महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई

(स्वायत्व)(ISO 9001:2015) (ISO/IEC 27001:2013)

अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञान पदविका

शिक्षण पुस्तिका

(Learning Material)

ENGINEERING MECHANICS

(312312)

स्थापत्य अभियांत्रिकी गट

मराठी-इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम

(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानातील दुसरे सत्र पदविका)

शिक्षण पुस्तिका

(Learning Material)

अभियांत्रिकी यांत्रिकी
ENGINEERING MECHANICS

(३१२३१२)

स्थापत्य अभियांत्रिकी गट

मराठी-इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम

(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञानातील दुसरे सत्र पदविका)

महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ, मुंबई
(स्वायत्त) (ISO ९००१:२०१५) (ISO/IEC २७००१:२०१३)

312312

मार्गदर्शक

डॉ. आघाव राजेश त्र्यंबकराव
उपयोजित यंत्रशास्त्र विभाग

लेखक

जाधव विकास आबासाहेब
अधिव्याख्याता, स्थापत्य अभियांत्रिकी

नागरगोजे साधू बाजीराव
अधिव्याख्याता, स्थापत्य अभियांत्रिकी

मोरे महेश रमेशराव
विभाग प्रमुख, स्थापत्य अभियांत्रिकी

गोरे राजेंद्र हौशीराम
अधिव्याख्याता, स्थापत्य अभियांत्रिकी

महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ

(स्वायत्त) (ISO: ९००१:२०१५) (ISO/IES: २७००१-२०१३)

शासकीय तंत्रनिकेतन इमारत, चौथा मजला, ४९, खेरवाडी, बांद्रा (पूर्व), मुंबई - ४०० ०५१.

दूरध्वनी क्र.: ०२२-६२५४२१७० / १६१

Email : director@msbte.com Web : www.msbte.org.in

प्रास्ताविक

महाराष्ट्र राज्यातील पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षणामध्ये विद्यार्थ्यांचे रोजगार कौशल्य विकसित करून विद्यार्थ्यांचा सर्वांगीण विकास घडवून आणण्याकरिता महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ कटिबद्ध आहे. उद्योगधंद्यातील बदलत्या तंत्रज्ञानाशी संबंधित गरजा लक्षात घेऊन महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाकडून पदविका अभ्यासक्रम वेळोवेळी अद्यावत करण्यात येतो . अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रम शिकत असतांना संकल्पनात्मक ज्ञान, सुसंगत संदर्भ, प्रश्न विचारणे, विश्वसनिय पुरावे, कारणमीमांसा आणि सुस्पष्ट निकष यांचा वापर करून अर्थाची उकल करण्याची, विश्लेषण व मूल्यमापन करण्याची तसेच तर्काने अनुमान काढण्याची क्षमता म्हणजेच चिकित्सक विचार विद्यार्थ्यांमध्ये अधिक दृढ होतील असा मला विश्वास आहे. जेव्हा विद्यार्थी ज्ञान मिळवण्याच्या माध्यमाशी पूर्णपणे परिचित आणि सोयीस्कर असतात, तेव्हा त्यांच्यासाठी वर्गातील चर्चेत भाग घेणे सोपे होते, संकल्पनात्मक व सैद्धांतिक बाबींचे आकलन परिपूर्ण होते, संज्ञानात्मक क्षमता सुधारते आणि त्यांचा आत्मविश्वास देखील वाढतो या सर्व गोष्टींचा विचार करून मंडळाकडून शैक्षणिक सामुग्रीची निर्मिती करण्यात आलेली आहे . भारत देश हा खेड्यापाड्यातून विकसित झालेला देश असून ग्रामीण भागातील विद्यार्थ्यांना तांत्रिक शिक्षण घेतांना भाषेचा अडसर न येता तांत्रिक बाबींचा आशय समजून घेणे शक्य होईल या दृष्टिकोनातून महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाने पदविका स्तरावरील तांत्रिक शिक्षणाकरीता विद्यार्थ्यांना मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय शैक्षणिक वर्ष २०२१-२२ पासून उपलब्ध करून दिलेला आहे .

राष्ट्रीय शैक्षणिक धोरण-२०२० प्रादेशिक भाषेतील शिक्षणास प्रोत्साहन देते, ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना तांत्रिक अभ्यासक्रमांसाठी प्रादेशिक भाषांतुन शिक्षणाचे माध्यम निवडता येते. सदर धोरणामुळे प्रादेशिक भाषांमध्ये तांत्रिक सामग्री आणि अभ्यास सामग्रीचा विकास आणि भाषांतर निर्माण करण्याची आवश्यकता आहे . त्यास अनुसरून मंडळाने मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय द्वितीय व तृतीय वर्षाकरिताही उपलब्ध करून देण्यात आला आहे. तसेच त्याकरिताची शैक्षणिक सामग्रीही संबंधीत भागधारकरांना उपलब्ध करून देण्यात येत आहे.

पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षण अधिक दर्जेदार करण्यासाठी महाराष्ट्रातील अनुभवी व तज्ञ अध्यापकांनी व्यवहारिक मराठी भाषा व इंग्रजी भाषेतील तांत्रिक शब्दावली यांचा वापर करून मराठी - इंग्रजी भाषेचा सुवर्णमध्य साधण्याचा प्रयत्न केलेला आहे. मंडळाच्या स्तरावर गठीत सुकाणू समितीमार्फत सदर शैक्षणिक सामुग्रीचा दर्जा, तसेच इतर बाबींची तपासणी करण्यात आलेली आहे. त्यामुळे सदर शैक्षणिक सामुग्री अधिक सम्पन्न झालेली असून विद्यार्थी त्यांच्या व्यक्तिमत्त्वाचा सुसंवादी आणि सर्वांगीण विकास साधतील. परिणामतः विश्वस्तरीय मनुष्यबळाच्या गरजा पूर्ण करण्यात महाराष्ट्र राज्य अग्रेसर राहील व पर्यायाने राष्ट्रनिर्मिती करीता निश्चितच हातभार लागेल , असा मला विश्वास आहे.

अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रमातील प्रमुख विषयांची मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक शैक्षणिक सामुग्री बनविण्यासाठी अध्यापक व सुकाणू समितीचे सदस्य यांनी दर्शविलेले समर्पण व वचनबद्धता कौतुकास पात्र आहे , या सर्वांचे मी मनः पूवक अभिनंदन करतो !

(प्रमोद नाईक)
संचालक
म. रा. तंत्र शिक्षण मंडळ, मुंबई.

अनुक्रमणिका

अ. क्र	घटकाचे नाव	पान क्र
1.	उचलण्याचे साधे यंत्र (Simple lifting machine)	1-49
2.	बलांचे विश्लेषण (Analysis of Forces)	50-91
3.	बलांचा समतोल (Equilibrium of Forces)	92 - 125
4.	बलांचे घर्षण (Friction of Forces)	126 - 166
5.	केंद्रक आणि गुरुत्वाकर्षण केंद्रक (Centroid and Centre of Gravity)	167 - 199

घटक-1

उचलण्याचे साधे यंत्र (लिफ्टिंग मशीन)

(Simple Lifting Machine)

विषय निष्पत्ती: (Course Outcome) : दिलेल्या लोडिंग स्थितीनुसार योग्य मशीन निवडा.

घटक निष्पत्ती : (Unit Outcome):

- मशीनच्या कार्यक्षमतेवर आधारित मशीनचा प्रकार ओळखा.
- दिलेल्या साध्या लिफ्टिंग मशीनद्वारे आवश्यक प्रयत्नांची आणि लोडची गणना करा.
- दिलेल्या लोडिंगसाठी मशीनच्या कायद्याची (Law of Machine) पडताळणी करा.
- वेगवेगळ्या वेगाच्या गुणोत्तरासह दिलेल्या मशीनसाठी कार्यक्षमतेसह आवश्यक एफर्ट (Efforts) निश्चित करा.

1.1 साध्या लिफ्टिंग मशीनची संकल्पना

एखादे असे उपकरण जे यांत्रिक शक्तीचा वापर करते, तसेच ते अनेक भागांपासून बनवलेले असते व प्रत्येक भागाचे एक निश्चित कार्य असते व सर्व भाग एकत्रितपणे एक विशिष्ट कार्य करते, त्याला मशीन असे म्हणतात.

उदाहरण: शिलाई मशीन, स्क्रू जॅक, प्रिंटिंग मशीन, लेथ मशीन, CNC मशीन इ.

लिफ्टिंग मशीन' ही लोड (Load) उचलण्यासाठी वापरली जातात. मशीनच्या एका बिंदूवर एफर्ट (Effort) (P) लागू केला जातो आणि मशीनच्या दुसऱ्या बिंदूवर लोड (Load) (W) उचलला जातो.

मशीन खालील दोन प्रकारची असू शकतात:

1. साधी मशीन (Simple)
2. कंपाऊंड मशीन (Compound)

साधे मशीन

या प्रकारच्या मशीनमध्ये एफर्ट (Effort) देण्यासाठी फक्त एक बिंदू आणि लोडसाठी (Load) एक बिंदू असतो. हि एक साधी यंत्रणा आहे. उदाहरणे: लीव्हर, स्क्रू जॅक इ.

कंपाऊंड मशीन

या प्रकारच्या मशीनमध्ये एफर्ट (Effort) देण्यासाठी आणि लोडसाठी (Load) एकापेक्षा जास्त बिंदू असतात. हि एक कंपाऊंड किंवा क्लिष्ट (Complicated) यंत्रणा आहे. उदाहरणेः प्रिंटिंग मशीन, लेथ मशीन, मिलिंग मशीन इ.

1.1.1 महत्वाच्या व्याख्या

लोड Load (W)

एफर्ट / जोर लावून उचलले जाणारे वजन म्हणजे लोड म्हणतात. हे 'डब्ल्यू' (W) अक्षराने दर्शविले जाते. लोडचे एकक न्यूटन (N) किंवा किलो-न्यूटन (kN) आहे.

एफर्ट Effort (P)

लोड (Load) उचलण्यासाठी आवश्यक बलाचा वापर केला जातो त्याला एफर्ट (Effort) म्हणतात. हे 'P' अक्षराने दर्शविले जाते. एफर्टचे एकक न्यूटन (N) किंवा किलो-न्यूटन (kN) आहे.

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज (Mechanical Advantage) (M.A)

आपण उचललेला लोड (W) व लागