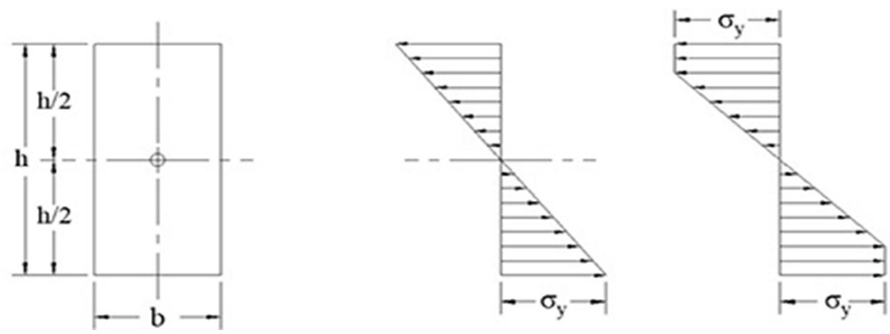
R = तटस्थ अक्षच्या (Neutral axis) वक्रतेची त्रिज्या आणि

σ = झुकणारा प्रतिबल (Bending stress)

4.2.3 झुकणारा प्रतिबल (Bending stress)

जेव्हा बीम बाह्य लोडिंगच्या अधीन असते तेव्हा अनुलंब (vertically) लागू होते, तेव्हा झुकण्यासाठी (bending) अंतर्गत ताणांद्वारे (internal stresses) देऊ केलेल्या प्रतिकारास झुकणारा प्रतिबल (σ_b) म्हणतात.

4.3 बीम मधील प्रतिबल आणि विभाजन आकृती (Bending stresses and bending stress distribution diagram)



आयताकृती विभागात सिम्पली सुपोर्टेड बीमकॅन्टिलेवेर बीम

आकृती :4.3 आयताकृती विभागात प्रतिबल विभाजन

4.4 कातरणे प्रतिबलाचे समीकरण (Shear stress equation)

कातरणे प्रतिबल समीकरण (Shear stress equation)

$$q= \frac{FA\bar{y}}{Ib}$$

4.4 1.कातरणे प्रतिबलाच्या समीकरनात (Shear stress equation) वापरलेल्या प्रत्येक घटकाचा अर्थ

$$q= \frac{FA\bar{y}}{Ib}$$

येथे, q = कोणत्याही ट्रान्सव्हर्स विभागतील कातरणे प्रतिबल , N/mm मध्ये ^{2}

A = तटस्थ अक्षाच्या (Neutral axis) वरील भागाचे क्षेत्रफळ'मिमी^{2}'मध्ये

$\bar{y}$ =तटस्थ अक्षाच्या(Neutral axis) वर मानल्या गेलेल्या क्षेत्राच्या मध्यवर्ती भागाचे अंतर'मिमी' मध्ये

A X$\bar{y}$ क्षेत्रफळाची पहिली मोमेंट =

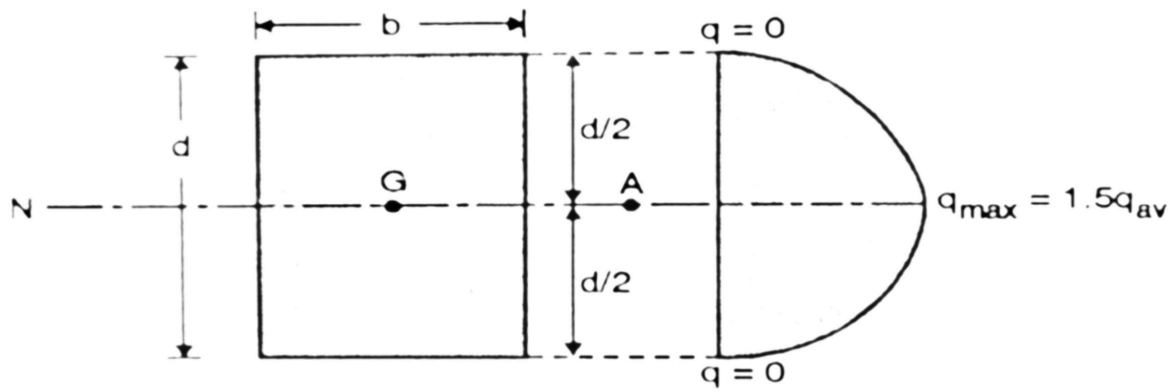
I = तटस्थ अक्षच्या (Neutral axis) ठिकाणचे जडत्व 'मिमी^{4}'मध्ये

F= कातरणे बल (Neutral axis) आहे .

4.4 2.आयत आकार आणि वर्तुळाकार विभागासाठी, जास्तीत जास्त (Maximum) आणि सरासरी (Average) कातरणे प्रतिबल (Shear stress) यांच्यातील संबंध

1. आयताकृती विभाग (Rectangular section)

खालील आकृती 4.4 दाखविल्याप्रमाणे आयताकृती विभागासाठी कातरणे प्रतिबलातील (Shear stress) झालेले बदल-



a) Rectangular section **b) Shear stress variation diagram**

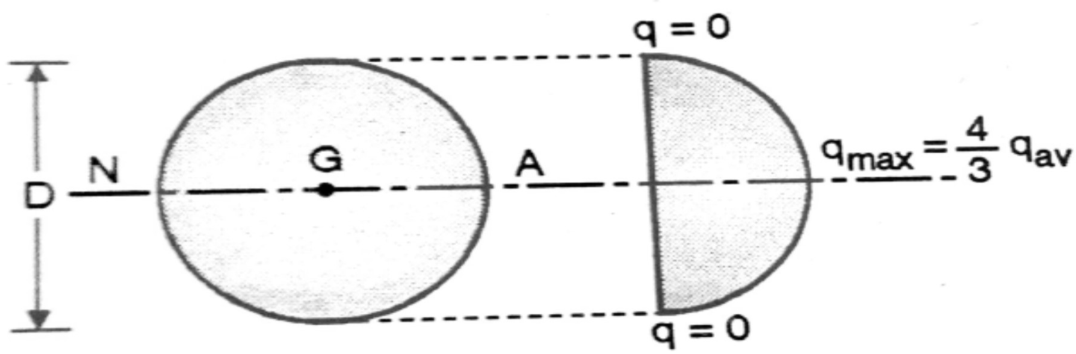
आकृती: 4.4 Shear stress variation in Rectangular section

q_{av} = सरासरी कातरणे प्रतिबल (Average shear stress) = F A=F bd

q_{max} = जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (Maximum shear stress) = $1.5q_{av}$

2. वर्तुळाकृती विभाग (Circular section)

खालील आकृती 4.5 दाखविल्याप्रमाणे वर्तुळाकृती विभागासाठीकातरणे प्रतिबलातील (Shear stress) झालेले बदल-



a) Circular section **b) Shear stress variation diagram**

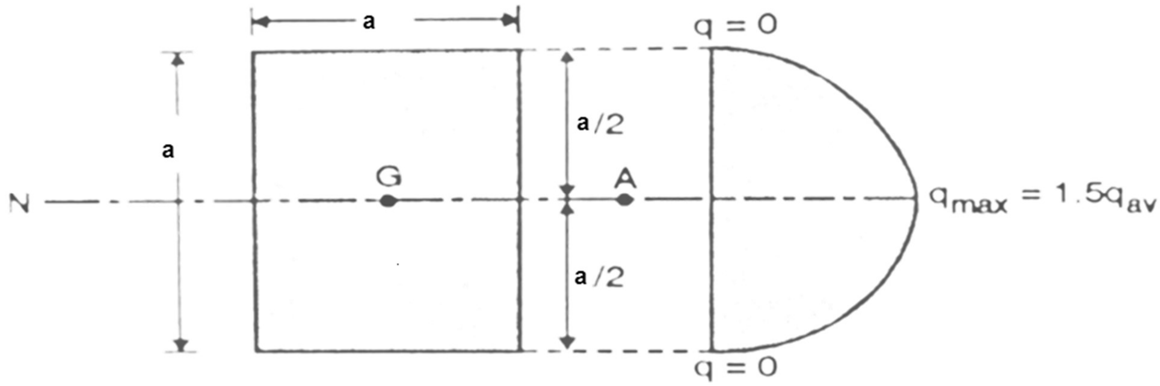
आकृती: 4.5 Shear stress variation in Circular section

q_{av} = सरासरी कातरणे प्रतिबल (Average shear stress) =F A = F (D24)

q_{max} = जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (Maximum shear stress) = 4 $3q_{av}$

3 .चौरसाकृती विभाग (Square section)

खालील आकृतीमध्ये) 4.(6 दाखविल्याप्रमाणे चौरसाकृती विभागासाठी कातरणे प्रतिबलातील)Shear stress) झालेले बदल-



आकृती: 4.6 Shear stress variation in Square section

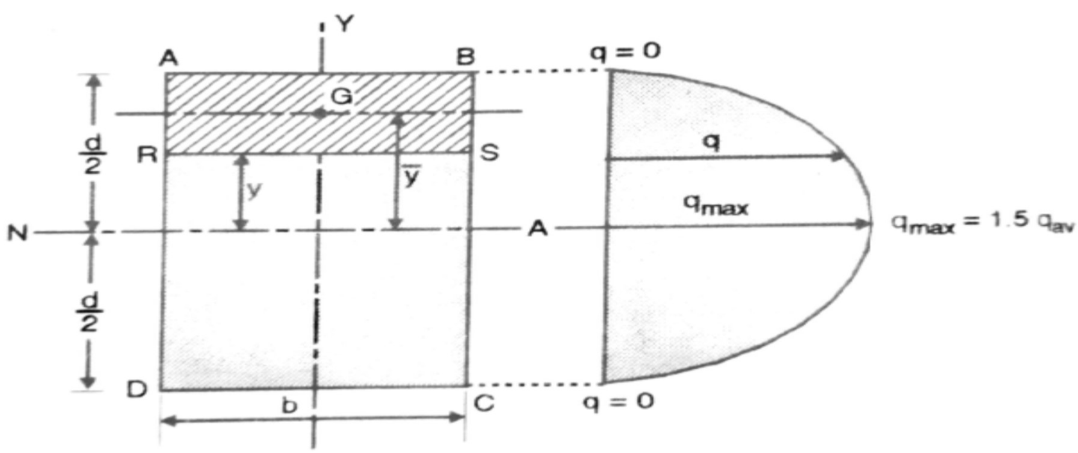
q_{av} = सरासरी कातरणे प्रतिबल (Average shear stress) =F A = F a^2

q_{max} = जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (Maximum shear stress) = q_{max} = $1.5q_{av}$

4.5 वेगवेगळ्या विभागासाठी कातरणे प्रतिबल विभाजन (Shear Stress distribution Diagram) आकृती

4.51.आयताकृती विभागासाठी कातरणे प्रतिबल विभाजन (Shear Stress distribution Diagram) आकृती

आकृती 4.7 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे बीमचा एक आयताकृती भाग घेतलेला आहे .ज्याच्यामध्ये रुंदी 'b' आणि खोली 'd' आणि एक थर 'RS' हा तटस्थ अक्षापासून)Neutral axis)'y' अंतरावर आहे .



a) Rectangular section **b) Shear stress variation or distribution diagram**

आकृती: 4.7Shear stress distribution in Rectangular section

समजा ,A = छायांकित क्षेत्र (shaded area)) = $\frac{d}{2}-y$)xb) ....i)

$\bar{y}$ =तटस्थ अक्षापासून (Neutral axis) छायांकित क्षेत्राच्या (shaded area) मध्यवर्ती भागाचे अंतर

$\bar{y} = y + \frac{1}{2}) \frac{d}{2} - y) = \frac{1}{2}) \frac{d}{2} + y))$ .... ii)

$AX\bar{y}$ = क्षेत्रफळाची पहिली मोमेंट = $b) \frac{d}{2} - y) x \frac{1}{2}) \frac{d}{2} + y)$

= $\frac{b}{2}) \frac{d^2}{4} - y^2))$...................... iii)

I =तटस्थ अक्षच्या (Neutral axis) ठिकाणचे जडत्वाचे परिबल (Moment of inertia) = $\frac{bd^3}{12}$)............iv)

म्हणून, त्या भागातील कातरणे प्रतिबल (Shear stress)'q' हा खालीलप्रमाणे सूत्राप्रमाणे,

$q = \frac{FA\bar{y}}{Ib}$

समीकरण)iii) आणि (iv) मधील $AX\bar{y}$ ची किंमत समीकरण)v) मध्ये ठेऊन,

$q = \frac{FX\frac{b}{2}(\frac{d^2}{4} - y^2)}{\frac{bd^3}{12}Xb}$

$$\mathbf{q = (\frac{6F}{bd^3})(\frac{d^2}{4} - y^2))}$$ **....................... vi)**

समीकरण)vi) वरुण हे लक्ष्यात येते की,कातरणे प्रतिबल (Shear stress) हा तटस्थ अक्षपासून (Neutral axis) अंतर **'y'** कमी केले असतावाढत जातो आणि त्याची किंमत तटस्थ अक्षाला (Neutral axis) जास्तीत जास्त असतो.

1. **थरांच्या)layers AB and CD) वरच्या आणि खालच्या टोकाला कातरणे प्रतिबल)shear stress)**
   थरांच्या)layers AB and CD) वरच्या आणि खालच्या टोकाला,y = $\frac{d}{2}$
   y ची किंमत समीकरण)vi) मध्ये ठेऊ ,
   q.......... 0 = थरांच्या)layers AB and CD) वरच्या आणि खालच्या टोकाला
2. **तटस्थ अक्षाला)Neutral axis) कातरणे प्रतिबल)shear stress)**
   तटस्थ अक्षाला)Neutral axis),y =0 ही किंमत समीकरण)vi) मध्ये ठेऊ,
   $q = q_{max} = \left(\frac{6F}{bd^3}\right) x \frac{d^2}{4} = \frac{1.5F}{bd}$

q_{max} जास्तीत = जास्त कातरणे प्रतिबल)shear stress) हा तटस्थ अक्षाला(Neutral axis) असतो = $\frac{1.5F}{bd}$

$\mathbf{q_{max}\ 1.5 = q_{av}}$

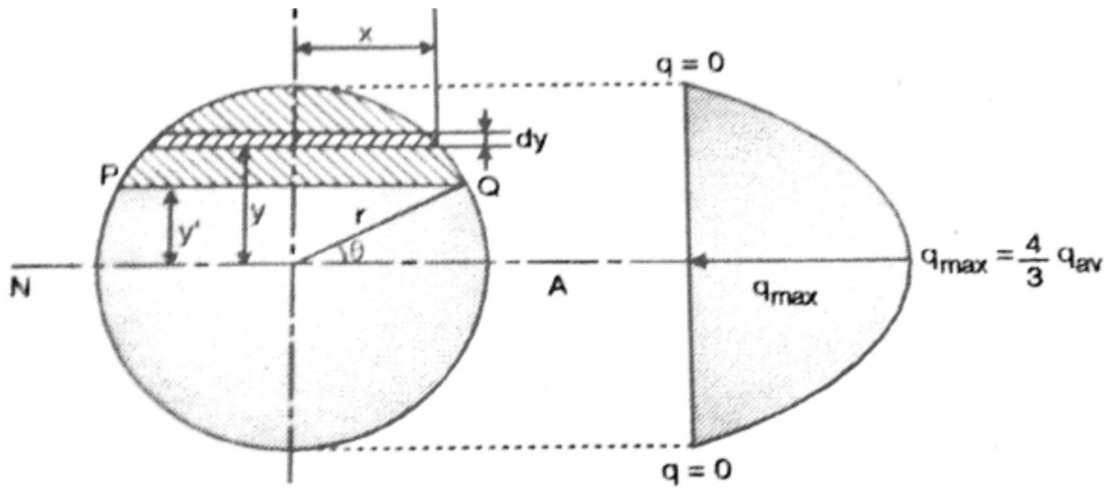
येथे,q_{av}) सरासरी कातरणे प्रतिबल = shear stress) = $\frac{F}{bd}$

3. **आयताकृती विभागासाठीकोणत्याही थराला कातरणे प्रतिबल)shear stress)**

$$q = \left(\frac{6F}{bd^3}\right)\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

4.5 2.वर्तुळाकार विभागासाठी कातरणे प्रतिबल विभाजन) Shear Stress distribution) आकृती

समजा, आकृती 4.8 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एक घन वर्तुळाकार विभाग ज्याची त्रिज्या 'r' आणि 'dy' जाडी असलेली एक पट्टी)strip) घेतली जिची तटस्थ अक्षा (Neutral axis) पासून ऊंची 'y' आहे .



a) Circular section b) Shear stress variation or distribution diagram

आकृती: 4.8 shear stress distribution in Circular section

समजा,q = विभागाचा **कातरणे प्रतिबल (Shear Stress) हा** तटस्थ अक्षला)Neutral axis) समांतर (parallel) आणि तो N-A शी 'θ' कोण बनवतो.

पट्टी (strip) साठीAXy = (2xXdy)y

छायांकित क्षेत्रासाठी (shaded area)AXy = (2 xy)dy

PQ =b = विभागाची रुंदी 2 =rcos θ

I =I_{XX}

= I_{NA}) विभागाचे जडत्व = M. I. of section) = $\frac{\pi}{4}r^4$

म्हणून,$q = \frac{FA\bar{y}}{Ib} = \frac{F\int(2\,xy)dy}{\frac{\pi}{4}r^4(2r\cos\theta)}$

$= \frac{4F}{\pi r^5 \cos\theta}\int_{r\sin\theta}^{r}(\sqrt{r^2 - y^2})ydy$

$$= \frac{4F}{\pi r^5 \cos\theta}\left[-\frac{1}{3}(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r\sin\theta}^{r}$$

$= \frac{4F}{\pi r^5 \cos\theta} x \frac{1}{3}\left[(r^2 - r^2 sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} - (r^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]$

$= \frac{4F}{3\pi r^5 \cos\theta} x\, r^3(1 - sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{4F}{3\pi r^2} cos\ ^2\theta)$.......................... i)

तटस्थ अक्षला (Neutral axis) , θ = 0,म्हणजे cos0= 1) समीकरण....... i) मध्ये ठेऊ ,

q_{max} = जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (shear stress) = 4 3Fr2

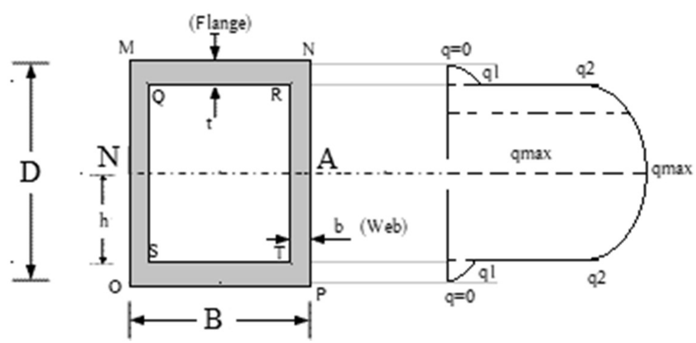
q_{av} = सरासरी कातरणे प्रतिबल (shear stress) =Fr2

म्हणून, $q_{max} = \frac{4}{3} q_{av}$

θ =90⁰,q0 = ,म्हणून विभागाच्या वरच्या आणि खालच्या टोकाला सरासरी कातरणे प्रतिबल)shear stress) हा शून्य असेल .

4.5 3.पोकळ आयताकृती विभागासाठी)Hollow rectangular section) कातरणे प्रतिबल विभाजन)Shear Stress distribution) आकृती

समजा, आकृती 4 9.मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एक पोकळ आयताकृती विभाग आहे ज्याची बाहेरच्या सिमा)B X D) अशा आहेत .b= वेबची रूंदी आणि t फ्लेंजची जाडी =



आकृती: 4.9 Shear stress distribution in Hollow rectangular section

(I) q = थरांच्या वरच्या आणि खालच्या टोकाला कातरणे प्रतिबल = 0 ......(AXy = 0)

(II) q_1 = वेब आणि फ्लेंजच्या जोडाच्या ठिकाणी कातरणे प्रतिबल = FAyIB ....(A =B X t ,y = h+t 2,F = कातरणे बल)

(III) कातरणे प्रतिबल (shear stress) अचानक q_2पर्यंत वाढतो.
q_2 = B 2bxq_1 .... ('2b' कारण येथे 2 वेब b रुंदीचे आहेत.)

q_{max} = जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (shear stress) हा तटस्थ अक्षला)Neutral axis) असतो

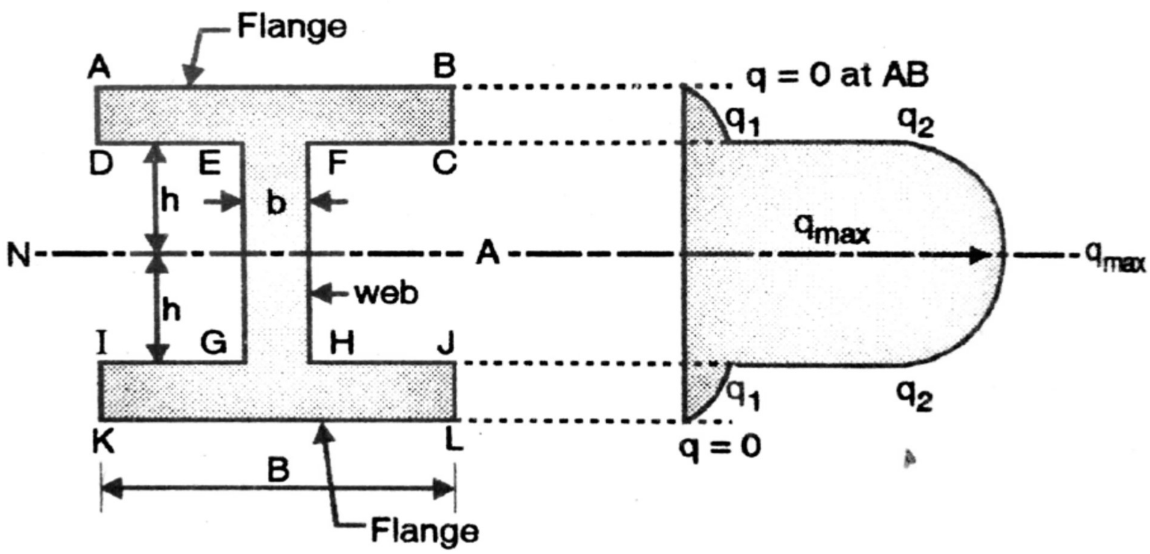
= q_2 + q_{add}

येथे, q_{add} = अधिकचा कातरणे प्रतिबल (shear stress)

q_{add}= FAyIB .... (A = 2 (bx h) , y = h 2 तटस्थ अक्ष)Neutral axis) पासून)

4.5 4.सममितीयI विभागासाठी)Symmetrical I Section) कातरणे प्रतिबल विभाजन)Shear Stress distribution) आकृती

समजा,आकृती 4 10.मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एक सममितीय। विभागासाठी)Symmetrical I Section) आहे .



आकृती: 4.10 Shear stress distribution in I-section

ज्याच्यामध्ये,B वरच्या आणि खालच्या फ्लेंजची रूंदी =

b वेबची रूंदी = b

t फ्लेंजची जाडी = t

h =EF थराचे तटस्थ अक्ष (Neutral axis) पासूनचे अंतर

(i) q = थरांच्या वरच्या आणि खालच्या टोकाला कातरणे प्रतिबल = 0 ......(AXy = 0)

(ii) q_1 = वेब आणि फ्लेंज यांच्या जोडाच्या ठिकाणी कातरणे प्रतिबल म्हणजेच EF आणि GH = FAyIB ....(A =B X t ,y = h+t 2तटस्थ अक्ष)Neutral axis) पासून,F = कातरणे बल)

(iii) कातरणे प्रतिबल (shear stress) अचानक q_2पर्यंत वाढतो.

$$q_2 = \frac{B}{b} x q_1$$

q_{max} = जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (shear stress) हा तटस्थ अक्षला)Neutral axis) असतो

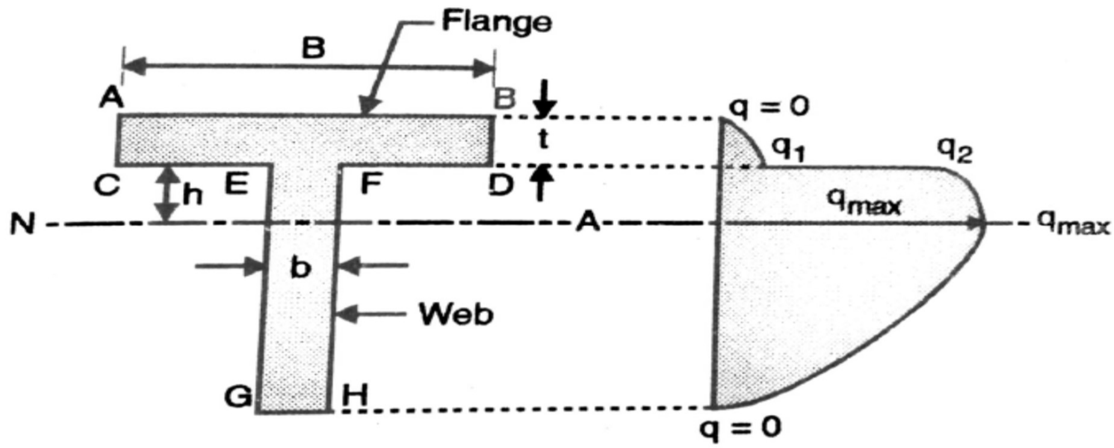
=q_2 + q_{add}

येथे,q_{add} = अधिकचा कातरणे प्रतिबल (shear stress)

$q_{add} = \frac{FA\bar{}}{IB}$**)** .... A) = bx h (,$\bar{y}$ = $\frac{h}{2}$तटस्थ अक्ष (Neutral axis) पासून **(**

4.5.5 T–विभागासाठी)T-Section) कातरणे प्रतिबल विभाजन)Shear Stress distribution) आकृती

समजा, आकृती मध्ये 4.11 दाखविल्याप्रमाणे एक T – विभाग)T-Section) आहे .



आकृती: 4.11 Shear stress distribution in T-section

ज्याच्यामध्ये, B फ्लेंजची रूंदी =

b वेबची रूंदी =

tफ्लेंजची जाडी आणि =

h =EF थराचे तटस्थ अक्ष)Neutral axis) पासूनचे अंतर

i) q = विभागाच्या थराच्या वरच्या आणि खालच्या टोकाला कातरणे प्रतिबल (Shear stress) म्हणजेच AB आणि GH च्या ठिकाणी = 0

ii) q_1 = वेब आणि फ्लेंज यांच्या जोडाच्या ठिकाणी कातरणे प्रतिबल म्हणजेच EF = FAyIB .... (A =B X t ,y = h+t 2,F = कातरणे बल)

iii) कातरणे प्रतिबल (shear stress) अचानक q_2पर्यंत वाढतो.

q_2 = B bxq_1

q_{max} = जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (shear stress) हा तटस्थ अक्षला)Neutral axis) असतो.

=q_2 + q_{add}

येथे,q_{add} = अधिकचा कातरणे प्रतिबल (shear stress)

q_{add}= FAyIB .... (A = (bx h) ,y = h 2) तटस्थ अक्ष)Neutral axis) पासून

1. जास्तीत जास्त झुकणारा मोमेन्ट (Maximum bending moment) 5 kN.m आणि 80 मिमी x 240 मिमी खोल आयताकृती विभाग असणाऱ्या बीमच्या वरच्या काठाच्या खाली 25 मिमी अंतरावर झुकणारा प्रतिबल (Bending Stress) शोधा.

दिलेली माहिती-

$b = 80mm$, $d = 240\ mm$, $B_{max} = 5\ kN\text{-}m$,

σ_b हा 25 mm बीम विभागाच्या वरच्या काठाच्या खाली 25 मिमी अंतरावर शोधणे आहे.

उत्तर- $Y = \frac{D}{2}$

$= \frac{240}{2} - 25$

$= 95mm$

$B_{max} = 5\ kN\text{-}m = 5 \times 10^6 Nmm$

$I_{NA} = \frac{bd^3}{12}$

$= \frac{180 \times 120^2}{12}$

$= 11520000 mm^4$

$\sigma_b = \frac{M}{I} \times Y$

$= \frac{5x10^6}{11520000} X\ 95$

σ_b= 41.233 N/mm³

2. घन गोलाकार क्रॉस सेक्शन असलेल्या कॅन्टिलिव्हर बीमच्या आणि 3 मीटर लांबीच्या मुक्त टोकावर 35 kN इतका केंद्रित भार (concentrated load) येत आहे. जर तणावात)Tension) किंवा दबावात)Compression) मध्ये जास्तीत जास्त झुकणाराप्रतिबल 120 N/m पेक्षा जास्त नसेलतर बीमचा व्यास . (diameter) निश्चित करा.

दिलेली माहिती-

$L = 3m = 3000mm$

$W = 35\ kN = 35x10^3 N$

$\sigma_b = 120\ N/mm^2$

D शोधणे आहे.

उत्तर- झुकणे च्या समीकरणानुसार (Bending equation),

$\frac{M}{I} = \frac{\sigma b}{y}$................(I)

कॅन्टिलेवेर बीमवर केन्द्रित भार टोकालाअसल्यावर,

$M_{max} = WL$

$= 35X10^3 X\ 3000$

$= 105 \times 10^6 N\text{-}mm$

समीकरण (I) वरून,

$\frac{105 X 10^6}{\pi/64}$ XD^3 = $\frac{12D}{D/2}$

$\frac{64 x105 X 10^6}{\pi X D^3}$ = 2X120

D^3 = $\frac{105 X 10^6 X 64}{\pi X2X120}$

D = $\sqrt[3]{\frac{105 X 10^6 X 64}{\pi X2X1}}$

D = 207.33mm

3. आयताकृती विभाग)Rectangular section) 230 मिमी रुंद आणि 420 मिमी खोल असणाऱ्या आणि ज्याच्यावर 40 kN चा कातरणे बल (shear force) आहे अशा संपूर्ण विभागात जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल)Shear Stress) शोधा.

दिलेली माहिती-

b = 230 mm

d = 420 mm

F = 40 kN = 40 X 10^3N

उत्तर- आयताकृती बीममध्ये,

q_{max} = 1.5 q_{avg}................(I)

परंतु, q_{avg} = $\frac{f}{A}$

= $\frac{40X 10^3}{(230X420)}$

= 0.414 N/mm^2

समीकरण (I) वरून,

q_{max} = 1.5 q_{avg}

= 1.5 X 0.414

q_{max} = 0.621 N/mm^2

4. एका वर्तुळाकार बीममध्ये जास्तीत जास्त 10kN कातरणे बल (shear force)आहे .जर जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल)Maximum Shear Stress) 1.5 N/mm^2 पर्यंत मर्यादित असल्यास बीमचा आवश्यक व्यास (diameter) शोधा.

दिलेली माहिती-

f =10kN = 10 x 10^3 N

q_{max} = 1.5 N/mm^2

उत्तर- वर्तुळाकार बीममध्ये,

q_{max} = $\left(\frac{4}{3}\right)$ q_{avg}................(I)

=$\frac{\left(\frac{4}{3}\right) XF}{\pi/4}$ $x$$D^2$

= $\frac{\left(\frac{4}{3}\right) x 4 x10000}{\pi}$ $x$$D^2$

1.5 = $\frac{\left(\frac{4}{3}\right) x 4 x10000}{\pi}$ $x$$D^2$

$D^2 = \frac{1.5X\pi}{\left(\frac{4}{3}\right) x\ 4\ x10000}$

$D = \sqrt{\frac{1.5X\pi}{\left(\frac{4}{3}\right) x\ 4\ x10000}}$

D = 33.64 mm

5. एका सिम्पली सपोर्टेड बीमचा स्पॅन मीटर 6 आहे तो संपूर्ण .स्पॅन वर 12kN/m चा एकसमान वितरत भार (Uniformly Distributed load) वाहून नेतो आणि 10kN चा केंद्रित भार) Concentrated load (स्पॅनच्या मध्यभागी आहे) बीमच्या सामग्रीमध्ये जर .material) झुकणारा प्रतिबल)Bending Stress) 8 N/mm² पेक्षा जास्त नसेल तर .बीमचा योग्य आयताकृती विभाग निश्चित करा.रुंदीच्या दुप्पट खोली घ्या .

दिलेली माहिती-

l 6 = मीटर

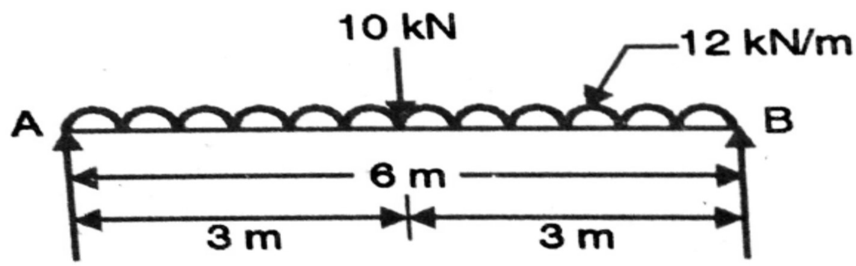
w 12 = kN/m

W 10 = kN

σ_b 8 = N/mm²

d बीमची = खोली आणि b बीमची = रुंदी

d 2 = b



आकृती: 4. 12सिम्पली सपोर्टेड बीम

उत्तर- जास्तीत जास्त झुकणारा मोमेंट,

$M = \frac{wl^2}{8} + \frac{Wl}{4}$.....आकृतीवरून

$M = \frac{12\ x\ 6^2}{8} + \frac{10\ x\ 6}{4}$

= 69kN-m

= 69 x 10^6N-mm

$I = I_{XX} = I_{NA} = \frac{bd^3}{12}$

$= \frac{b(2b)^3}{12}$ .... (d 2 = b)

$= \frac{8b^4}{12}$

= $0.666b^4$

$y_{max} = \frac{d}{2}$.....$= \frac{2b}{2}$..... = b

Flexure च्या सूत्रांनुसर,

$\frac{M}{I} = \frac{\sigma_b}{y}$

$\frac{69 \times 10^6}{0.666b^4} = \frac{8}{b}$

$\frac{69 \times 10^6}{(0.666 \times 8)} = \frac{b^4}{b}$

$b^3 = 12.95 \times 10^6$

b = 234.84 mm

b = 240 mm ....म्हणू

d = 2b = 2 x 235

d = 470 mm

म्हणून,बीमचा योग्य आयताकृती विभाग2 40xमिमी 470 होईल.

6. एका मिम 360ी खोल आणि मिमी रुंद बीम 240चास्पॅन 8 मी .आहेजर झुकणारा . प्रतिबल (Bending Stress) हा 18N/mm^2 पेक्षा जास्त नसेल तर.जास्तीत जास्त तो बीम किती एकसमान वितरत भार (Uniformly Distributed load) वाहून नेऊ शकतो .

दिलेली माहिती-

dमिमी 360 = , bमिमी 240 =

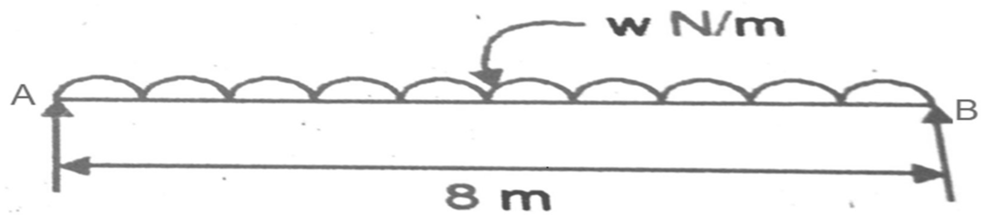
L 8 = मी, σ_b 18 = N/mm^2,w = ?

उत्तर- $M = \frac{wl^2}{8}$

$= \frac{w \times 8^2}{8}$

= 8w N-m.

= 8 x 10^3wN-m.



आकृती: 4. 13सिम्पली सपोर्टेड बीम

$I = \frac{bd^3}{12}$

$= \frac{240 \times 360^3}{12}$

= 933.12 x 10^6 mm^4

Flexure च्या सूत्रांनुसर,

$\frac{M}{I} = \frac{\sigma_b}{Y}$

$\frac{8 \times 10^3 x w}{933.12 \times 10^6} = \frac{18}{180}$) .... $y = \frac{360}{2}$ 180 =मिमी(

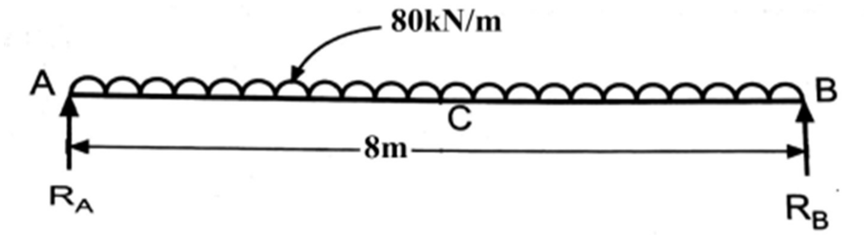
$W = \frac{933.12 \times 10^6 x 18}{180 x 8 \times 10^3}$

11.664 = x10^3 N/m

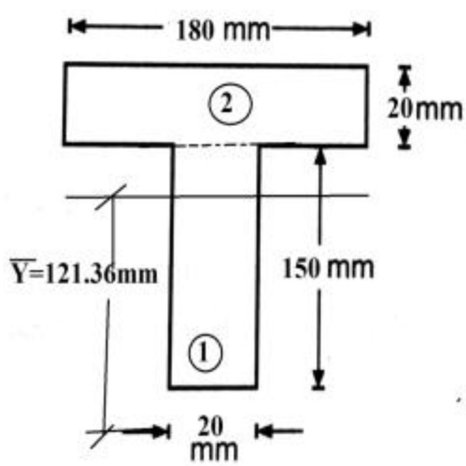
w 11.664 = kN/m

7. एका टी-विभाग)T-Section) बीममध्ये 8 मीटरइफ्फेक्टिव्ह स्पॅनवर 80 kN/m एकसमानवितरीत भार (Uniformly Distributed load) आहे.जर फ्लेंज 180 मिमी रुंद आणि 20 मिमी जाडी असलेला आणि वेब150 मिमी लांब आणि 20 मिमी जाडीअसलेला आहे . तरजास्तीत जास्त झुकणारा प्रतिबल (Maximum bending stress) काढा.

उत्तर-



आकृती: 4. 14सिम्पली सपोर्टेड बीम



आकृती: 4. 15टी-विभाग (T-Section)

$A_1 = 20 \times 150 = 3000\ mm^2 \quad y_1 = \frac{150}{2} = 75mm$

$A_2 = 180 \times 20 = 3600 mm^2 \quad y_2 = 150 + \frac{20}{2} = 160mm$

$\bar{y} = \frac{(A1\ y1 + A2\ y2)}{A1 + A2}$

$= \frac{(3000x75 + 3600x160)}{(3000+3600)}$

$\bar{y} = 121.36$ mm

$y_c = 48.64$ mm, $y_t = 121.36$ mm.

$I_{XX} = I_{XX1} + I_{XX2}$

$= (I_G + Ah^2)_1 + (I_G + Ah^2)_2$

$= (\frac{bd^3}{12} + Ah^2)_1 + (\frac{bd^3}{12} + Ah^2)_2$

$= (\frac{20\ x\ 150^{\ 3}}{12} + 3000x(121.36-75)^2)_1 + ((\frac{180\ \ x\ 20\ x10^{\ 3}}{12}) + 3600x(48.64-10))_2$

= 12072748.8+ 5494978.56

I_{XX}= 17.568 x 10^6 mm^4

जास्तीत जास्त झुकणारा मोमेन्ट (Maximum bending moment)-

M =$\frac{wl^2}{8}$= $\frac{80 \times 8^2}{8}$ = 640 kNm = 640 x 10^6N-mm

जास्तीत जास्त प्रतिबल-

σ_c = $\frac{M}{I}$x y_c

= $\frac{640 \times 10^6}{17.568 \times 10^6}$x48.64 = 1771.97 N/$mm^2$ (C)

σ_t = $\frac{M}{I}$x y_t

= $\frac{640 \times 10^6}{17.568 \times 10^6}$ x 121.36 = 4421.198 N/mm^2 (T)

σ_t = σ_{max} = 4421.198 N/mm^2 (T)

8. एका सममितीय I विभागात (Symmetrical I Section) प्रत्येकी मिमी 150x मिमी 30फ्लेंज आणि अनुलंब वेब मिमी 300 X मिमीचे 20आहेत .जर एका विभागातील कातरणे बल (shear force) 100kN असेल .तर संपूर्ण विभागात जास्तीत जास्त आणि सरासरी कातरणे प्रतिबल (Maximum and average shear stress) काढा .

   उत्तर- फ्लेंज मिमी 150 =x मिमी 30

   वेब= मिमी 300x मिमी 20

   वेबची जाडी (t)मिमी 20 =

   कातरणे बल (shear force) 100= kN= 100 x10^3 N

   I_{XX}2 = X 10^8मिमी^{4}

   a) जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबलमाहीत करणे (q_{max}) आहे,

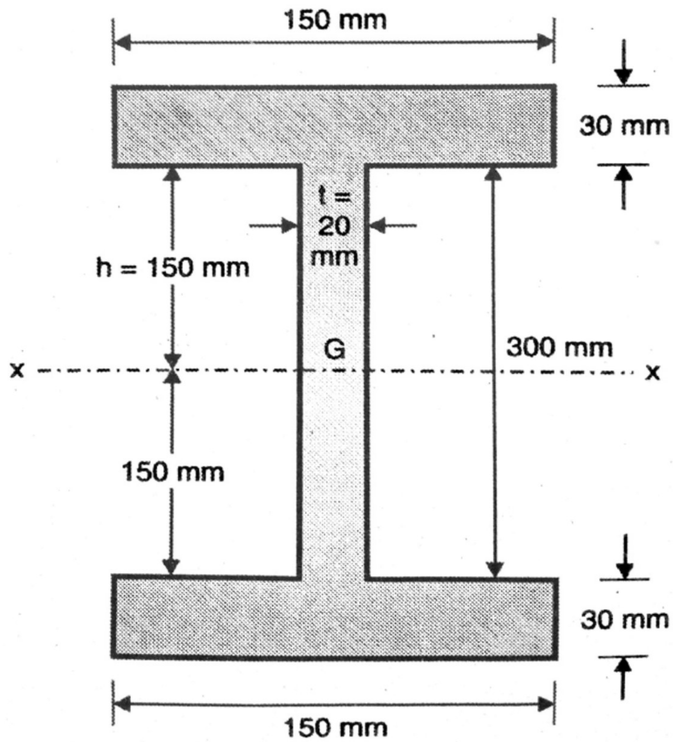
      i) q टोकाचा =कातरणे प्रतिबल 0 =

      ii) q_1फ्लेंज आणि वेब यांच्या जोडावर = कातरणे प्रतिबल

q_1= $\frac{FA\bar{y}}{IB}$

= $\frac{(150 X30)X 165X 100 X10^3}{150X 2 X10^3}$.................($\bar{y}$ = 150+ $\frac{30}{2}$=165 मिमी(

=2. 475N/mm^2



आकृती: 4. 16सममितीय I विभाग **(Symmetrical I Section)**

iii) q_1अचानक q_2 पर्यंत वाढते :

$q = \frac{B}{t} \, x \, q_1$......t = वेबची जाडी मिमी 20 =

$= \frac{150}{20}$ x 2. 475 = 18.56 N/mm^2

$q_{max} = q_2 + q_{add}$

$q_{add} = \frac{FA\bar{y}}{It}$

$= \frac{150 \text{ X } 20 \text{ X } 75 \text{ X } 100 \text{ X}10^3}{20\text{X } 2 \text{ X}10^8}$

...(A = t x h = 20x150, $\bar{y}$ = h/2 = 150/2 = 75मिमी)

= 5.625 N/mm^2

q_{max} = 18.56 + 5.625

q_{max} = 24.185 N/mm^2

b) सरासरी कातरणे प्रतिबलमाहीत करणे)q_{avg}) आहे ,

A एकूण = सममितीय। विभागाचे क्षेत्रफळ

150) 2 = X 20) + (30 X(300

15000 = mm^2

$q_{avg} = \frac{F}{A}$

$= \frac{100 \text{ X } 10^3}{15000}$

q_{avg} 6.67 = N/mm^2

Sample Questions

- एक आयताकृती बीम 80 मिमी x 50 मिमी क्रॉस-सेक्शन 5 मीटर स्पॅनचा कॅन्टिलिव्हर म्हणून वापरला जातो. तो मुक्त टोकाला 1500 N चा भार वाहते. तर जास्तीत जास्त तणावात (tensile) आणि दबावात (Compressive) प्रतिबल निश्चित करा. (**उत्तर- $\sigma_c = \sigma_t$ = 140.63 N/mm^2)**

- सममितीय। विभागात (Symmetrical I Section)प्रत्येकी 150 मिमी x 20 मिमी फ्लँज आणि अनुलंब वेब 300 मिमी x 10 मिमीचे आहेत. एका विभागातील कातरणे बल (shear force)100 kN आहे. तर विभागातील जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (Maximum shear stress)माहीत करा. (**उत्तर- q_{max} = 33.606 N/mm^2)**

- एका आयताकृती बीमची खोली 300मिमी आहे. एका ठराविक विभगातजास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (Maximum shear stress)10 MPa आहे. तर तटस्थ अक्षापसून (Neutral axis) 75 मिमी आणि 50 मिमी अंतरावर जास्तीत जास्त कातरणे प्रतिबल (Maximum shear stress) काढा.**(उत्तर- q_1 = 7.5 MPa आणि q_2 = 8.9 MPa)**

यूनिट 5:थेट आणि झुकणारे प्रतिबल

DIRECT AND BENDING STRESSES

- **विषय निष्पती (Course outcome):**

विलक्षण लोडिंग परिस्थितीत संरचनात्मक मेम्बर मधील थेट आणि वाकलेल्या ताणांचे (Direct and Bending Stress) विश्लेषण करा.

- **सिद्धांत शिक्षण निष्पत्ती (Theory Learning Outcome):**

TLO.1 स्तंभांवर थेट आणि विक्षिप्त भारांचा प्रभाव स्पष्ट करा.

TLO.2 मुख्य अक्षांपैकी एकावर विलक्षण भार असलेल्या कॉम्प्रेशन मेम्बरसाठी परिणामी ताण-वितरण आकृती काढा.

TLO.3 आयताकृती आणि वर्तुळाकार स्तंभासाठी स्तंभ, विभागाचा गाभा यासाठी शून्य तन्यक (Zero tension) स्थिति लिहा.

TLO.4 वेगवेगळ्या शेवटच्या परिस्थितींसह दिलेल्या स्तंभासाठी त्रिज्या, सडपातळपणाचे प्रमाण आणि प्रभावी लांबी या संज्ञा ओळखा.

TLO.5 यूलरचे फॉर्म्युला (Euler's Formula) आणि रँकाइनचे फॉर्म्युला (Rankine's Formula) वापरून स्तंभांमध्ये बकलिंग लोडची संकल्पना समजून घ्या.

प्रस्तावना

कोणताही अनुलंब सदस्य, स्तंभ म्हणा, घाट जेव्हा अक्षीय भाराच्या अधीन असतो तेव्हा थेट ताण तयार होतो. जर स्तंभावर विक्षिप्त भार कार्यरत असेल तर वाकणारा ताण तयार होईल. म्हणून आपण स्तंभावरील थेट आणि वाकलेल्या तणावाच्या एकत्रित परिणामाचा विचार करू शकतो. त्यामुळे डायरेक्ट आणि बेंडिंग स्ट्रेसच्या मदतीने आपण कॉलमवर जास्तीत जास्त आणि कमीत कमी ताण मोजू शकतो. हा धडा मशीनच्या भागांवरील थेट आणि झुकणारा ताण तसेच बेंच व्हाइस, सी-क्लॅम्प, ड्रिलिंग मशीन फ्रेम इत्यादींच्या गणनेशी संबंधित आहे.

1.1.1 थेट भार किंवा अक्षीय भार (Direct or Axial load)

जेव्हा एखादा भार एखाद्या मेम्बरवर कार्य करत असतो ज्याची क्रिया मद्यांकवर कार्य करतो त्या मेम्बरच्या अक्षाशी जुळतो तेव्हा त्याला थेट भार किंवा अक्षीय भार असे म्हणतात.

थेट ताण किंवा अक्षीय ताण (Direct or Axial stress)

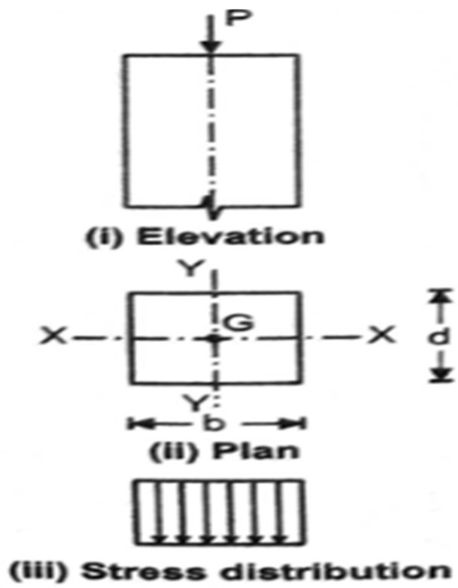
क्रॉस सेक्शनल क्षेत्रामध्ये थेट भाराचे गुणोत्तर याला थेट ताण किंवा अक्षीय ताण असे म्हणतात.

थेट ताण $\sigma_o = \frac{P}{A}$

$$\sigma_o = \frac{P}{b \, x \, d}$$

आकृती 5 1.मध्ये दर्शविल्या प्रमाणे अक्षीय संकुचित भार P वाहून नेणाऱ्या b आणि जाडी d च्या आयताकृती विभागाच्या स्तंभाचा विचार करूया .भार P विभागाच्या सेंट्रोइड G वर अचूकपणे

कार्य करतो .लोड 'P' मुळे संकुचित स्वरूपाचा थेट ताण येतो ज्याची तीव्रता संपूर्ण क्रॉस-सेक्शनमध्ये एकसमान असते म्हणजेच क्रॉस-सेक्शनमधील कोणत्याही टप्प्यावरचा ताण P/A असतो .म्हणून स्तंभाच्या पायथ्यावरील ताण वितरण आकृती 5 1.मध्ये दर्शविल्या प्रमाणे एक आयत आहे .थेट ताण σ_0 द्वारे दर्शविला जातो.



आकृती 5 1.थेट ताण किंवा अक्षीय ताण

$$\text{म्हणून थेट ताण}\ \sigma_0 = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{b\ X d}$$

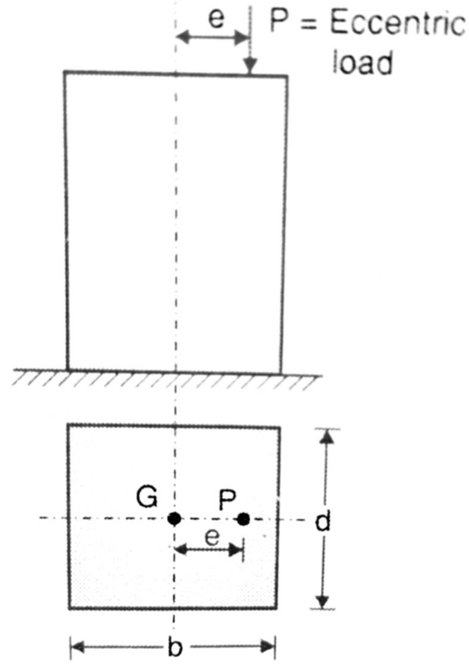
5.1.2 विक्षिप्त भार (Eccentric load)

जेव्हा भार मध्यवर्ती अक्षाव्यतिरिक्त स्तंभावर कार्य करत असतो तेव्हा त्या भाराला विक्षिप्त भार असे म्हणतात.

विक्षिप्त भार)P) क्षणामुळे M ची निर्मिती होते.

M = P x e

विक्षिप्त भार वाकणारा ताण)σ) तसेच थेट ताण)σ_0) निर्माण करतो.



आकृती 5.2 विक्षिप्त भार (Eccentric load)

तर वरील आकृतीत विक्षिप्त भारामुळे P, क्षण निर्माण झाला आहे.

M = P x e आणि या झुकण्यामुळे ताण निर्माण होतो.

5.1.3 विलक्षण भारा मुळे निर्माण होणारे प्रतिबल :

ज्या भाराची कृती सदस्याच्या अक्षाशी एकरूप होत नाही त्याला विलक्षण भार असे म्हणतात .वस्तुच्या भौमितिक अक्ष आणि भार बिंदूमधील अंतराला विलक्षण मर्यादा म्हणतात .तो 'e' ने दर्शविला जातो.

अक्षीय भारामुळे फक्त थेट ताण येतो तर विक्षिप्त भार थेट तसेच वाकणारा ताण निर्माण करतो .आकृती विलक्षण संकुचित भार P च्या अधीन असलेला एक स्तंभ ABCD दर्शवितो .P भार विशिष्ट जाडी असलेल्या स्तंभ)ABCD) ला ऊर्ध्व प्रतलात E बिंदूवर कार्य करतो म्हणजेच X-X अक्षावर .म्हणजेच Y-Y अक्षाच्या संदर्भात तो विलक्षण आहे . म्हणून अंतर GE ला विक्षिप्तता असे म्हणतात.

आधारित टिपण :

(i) सेक्शनच्या सेंट्रोइड G मधून जाणाऱ्या X-X आणिY-Y अक्षांना तत्त्व अक्ष किंवा मूलभूत अक्ष असे म्हणतात .भार हा Y-Y अक्षा संदर्भात विलक्षण असू शकतो,

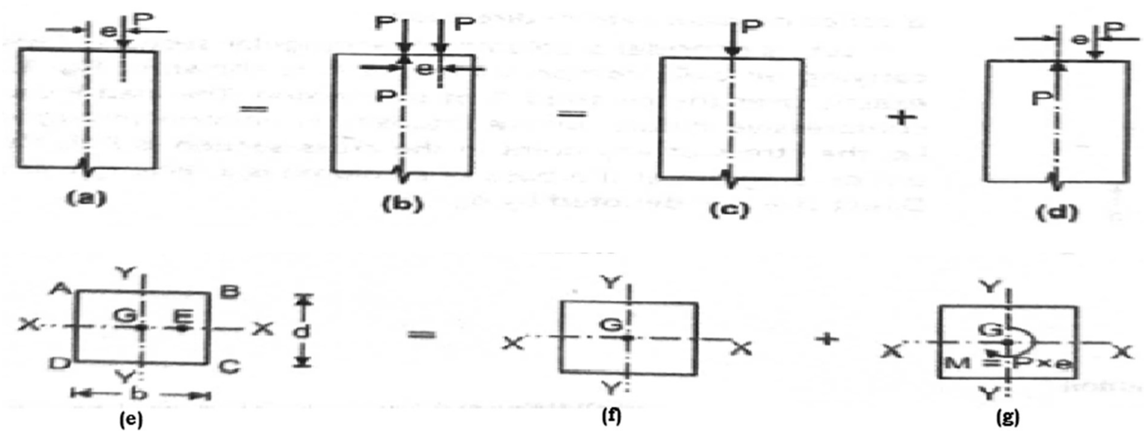
(ii) भारहा X-X अक्षा संदर्भात विलक्षण असू शकतो किंवा दोन्ही अक्षा संदर्भात विलक्षण असू शकतो .

(iii) जर भार हा Y-Y अक्षा संदर्भात विलक्षण असेल, तर सदस्याचे वाकणे Y-Y अक्षावर होईल . अशा परिस्थितीत, Y-Y अक्ष हा तटस्थ अक्ष म्हणून घेतला जातो आणि विभागाच्या जडत्वाचे परिबल Y-Y अक्षांबद्दल घ्यावा.

(iv) जर भार हा X-X अक्षा संदर्भात विलक्षण असेल,तर सदस्याचे वाकणे X-X अक्षावर होईल . अशा परिस्थितीत, X-X अक्ष हा तटस्थ अक्ष म्हणून घेतला जातो आणि विभागाच्या जडत्वाचा परिबल X-X अक्षांबद्दल घ्यावा.

5.2.1 विक्षिप्त भाराचे विश्लेषण:

आता आपण आकृती e मध्ये दाखविल्या प्रमाणे स्तंभ ABCD गृहीत धरूया, ज्यामधे विक्षिप्त भार हा बिन्दु E वरती कार्यान्वित केला गेला आहे .G हे प्रतलाचे केंद्रक असुन GE हे अंतर e असे गृहीत मानले आहे.



आकृती 5.3: विक्षिप्त भाराचे विश्लेषण

आकृती 5) 3.b) मध्ये दर्शविल्या प्रमाणे स्तंभाच्या अक्षावर G बिन्दु वर दोन समान आणि विरुद्ध भार निर्माण होतील, कारण जारी भर हा बिन्दु E वरती कार्यरत असला तरी वर बघितल्या प्रमाणे भार P ची तीव्रता ही संपूर्ण प्रतल ABCD वरती एकसमान असेल .यासमान, विरुद्ध आणि समरेखीय बलामुळे स्तंभाचा लोडिंग पॅटर्न बदलत नाही कारण त्यांचा परिणाम शून्य आहे, आणि तिसरा भार हा बिन्दु E वरती पूर्वी पासूनच कार्यान्वित आहे. म्हणून आता या तिन्हीभार वर आकृती मध्ये दाखविल्या प्रमाणे विभागले जाऊ शकतात .अक्षीय बल P आकृती

5) 3.c) मध्ये दाखविल्या प्रमाणे G बिन्दुवर कार्यान्वित होईल आणि आकृती 5) 3.f) मध्ये दाखविल्या प्रमाणे सेंट्रॉइड G वर कार्य करणारे अधोगामी बल P थेट तणाव निर्माण करेल .उर्वरित दोन बल उदा . खालीयेणारे विक्षिप्त बल P आणि एक ऊर्ध्वगामी अक्षीय बल P हे घड्याळाच्या दिशेने जोडपे तयार करेल ज्याचा केंद्रबिंदू G वरील परिबल M = P x e असेल .केंद्रबिंदू G आकृती 5) 3.g) वर कार्य करणारा परिबल निर्माण करेल .म्हणून विक्षिप्त भारामुळे थेट तसेच वाकविणारे प्रतिबल निर्माण होतात . :जसे की खलील दिल्या प्रमाणे

थेट भार P मुळे तयार होणारे थेट प्रतिबल $=\sigma_o = \frac{P}{A}$ किंवा $\sigma_o = \frac{P}{b\,Xd}$

वाकविणारा भार P मुळे तयार होणारे वकविणारे प्रतिबल हे प्रतिबल मोजण्या करिता आपण : प्रतिबलाचे सूत्र म्हणजेचवकविणाऱ्याflexural सूत्राच वापर करू.

म्हणून, $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}$

येथे, M = प्रतिकाराचे परिबल)moment),

I = विभागाच्या तटस्थ अक्षाला)N.A.) भोवतीचे जडत्वचे परिबल)Moment Of Inertia)

Eमॉड्यूलस यंगचे लवचिकता = ,

R = N.A च्या वक्रतेची त्रिज्या आणि

σ_b=झुकणारे प्रतिबल (Bending stress)

वरील समीकरण 'झुकणारे समीकरण'(Bending equation) म्हणून ओळखले जाते.

म्हणून $\sigma_b = \frac{M}{I} X y$

$\sigma_b = \frac{M}{(I/y)}, \frac{I}{y} = Z$

$\sigma_b = \frac{M}{Z}$

इथे:

I = विभागाच्या तटस्थ अक्षाला)N.A.) भोवतीचे जडत्वचे परिबल)Moment Of Inertia). = $\frac{bd^3}{12}$

y= थराचे)layer) चे अक्ष Y-Y पासूनचे अंतर) =d/2)

Z= सेक्शन मॉड्यूलस)$\frac{I}{y}$)

$\frac{I}{y} = Z = \frac{\frac{bd^3}{12}}{\frac{d}{2}}$, $Z = \frac{bd^2}{6}$

म्हणून, अक्ष Y-Y पासून कुठल्याही थरावर येणारे एकूण परिणामी प्रतिबल =

थेट प्रतिबल ± वकविणारे प्रतिबल

$\sigma_r = \sigma_o \pm \sigma_b$

M = PXe वाकण्याच्या परिबला मुळे, सेंट्रॉइड G वर कार्य करत असताना, Y-Y अक्षाच्या उजवीकडील भाग संकुचित प्रतिबलाच्या अधीन असेल आणि Y-Y अक्षाच्या डावीकडील भाग तणावग्रस्त प्रतिबलाच्या अधीन असेल .म्हणून σ_bहा BC साठी संकुचित आणि AD साठी तन्य असेल .

कोपरे B आणि C लोड P च्या जवळ असल्याने, जास्तीत जास्त ताण B आणि C या कोपऱ्यांवर तयार होतील .कोपरे A आणि D, P लोड पासून दूर असल्याने त्या ठिकाणी कमी तान असेल.

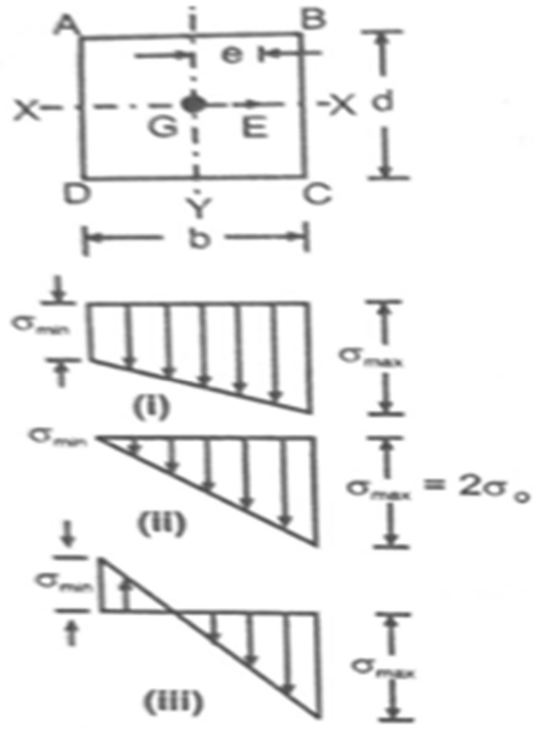
म्हणून बाजू BC वर निर्माण होणारे परिणामी प्रतिबल $=\sigma_r = \sigma_o \pm \sigma_b = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{Z}$) Compressive)

बाजू AD वर निर्माण होणारे परिणामी प्रतिबल $=\sigma_r = \sigma_o \pm \sigma_b = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{Z}$

टीप :

1. BC आणि AD च्याअत्यंतटोकाच्या स्तरांवरवाकणारापरिबलमोजण्यासाठी, y येथे Y_mम्हणजेच Y_{max}=b/ 2असे घेतले पाहिजे.
2. आकृती 5.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे विक्षिप्त लोडिंग मुळे परिणामी तणावाची गणना करण्यासाठी, तीन प्रकरणे शक्य आहेत.
3. जर σ_o>σ_bअसेल तर संपूर्ण विभागातील प्रतिबल सारखाच असेल म्हणजेच संकुचित
4. जर σ_o =σ_bअसेल तर संपूर्ण विभागातील प्रतिबल देखील समान स्वरूपाचा असेल .म्हणजेच संकुचित या प्रकरणात, σ_{max} 2=σ_o आणि σ_{min}.0=
5. $\sigma_o < \sigma_b$असल्यास प्रतिबल अंशतः तन्य आणि अंशतः संकुचित असेल.

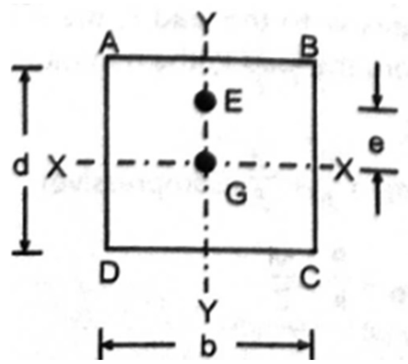
खालिल तीन प्रकरणांसाठी प्रतिबल वितरण आकृती 5.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे आहेत.



आकृती 5.4 : प्रतिबल वितरण

लहान सांपीडक मेम्बर मध्ये होणारा एक अक्षीय वाक :

कुठल्याही एका तात्विक अक्षा भोवती)X-X,Y-Y) पडणाऱ्या वाक यास एक अक्षीय वाक असे म्हणतात . वरआपणX-X अक्षावरP सांपीडक भार वाहून नेणारा सदस्या मध्ये आलेला वाक पाहिला.



आकृती 5.5 : लहान सांपीडक मेम्बर मध्ये होणारा एक अक्षीय वाक

आता, संकुचित भार P हा Y-Y अक्षावर E बिंदूवर कार्य करतो असे गृहीत धरू .म्हणजे आत्ता विक्षिप्तताही X-X अक्क्षा ला अंनुसवरून असेल जसे आकृती 5 5.मध्ये दाखवले आहे .

$\sigma_r = \sigma_o \pm \sigma_b = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{Z}$

$\sigma_r = \sigma_o \pm \sigma_b = \frac{P}{A} \pm \frac{PXe}{I_{xx}} X \frac{y}{2}$

म्हणून बाजू AB वर येणारे परिणामी प्रतिबल :

$\sigma_r = \sigma_o + \sigma_b = \frac{P}{A} + \frac{PXe}{I_{xx}} X \frac{y}{2}$) Compression)

आणि बाजू CD वर येणारे परिणामी प्रतिबल :$\sigma_r = \sigma_o - \sigma_b = \frac{P}{A} - \frac{PXe}{I_{xx}} X \frac{y}{2}$

ज्यावेळी स्तंभवारती सांपीडक प्रतिबल लगू केले जाते त्या वेळी,

$\sigma_{max} = \sigma_o + \sigma_o$हे प्रतिबल सांपीडक स्वरूपाचे असेल आणि σ_{min}) =$\sigma_o < \sigma_b$तन्यक = प्रतिबल,$\sigma_o > \sigma_b$= सांपीडक प्रतिबल स्वरूपाचे असेल(.

उदाहरणे :

०१ (एक 300 मिमी रुंद आणि 200 मिमी जाडीचा आयताकृती खांब आहे .त्या खांबाच्या जाडीच्या प्रतलास 100 kN च्या भाराने 40मिमीच्या विलक्षणतेने दुभाजित केल्यास .त्या विभागातील कमाल आणि किमान प्रतिबल शोधा.

उत्तर :दिलेली माहिती :b = 300mm, d = 200mm, P = 100kN = $100X10^3$ N , e = 40mm

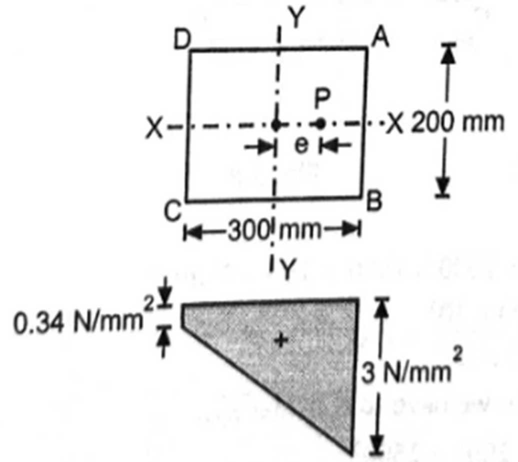
प्रतलाचे क्षेत्रफळ :bXd 300 = X^2 मीमी 600 = 200

परिणामी प्रतिबल शोधण्या करिताचे सूत्र :$\sigma_r = \sigma_o \pm \sigma_b = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{Z}$) Compressive)

i.e.$\frac{I}{y}$ =Z = $\frac{\frac{bd^3}{12}}{\frac{d}{2}}$,Z=$\frac{bd^2}{6}$ = $\frac{100X10^3}{600} \pm \frac{100X10^3X40}{\frac{200X300^2}{6}}$)Compressive)

$\sigma_{max(AB)} = \sigma_o + \sigma_b$ $= \frac{100X10^3}{600} + \frac{100X \quad ^3X40}{\frac{200X300^2}{6}}$) Compressive) 3 = N\mm^2

$\sigma_{min(CD)} = \sigma_o - \sigma_b$ = $\frac{100X10^3}{600} - \frac{100X10^3X40}{\frac{200X300^2}{6}}$) Compressive) 0.34 = N\mm^2



आकृती 5.6 : आयताकृती खांब

२ एक (पोकळ आयताकृती क्रॉस-सेक्शनच्या एका लहान स्तंभाची बाह्य परिमाणे2.4 मी x 1.8मी आहे .आणि त्याची जाडी 20 मिमी आहे .लांब बाजूने दुभाजीत करणाऱ्या विभागाच्या भौमितिक अक्षापासून 30 मिमी च्या विलक्षणते वर 500 KN चे अनुलंब भार लागू केल्यास .σ_{max} आणि σ_{min} शोधा?

दिलेली माहिती :B 1800 =मिमीD 2400 = मिमी

अंतर्गत परिमाणे: b = 1760 = 20 - 20 - 1800मिमी

d = 2360 = 20 - 20 - 2400मिमी

क्षेत्रफळ: = BD –bd

1800) =X 1760) - (2400 X 166400 = (2360 मीमी^{2}

विलक्षणता e = 30मिमी

लोडP = 500kN = 500X10^3 N म्हणून σ_{max} आणि σ_{min}:

विभाग मॉड्यूलस $Z_{yy} = \frac{I_{yy}}{y_{max}} = \frac{\frac{1}{12}(BD^3 - bd^3)}{\frac{y}{2}}$

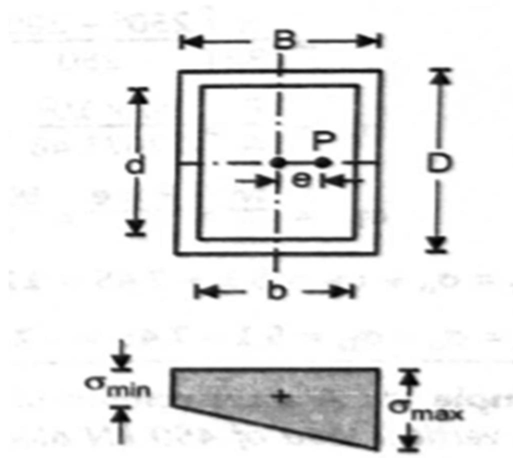
$= \frac{1}{6}\frac{(2400 \times 1800^3) - (2360 \times 1760^3)}{1800}$ = 104685985.2मिमी.^{3}

परिणामी प्रतिबल शोधण्या करिताचे सूत्र :$\sigma_r = \sigma_o \pm \sigma_b = \frac{P}{A} \pm \frac{M}{Z}$) Compressive)

$= \frac{500X\ \ ^3}{166400} \pm \frac{500X1\ \ ^3X30}{104685985.2}$)Compressive)

$\boldsymbol{\sigma_{max(AB)} = \sigma_o + \sigma_b}$ $= \frac{500X1\ \ ^3}{166400} + \frac{500X1\ \ ^3X30}{104685985.2}$) Compressive)3.14 = N\mm^2

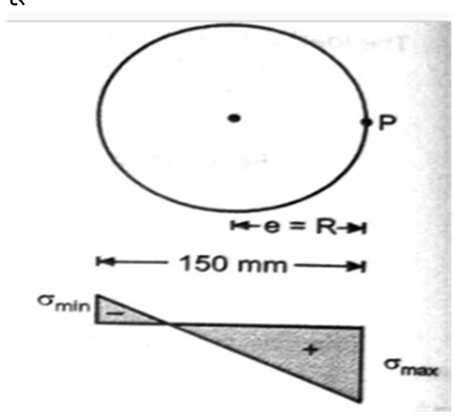
$\boldsymbol{\sigma_{min(CD)} = \sigma_o - \sigma_b} =$ $\frac{500X10^3}{166400} - \frac{500X10^3X30}{104685985.2}$)Compressive) 2.86 = N\mm^2



आकृती 5.7 : पोकळ आयत

4. **150 मिमी व्यासाचा घन वर्तुळाकार स्तंभाच्या बाहेरील काठावर 50 KN चा उभा भार वाहून कार्यान्वित केल्यास .σ_{max} आणि σ_{min} मोजा.**

दिलेली माहिती :व्यासD= 150मिमी, लोडP = 50kN = 50X10^3 N, विक्षिप्तताe = R = D / = 2 75 = 2/150मिमी म्हणून शोधण्यासाठी:



आकृती 5.8: घन वर्तुळाकार स्तंभ

$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{50 \, X10^3}{\frac{\pi}{4}(150^2)}$ 2.83 = N/mm^2

$Z = \frac{I}{y} = \frac{\frac{\pi}{64}(D^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{32}(150^3)$ 331339.85 = मिमी^{3}

$\frac{M}{Z} = \sigma_b = \frac{M}{(I/y)} = \frac{PXe}{Z} = \frac{50 \, X10^3 X \, 75}{331339.85}$ = 11.31 KN/ mm^2

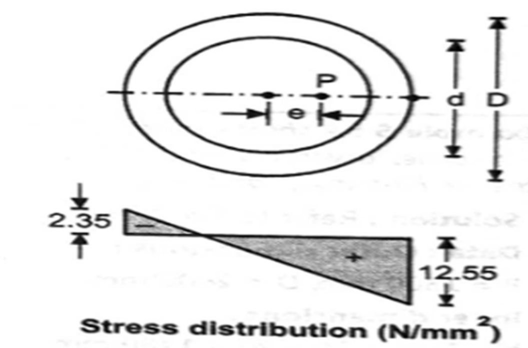
$\boldsymbol{\sigma_{max}} = \boldsymbol{\sigma_o} + \boldsymbol{\sigma_b}$ = 2.83N/mm^2+11.31 KN/ mm^2 = 14.14 KN/ mm^2)Compressive)

$\boldsymbol{\sigma_{min}} = \boldsymbol{\sigma_o} - \boldsymbol{\sigma_b}$ = 2.83N/mm^2-11.31 KN/ mm^2 = -8.46 KN/ mm^2)Tensile)

४) बाह्य व्यास 250 मिमी आणि अंतर्गत व्यास 200 मिमी असलेला पोकळ वर्तुळाकार स्तंभाच्या भौमितिक केंद्रापासून 75 मिमीच्या विलक्षणते वर 90 kN चा उभा भार कार्यान्वित केल्यास . $\boldsymbol{\sigma_{max}}$, $\boldsymbol{\sigma_{min}}$ ची गणना करा.

उत्तर :दिलेली माहिती :D = मिमी 250, d = मिमी 200P = 90X10^{3}N, e = मिमी 75.

वर्तुळाकार स्तंभाचे क्षेत्रफळ A=$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ = $\frac{\pi}{4}(250^2 - 200^2)$17671.46 = mm^2



आकृती 5.9: पोकळ वर्तुळाकार स्तंभ

$Z = \frac{I}{y} = \frac{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{32}\frac{(D^4 - d^4)}{D} = \frac{\pi}{32}\frac{(250^4 - 200^4)}{250}$=

905662.2mm^3

$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{90 \, X1 \;\; ^3}{17671.46}$ =

5.1N/mm^2

$\frac{M}{Z} = \sigma_b = \frac{M}{(I/y)} = \frac{PXe}{Z} = \frac{90 \, X10^3 X \, 75}{905662.26}$ = 7.45 KN/ mm^2

$\boldsymbol{\sigma_{max}} = \boldsymbol{\sigma_o} + \boldsymbol{\sigma_b}$ = 5.1N/mm^2+7.45 KN/ mm^2 = 12.55 KN/ mm2(Compressive)

$\boldsymbol{\sigma_{min}} = \boldsymbol{\sigma_o} - \boldsymbol{\sigma_b}$ = 5.1N/mm^2-7.45 KN/ mm^2 = -2.35 KN/ mm^2(Tensile)

ज्यावेळी स्तंभवारती तन्यकभार लगू केला जातो, त्या वेळी

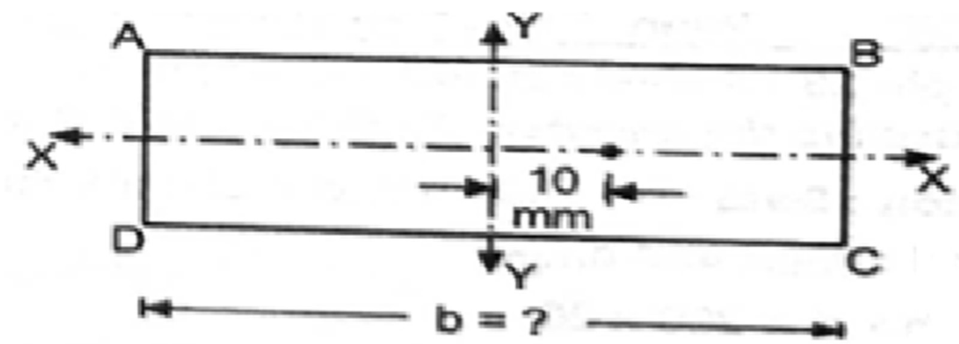
σ_{max}=σ_o + σ_oहे प्रतिबल तन्यक स्वरूपाचे असेल आणि σ_{min}) =σ o < σ_b सांपीडक = प्रतिबल ,σ_o> σ_b= तन्यक स्वरूपाचे प्रतिबलअसेल(.

तन्यक भार कार्यान्वित केल्यास तयार होणारे प्रतिबल काही उदाहरण साहित :

५) एका 200 मिमी रुंद आणि 20 मिमी जाडीचा स्टीलच्या सपाट फाळीवरती 10 मिमीच्या विलक्षणतेने200 kN चे तन्यक भार कार्यान्वित केल्यास,जाडीचे दुभाजक असलेल्या प्रतलात)Y-Y) .σ_{max},σ_{min}गणना करा .

दिलेली माहिती : b = 200mm d = 20mm, तन्यक भार P = $200X10^3$N, विक्षिप्तता e = 10mm

स्टील च्या सपाट पट्टीचे क्षेत्रफळ A = bXd = 4000 =20 * $200mm^2$



आकृती 5.10: सपाट फाळी

σ o = $\frac{P}{A}$ = $\frac{200X10^3}{4000}$=

50 N/mm^2

$\frac{I}{y}$ =Z = $\frac{\frac{db^3}{12}}{\frac{b}{2}}$,Z=$\frac{db^2}{6}$ = $\frac{20\,X200^2}{6}$=133333.333 mm^3

$\frac{M}{Z}$= σ_b=$\frac{M}{(I/y)}$= $\frac{PXe}{Z}$= $\frac{200X10^3X10}{133333.333}$ 15 = KN/mm^2

σ_{max}=σ_o + σ_b = $50N/mm^2$+15 KN/ mm^2 = 65 KN/ mm^2 तन्यक बाजू)AB)

σ_{min}=σ_o − σ_b = $50N/mm^2$-15 KN/ mm^2 = 35 KN/ mm^2 तन्यक बाजू)CD)

5.2.2 शून्य तन्यक) Zero Tension): स्थिति

आपण पाहिले आहे की जेव्हा विक्षिप्त संकुचित भार स्तंभावर कार्य करतो तेव्हा तो थेट तसेच वाकणारा प्रतिबल निर्माण करतो. **σ_o**> **σ_b** असल्यास परिणामी प्रतिबल संकुचित असते. जर **σ_o**= **σ_b** तर किमान प्रतिबल (**σ_{min}**) शून्य असेल आणि कमाल प्रतिबल 2**σ_o** असेल आणि प्रतिबलाचे वितरण संकुचित

असेल .परंतु $\sigma_0 < \sigma_b$असल्यास प्रतिबल अंशतः संकुचित आणि अंशतः तन्य असतो .ज्यामुळे संरचनेच्या पायथ्याशी एक लहान तन्य प्रतिबल भेग विकसित होऊ शकते .त्यामुळे शून्य तन्यक (Zero Tension) स्थितिसाठी, थेट प्रतिबल हे वकविणाऱ्या प्रतिबळपेक्षा अधिक किंवा बरोबरीचे असावे .

जसे की .:

$\sigma_0 \geq \sigma_b$

$\frac{P}{A} \geq \frac{M}{Z}$

$\frac{P}{A} \geq \frac{PXe}{Z}$

$\frac{1}{A} \geq \frac{e}{Z}$

$\frac{1}{A} \geq \frac{e}{Z}$

$e \leq \frac{Z}{A}$

म्हणजे,

शून्य तन्यक (Zero Tension) स्थितिसाठी, विक्षिप्तता Z/A पेक्षा कमी किंवा जास्तीत जास्त Z/A च्या बरोबरीची असावी.

विभाग मॉड्यूलस)Section Modulus):

तटस्था अक्षा भोवती जडत्वचे परिवलन आणि कडीच्या स्तरा पासूनचे तटस्थ (मोमेंट ऑफ इनर्शिया) .पर्यंतचे अंतर यांच्या गुणोतरास विभाग मॉड्यूलस असे म्हणतात अक्षा

Z_{xx} =X-X अक्षा भोवतीचे विभाग मॉड्यूलस $= \frac{I_{xx}}{y_{max}}$

Z_{YY} =Y-Y अक्षा भोवतीचे विभाग मॉड्यूलस $= \frac{I_{yy}}{y_{max}}$

5.3.1 विक्षिप्तपणाची मर्यादा (Limit of Eccentricity)

जेव्हा एखादा विलक्षण भार स्तंभावर कार्य करतो, तेव्हा तो थेट ताण तसेच वाकणारा ताण निर्माण करतो. तटस्थ अक्षाच्या एका बाजूला जास्तीत जास्त ताण असतो (थेट आणि वाकलेल्या ताणाच्या बेरजेइतका) आणि तटस्थ अक्षाच्या दुसऱ्या बाजूला किमान ताण असतो (थेट ताण वजा वाकण्याच्या ताणाच्या समान). थोडासा विचार केल्यास असे दिसून येईल की जोपर्यंत झुकणारा ताण थेट ताणापेक्षा कमी राहतो, परिणामी ताण संकुचित असतो. जर वाकणारा ताण थेट ताणाच्या बरोबरीचा असेल, तर एका बाजूला शून्य ताण असेल. परंतु जर वाकण्याचा ताण थेट ताणापेक्षा जास्त असेल तर एका बाजूला ताणतणाव असेल. जरी सिमेंट काँक्रीट एक लहान तन्य ताण घेऊ शकते, तरीही कोणत्याही ताणतणावात येऊ नये हे इष्ट आहे.

जर तन्य ताणाला परवानगी द्यायची नसेल, तर वाकणारा ताण थेट ताणापेक्षा कमी असावा किंवा जास्तीत जास्त, तो थेट ताणाच्या बरोबरीचा असावा.

$\boldsymbol{\sigma_b \leq \sigma_o}$

$\frac{PXe}{Z} \leq \frac{P}{A}$

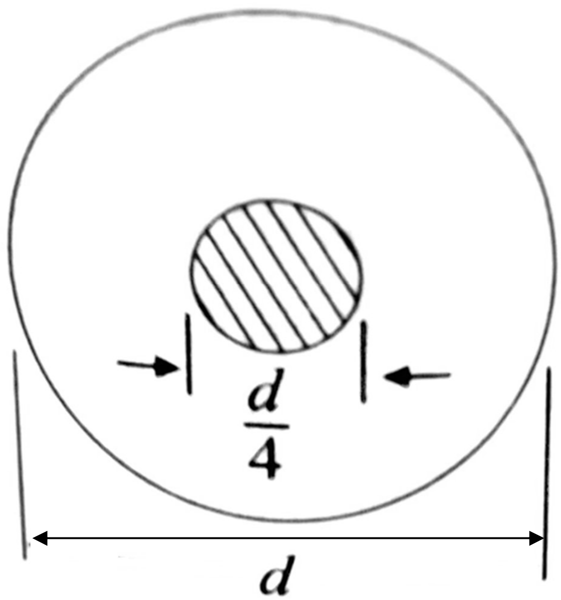
$\frac{1}{A} \geq \frac{e}{Z}$

$e \leq \frac{Z}{A}$

याचा अर्थ असा की कोणत्याही तन्य स्थितीसाठी, विक्षिप्तता $\frac{Z}{A}$ हि e इतकि किंवा e पेक्षा कमी असावी.

5.3.2 गोलाकार विभागासाठी विक्षिप्तपणाची मर्यादा (Limit of Eccentricity for circular section)

समजा आकृती 5.11 मध्ये दखवल्याप्रमाने गोलाकार विभाग ज्याचा व्यास d आणि Z= सेक्शन मॉड्यूलस आहे,



आकृती 5.11 : गोलाकार विभागासाठी विक्षिप्तपणाची मर्यादा

$\mathbf{Z} = \frac{\pi}{32} \times d^3$

$A = \frac{\pi}{4} \times d^2$

$e \leq \frac{Z}{A}$

$\leq \frac{\frac{\pi}{32} \text{ x d}}{\frac{\pi}{4}}$,

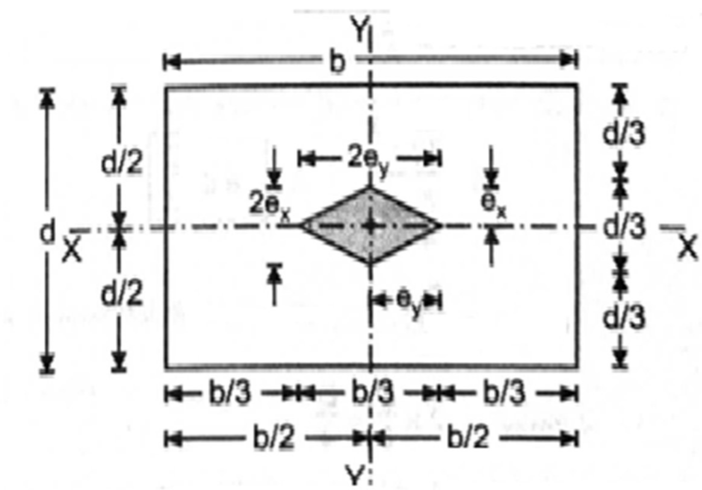
$e \leq \frac{d}{8}$

याचा अर्थ असा की, भार भौमितिक केंद्राच्या कोणत्याही बाजूला, d/8 च्या बरोबरीने, विलक्षण असू शकतोप्रकारे अशा ., आकृती 5.6 मधील ठिपके असलेल्या क्षेत्राद्वारे दर्शविल्याप्रमाणे, लोडच्या क्रियेची रेषा मुख्य वर्तुळाच्या एक चतुर्थांश व्यासाच्या वर्तुळात असेल, तर ताण संपूर्णपणे संकुचित होईल.

5.3.3 आयतकृती विभागा करिता मध्यस्थीचा तिसरा नियम (Middle third rule for rectangular section):

आकृती 5.12 मध्ये दिल्या प्रमाणे आपण आयताकृती विभाग विचारात घेऊ ज्याची लांबी b आणि जाडी d आहे .

म्हणून क्षेत्रफळ A=b X d



आकृती 5.12: आयताकृती विभागा करिता मध्यस्थीचा तिसरा नियम

$Z_{xx} = \frac{I_{xx}}{y_{max}}$

$Z_{xx} = \frac{\frac{bd^3}{12}}{\frac{d}{2}}, Z_{xx} = \frac{bd^2}{6}$

तसेच $Z_{yy} = \frac{I_{yy}}{y_{max}}$

$Z_{yy} = \frac{\frac{db^3}{12}}{\frac{b}{2}}, Z_{xx} = \frac{db^2}{6}$

अता शून्य तन्यक प्रतिबल स्थिति करिता वर भाघितल्या प्रमाणे :

$e_x \leq \frac{Z_{xx}}{A}$ आणि $e_y \leq \frac{Z_{yy}}{A}$

$e_x \leq \frac{\frac{bd^2}{6}}{bXd}$ आणि $e_y \leq \frac{\frac{db^2}{6}}{bXd}$

$e_x \leq \frac{d}{6}$ आणि $e_y \leq \frac{b}{6}$

म्हणून आकृती मध्ये दाखविल्या प्रमाणे जर भार हा मधल्या मूळ भागात म्हणजेच लंबी आणि रुंदी ल तीन भागत मध्ये विभाजित केल्यास मध्यल्या एकतृतीअंश भागा मध्ये जर भर कार्यान्वित केला तर आयतकृती विभागामध्ये कुठलेही तन्यक प्रतिबल येणार नाही अथवा त्या भागास शून्य तन्यक प्रतिबल विभाग म्हणता येईल आणि याच नियमास मध्यस्थीचा तिसरा नियम असे संबोधले जाते .

5.4 संकुचन मेम्बरची प्रस्तावना (Introduction to Compression Members)

संरचनात्मक (structural) घटकातील (members) काही घटकांवर फक्त दबावात Compressive) असणारे अक्षीय (Axial) भार (Load) दिलेले असतात. यामुळे अशा घटकांना स्ट्रट (Strut) असे म्हणतात. याप्रमाणे हे स्ट्रट (Strut) उभे, आडवे किंवा तिरपे देखील असू शकतात, याच बरोबर उभ्या असणाऱ्या स्ट्रट ()Strut) ला स्तंभ (Column) असे संबोधले जाते.

5.4.1 संकुचन (Compression) असणाऱ्या घटकाची (Member) संकल्पना

संकुचन असणारा घटक हा मुळात संरचनात्मक (structural) घटकातील (members) एक घटक (member) आहे, या घटकांवर फक्त संकुचन (Compressive) असणारे भार (Load) उचलेले (Carry) जातात.

जसेकी, स्तंभ (Column/Pillar), पीअर (Pier) या प्रकारच्या घटकांवर फक्त संकुचन (Compressive) असणारे भार (Load) उचलेले (Carry. जातात.

स्तंभ (Column)

पीअर (pier)

आकृती 5.13: स्तंभ (Column) व पीअर (pier)

1) **लहान स्तंभ (Short Column)-:**
2) जेव्हा प्रभावी लांबी (Effective Length) व कमीत कमी असणारी बाजूची लांबी (Least Lateral Dimension) यांचे गुणोत्तर (Ratio) हे १२ पेक्षा कमी येते तेव्हा त्या स्तंभास लहान स्तंभ म्हणून ओळखले जाते.
3) किंवा
4) जेव्हा कोणताही स्तंभ हा फक्त क्रशिंग भार किंवा थेट दबावामुळे (Direct Compression) मुळे तुटतो / अपयशी (fails) ठरतो अशा स्तंभास लहान स्तंभ म्हणून ओळखले जाते.

5) लांब स्तंभ (Long Column)-:

जेव्हा प्रभावी लांबी)Effective Length) व कमीत कमी असणारी बाजूची लांबी)Least Lateral Dimension) यांचे गुणोत्तर)Ratio) हे १२ पेक्षा जास्त येते तेव्हा त्या स्तंभास लांब स्तंभ म्हणून ओळखले जाते.

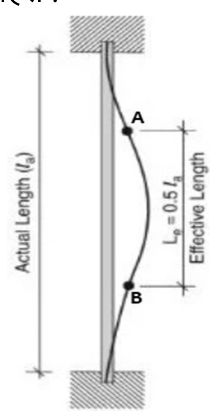
किंवा

जेव्हा कोणताही स्तंभ हा फक्त झुकण्यामुळे किंवा वाकण्यामुळेतुटतो) अपयशी /fails) ठरतो अशा स्तंभास लांब स्तंभ म्हणून ओळखले जाते.

5.4.2 प्रभावी लांबी() Effective Length):-

कोणत्याही स्तंभाची संरचनात्मकदृष्ट्या प्रभावी लांबी)Effective Lengthही त्या (स्तंभाची झुकलेल्या स्थतीतील असणाऱ्या पॉइंट ऑफ काँट्राफ्लेक्जर)Point of Contraflexureमधील लांबी (.असते

समजून घेण्या करीता सोबत दिलेल्या आकृति मध्ये पॉइंट A व B बघितले असता यांमधील दर्शवलेले अंतर ही प्रभावी लांबी म्हणून ओळखले जाते कारण पॉइंट A व B ही दोन्हीही पॉइंट ऑफ काँट्राफ्लेक्जर)Point of Contraflexure(आहेत .



आकृती 5.14: प्रभावी लांबी)Effective Length(

5.4.3 गिरकीची त्रिज्या (Radius of Gyration):-

ज्याबिंदुवर संपूर्ण वस्तूचे घटकाचे वस्तुमान केंद्रित आहे असे गृहित धरले जाते त्या बिंदूचे / परिभ्रमणाच्या)rotation)अक्षापासून)Axis)चे रेडियल अंतर हेगिरकीची त्रिज्या **(**Radius of gyration) म्हणून ओळखले जाते.

सूत्र-:

$$I = Ak^2$$

Therefore, $$k^2 = \frac{I}{A}$$

दोन्ही बाजूनचे वर्गमूळ घेऊन)Taking square root on both side(

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

तसेच आपल्याला k_{min}शोधायचे असल्यास वरील सूत्रात खालील प्रमाने बदल करावा .

$$k_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

जिथे ,

k_{min} -कमीत कमी गिरकीची त्रिज्या)Radius of Gyration (

I_{min}- कमीत कमी जडत्वाचा क्षण)Moment of Inertia (

A स्तंभाचे–क्रॉस सेक्शन)Cross Sectionक्षेत्रफळ (

5.4.4 स्लेंडरनेस गुणोत्तर (Slenderness Ratio) λ -:

विभागाच्या कमीत कमी गिरकीची त्रिज्या)least Radius of Gyration) तसेच स्तंभाच्या समतुल्य)Equivalent) किंवा असमर्थित)Unsupported) लांबीच्या गुणोत्तरास स्लेंडरनेस गुणोत्तर)Slenderness Ratio) असे संबोधले जाते.

$$\lambda = \frac{L_{eff.}}{k_{min}}$$

जिथे ,

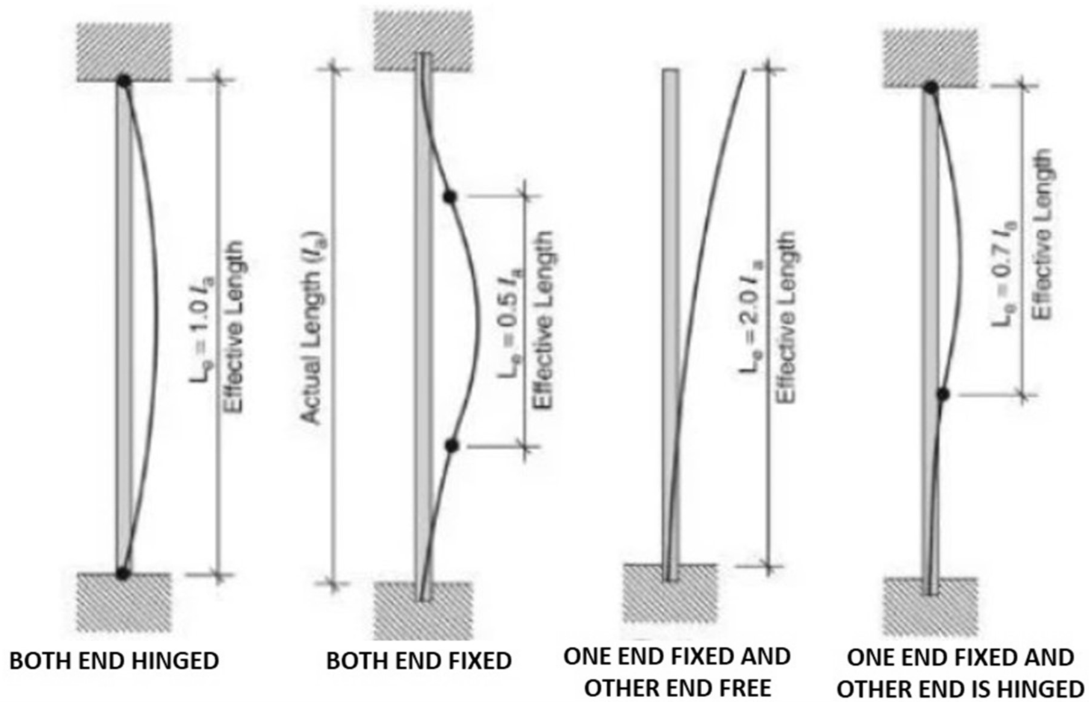
λ- स्लेंडरनेस गुणोत्तर (Slenderness Ratio)

k_{min} -कमीत कमी गिरकीची त्रिज्या)Radius of Gyration (

$L_{eff.}$ –स्तंभाची प्रभावी लांबी)Effective Length(

a) स्तंभाच्या समाप्तीच्या स्थिति (End Condition) चे प्रकार -:

1. दोन्ही टोके निश्चित असणे (Both end Fixed).
2. दोन्ही टोकांना बिजागर आधार (Hinged Support) असणे (Both end Hinged).
3. एक टोक निश्चित आहे आणि दुसऱ्या टोकास बिजागर आधार (Hinged Support) असणे(One end Fixed and another end Hinged).
4. एक टोक निश्चित आहे आणि दुसरे टोक खुले (free) असणे (One end Fixed and another end is free).



आकृती 5.15: स्तंभाच्या समाप्तीच्या स्थिति (End Condition)

1) दोन्ही टोकांना बिजागर आधार (Hinged Support) असणे **(Both end Hinged)**

2) इतर समाप्तीच्या परिस्थितीची प्रभावी लांबी या समाप्तीच्या प्रभावी अंतरावरून शोधली जाऊ शकते.

3) ही समाप्तीची स्थिती मानक समाप्ती स्थिति आहे. या स्थितीत प्रभावी लांबी स्तंभाच्या लांबीच्या समान आहे.
4) या स्थितीत, स्तंभाची दोन्ही टोके एकतर पिन केलेली, पिव्होटेड किंवा गोलाकार केलेली असतात.

le = L

जिथे , le = समतुल्य लांबी

L =वास्तविक लांबी

c) दोन्ही टोके निश्चित असणे (Both end Fixed)

1. स्तंभाच्या समतुल्य लांबीच्या घटाने स्तंभ भार घेण्याची क्षमता वाढते.
2. ही सर्वात मजबूत स्तंभ समाप्ती स्थिती आहे. दोन्ही टोकांच्या स्थिरांक स्तंभामध्ये जास्तीत जास्त भार असतो आणि या स्थितीसाठी प्रभावी लांबी एकूण स्तंभ लांबीच्या अर्धी मानली जाते.

le = $\frac{L}{2}$

जिथे , le = समतुल्य लांबी

L =वास्तविक लांबी

d) एक टोक निश्चित आहे आणि दुसऱ्या टोकास बिजागर आधार (Hinged Support) असणे(One end Fixed and another end Hinged)- :

या स्थितीत, स्तंभाचे एक टोक अधिक मजबूत असते, तर दुसरे टोक खूपच कमकुवत असतेया . ..टोकाची समतुल्य लांबी खालीलप्रमाणे आहे

le = $L/\sqrt{2}$

जिथे , le = समतुल्य लांबी

L =वास्तविक लांबी

e) एक टोक निश्चित आहे आणि दुसरे टोक खुले)free असणे ((One end Fixed and another end is free)-:

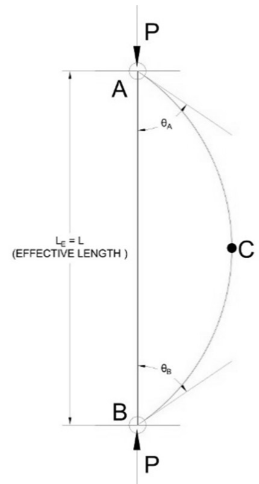
1. या शेवटच्या स्थितीमधील स्तंभांची इतर सर्व शेवटच्या स्थितींतिल स्तंभापेक्षा कमी भार सहन करन्याची क्षमता असते.
2. अशा स्थितीतील स्तंभ हे खूपच कमकुवत असतात.
3. एक टोक निश्चित (Fixed) आणि दुसरेखुले (Free) असताना, समान लांबी खालीलप्रमाणे आहे.

le= 2L

जिथे , le = समतुल्य लांबी

L =वास्तविक लांबी

अक्षीय भार दिलेल्या स्तंभाचे झुकणे)Buckling)



1. वरील आकृतीत दर्शवल्या प्रमाणे, बिंदु A व B या ठिकाणी स्तंभास बिजागर आधार दिलेला आहे व P या भारामुळे स्तंभ दर्शविल्या प्रमाणे A-B-C या आकरात झुकलेला दिसून येतो.
2. स्तंभावरील जास्तीत जास्त प्रतिबल (Stress) σ_{max}हा उच्चतम क्रशिंग प्रतिबल इतका वाढल्यामुळे आकृतीत दर्शवल्या प्रमाणे मध्यबिंदु C येथे मोडतो/ अपयशी ठरतो.
3. स्तंभाचे झुकणे हे स्तंभाच्या समाप्तीच्या स्थितीवर अवलंबून असते, आकृतीत दर्शविल्या प्रमाणे जेव्हा दोन्ही ही समाप्तीचे बिंदु हे बिजागर पद्धत्तीने दिलेले असतात तेव्हा Aव Bया दोन्ही बिंदूंवर विक्षेपण हा शून्य (Zero) असतो परंतु या बिंदूंवर विक्षेपण (deflected) वक्रावरचे (Curve) उतार (Slope) हे सर्वात जास्त असते.
4. A व B येथे बिंदूंवर विक्षेपण (deflected) वक्रावरचे (Curve) उतार (Slope) दर्शविलेल्या स्पर्शीका मधीलस्तंभाची उभी लांबी ही प्रभावी लांबी म्हणून ओळखली जाते.

5.5 ईलर्स थेअरी (Euler's Theory) -:

लांब स्तंभांच्या (Long Columns) स्थिरांकतेचा अभ्यास करण्याचा पहिला तर्कसंगत प्रयत्न ईलर्स (Euler's) यांनी केला होता.त्यांनी झुकणाऱ्या प्रतिबलावर (Bending Stress) आधारित लांब स्तंभांच्या वाकणाऱ्या (Buckling भारासाठी एक समीकरण तयार केले, हे समीकरण तयार करत असताना थेट प्रतिबलाचा (Direct Stress)परिणाम दुर्लक्षित केला गेला. हे यावरुण समजते की, लांब स्तंभात थेट प्रतिबल (Direct Stress)वाकण्याच्या प्रतिबलाच्या (Buckling Stress) तुलनेत नगण्य आहे.

याव्यतिरिक्त हे लक्षात घेतले जाऊ शकते की ईलर्स (Euler's) चे सूत्र लहान स्तंभाच्या बाबतीत वापरले जाऊ शकत नाही, कारण लहान स्तंभांच्या बाबतीत थेट प्रतिबल (Direct Stress) हा विचारात घ्यावा लागतोच आणि म्हणून तो दुर्लक्षित केला जाऊ शकत नाही. .

5.5.1 यूलर (Euler's) सिद्धांतामध्ये केलेली गृहीतक (Assumptions) :-

1) स्तंभ सुरुवातीला पूर्णपणे सरळ असेल आणि भार अक्षीयपणे लागू केला जाईल.
2) स्तंभाची सामग्री एकसंध आणि आयसेंट्रोपिक (Isotropic) असेल.

3) स्तंभ सामग्रीला त्याच्या लवचिक मर्यादेत ताण देणे आवश्यक आहे आणि म्हणून स्तंभ सामग्रीने हूकच्या नियमाचे पालन केले पाहिजे.
4) झुकणाऱ्या प्रतिबलच्या तुलनेत स्तंभामध्ये विकसित होणारा थेट प्रतिबल खूपच लहान असेल.
5) स्तंभाच्या इतर परिमाणांच्या तुलनेत स्तंभाची लांबी खूप मोठी असेल .
6) स्तंभ एकट्याने झुकल्याने तुटेलअयशस्वी होईल .
7) स्तंभाच्या संपूर्ण लांबीमध्ये स्तंभाचा क्रॉस.सेक्शन एकसमान राहील-

5.5.2 यूलर (Euler's) सिद्धांता मधीलमर्यादा (Limitations) :-

यूलरच्या सिद्धांतानुसार लांब स्तंभासाठी झुकणाऱ्या भाराची सामान्य अभिव्यक्ती दिली आहे,

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$ किंवा

$$\sigma = \frac{\pi^2 E}{(\frac{Le}{k})^2}$$

आम्हाला माहित आहे की, Le/k = slenderness ratio

1) वरील सूत्र फक्त लांब स्तंभांसाठी लागू केले आहे.
2) जसजसे स्लेंडरनेस गुणोत्तर कमी होते तसतसे क्रिपलींगप्रतिबलवाढतोपरिणामी स्लेंडरनेस . गुणोत्तर शून्यावर पोहोचल्यास, क्रिपलींगप्रतिबल अनंतापर्यंत पोहोचतो, जे व्यावहारिकदृष्ट्या शक्य नाही.
3) जर स्लेंडरनेस गुणोत्तर प्रमाण ठराविक मर्यादेपेक्षा कमी असेल, तर क्रिपलींगप्रतिबल हा क्रशिंग प्रतिबला पेक्षा जास्त असतो, जो व्यावहारिकदृष्ट्या शक्य नाहीत्यामुळे ., मर्यादीत मर्यादेपर्यंत ईलर्स (Euler's) सूत्र क्रशिंग प्रतिबलाच्या बरोबरीने क्रिपलींग प्रतिबलासाठी लागू आहे.

झुकणाऱ्या भाराची गणना करण्यासाठी ईलर्स(Euler's) च्या समीकरणाचा वापर -:

दोन्ही बाजूना बिजागर आधार (Hinged Support) असणाऱ्या तसेच अक्षीय भार असणाऱ्या L इतकी ऊंची असलेल्या लांब स्तंभा करिता ईलर्स (Euler's) यांनी झुकणाऱ्या भाराची (Buckling Load) किंवा क्रिपलींग भाराचीगणना करण्या करीता खालील प्रमाणे सूत्र तयार केले आहे .

$$P_E = \frac{\pi^2 E I_{min.}}{(L_E)^2}$$

जिथे ,

P_E = ईलर्स (Euler's) चा झुकणारा भार (Buckling Load)

Le = स्तंभाची प्रभावी लांबी (समाप्तीच्या स्थिति नुसार)

E =स्तंभाच्या साहित्या चा लवचिकतेचा मापांक

$I_{min.}$ विचारात घेतलेल्या स्तंभाच्या क्रॉस सेक्शन च्या आकारानुसार=I_{xx}किंवा I_{yy}या दोन्हीमधीलकमीत कमी जडत्वाचे परिबल)Moment of Inertia)

यानुसार,

$$P_E = \frac{\pi^2 E I_{min.}}{{L_E}^2}$$

$$P_E = \frac{\pi^2 E Ak^2}{{L_E}^2}$$

जसेकी, आपल्याला माहिती आहे $k = \sqrt{\frac{I}{A}})$ आणि $I = Ak^2$

$$P_E = \frac{\pi^2 EA}{\frac{L_E{}^2}{k^2}} = \frac{\pi^2 EA}{(\frac{L_E}{K})^2}$$

जसे की, आपल्याला माहिती आहे

Le =स्तंभाची प्रभावी लांबी (समाप्तीच्या स्थिति नुसार)

K= गिरकीची त्रिज्या (Radius of Gyration)

व $\lambda = \frac{L_{eff.}}{k}$

म्हणून

$$P_E = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2}$$

तसेच $\frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

σ_c = ₂ E 2 (कारण σ_c =PEA)

5.5.3 बकलिंग किंवा क्रिपलींग भार (Buckling or Crippling Load काढण्याकरिताचे (रँकाइन्स चे सूत्र व त्याचे उपयोजन

रँकाईनचे सूत्र (Rankine's formula): रँकाइनने एक सोपेसूत्र प्रस्तावित केले ज्या सूत्राचे नाव त्याच्या नावावर आहे. सूत्राची रचना इतकी कल्पक आहे की त्यामध्ये अगदी लहान ते खूप लांब स्ट्रट्स आणि स्तंभ पर्यंतच्या सर्व वेगवेगळे प्रकार समाविष्ट आहेत, जेणेकरून या सूत्राचा वापर करून लहान स्ट्रट्सच्या बाबतीत क्रिपलींग भार हा *Pc* म्हणून ऊल्लेखला जातो, आणिलांब स्तंभाच्या बाबतीत क्रिपलींग भार हा *Pe* ऊल्लेखला जातो.

रँकाईनचे सूत्रहे लांब स्तंभ तसेच लहान स्तंभ या दोन्ही करिता वापरण्यासाठी खालील पद्धत्तीचा वापर करून सोडवले आहे.

$$\frac{1}{P_R} = \frac{1}{P_C} + \frac{1}{P_E}$$

जिथे,

P_R =रँकाईन्सचे क्रशींग भार किंवा क्रिपलींग भार

P_c =क्रशींग भार =σ_c x A

P_E =ईलर्स (Euler's) चा गंभीर)Critical = भार ($\frac{\pi^2 E I_{min.}}{L_E{}^2}$)

लहान स्ट्रटसाठी, क्रशिंग भार हा Pc खालील प्रमाणे काढला जातो ,

$$P_R = P_c = \sigma_c \times A$$

जिथे,

f_c =ठिसूळ (Brittle) पदार्थांसाठी सामग्रीचा क्रशिंग प्रतिबल (Crushing Stress) आणि लवचिक (Ductile) पदार्थांसाठी दाबावामध्ये (Compression) उत्पन्नाचा प्रतिबल (yield Stress)

लांब स्तंभासाठी

वरील सूत्रामध्ये Pc हा स्थिरांक असतो, तसेच स्तंभांचीलांबी जास्त असताना Pe हा फार कमी होतो, त्यामुळे (1/Pe) चे मूल्य (Value) फार जास्त होते आणि त्यातुलनेत Pc चे मूल्य फार कमी होते आणी त्यामुळे Pc हा दुर्लक्षित केला जाऊ शकतो.

म्हणून,

$\frac{1}{P_R} = 0 + \frac{1}{P_E}$ त्यामुळे) $P_R = P_E$ असे समजू (

यावरुण असे लक्षात येते की,रँकाईन्सचे सूत्रहे लहान स्तंभ तसेच लांब स्तंभ या दोन्हींकरिता वापरले जाऊ शकते .

रँकाईन्सचे सूत्र (Rankine's formula),

$$\frac{1}{P_R} = \frac{1}{P_C} + \frac{1}{P_E} = \frac{P_C+P_E}{P_C x P_E}$$

म्हणून ,

$$P_R = \frac{P_C x P_E}{P_C + P_E} = \frac{P_C}{\frac{P_C}{P_E} + 1}$$

$$P_R = \frac{\sigma_C x A}{\left(\frac{\sigma_C x A}{\frac{\pi^2 E I_{min.}}{L_E{}^2}}\right) + 1}$$

कारण आपल्याला माहिती आहे, $P_C = \sigma_C xA$ आणि $P_E = \frac{\pi^2 E I_{min.}}{L_E{}^2}$

यावरुण आपण ,P_R ला सविस्तर पद्धतीने खालील प्रमाणे मांडू शकतो,

$$P_R = \frac{\sigma_C x A}{\left(\frac{\sigma_C x A x L_E{}^2}{\pi^2 E A k^2}\right) + 1}$$ सदरील सूत्रामध्ये) $I_{min.} = Ak^2$ चा वापर करून(

$$P_R = \frac{\sigma_C X A}{\left(\frac{\sigma_C}{\pi^2 E}\right)\left(\frac{L_E}{k}\right)^2 + 1}$$

म्हणून , $$P_R = \frac{\sigma_C X A}{1+\alpha\left(\frac{L_E}{k}\right)^2}$$

सदरील सूत्रामध्ये)$\alpha = \left(\frac{\sigma_C}{\pi^2 E}\right)$ चा वापररँकाईन्सचेस्थिरांक म्हणून वापरले जाते(

यामध्ये,

P_R =रँकाईन्सचे क्रशींग भार किंवा क्रिपलींग भार

Le = स्तंभाची प्रभावी लांबी (समाप्तीच्या स्थिति नुसार)

K = गिरकीची त्रिज्या (Radius of Gyration)

σ =अंतिम क्रशिंग प्रतिबल

A =क्रॉस सेक्शन चे क्षेत्रफळ

α =रँकाईन्सचे स्थिरांक =$\left(\frac{\sigma_C}{\pi^2 E}\right)$

संदर्भ

(Reference)

Suggested Learning Resources:

1. Khurmi R.S., Khurmi N., " Strength of Materials", S. Chand and Co. Ltd. New Delhi, 2019, ISBN 9789352833979
2. Ramamrutham S., "Strength of Materials", Dhanpat Rai and sons, New Delhi, 2015, ISBN 9788187433545
3. Punmia B. C., Ashok Kumar Jain , Arun Kumar Jain., "Mechanics of Materials", Laxmi Publications (p) Ltd. New Delhi, 2017, ISBN-13: 978-8131
4. Rattan S.S., "Strength of Materials", McGraw Hill Education; New Delhi 2017, ISBN-13: 978-9385965517

Learning Website:

1. nptel.ac.in/courses/112107146/lects%20&%20picts/…/lecture30%20&%2031.htm
2. www.nptel.ac.in/courses/105101085/downloads/lec-32.pdf
3. www.facweb.iitkgp.ernet.in/~baidurya/ce21004/online_lecture_notes/m2112.pdf
4. https://n.wikipedia.org/wiki/theorem_of_three_moments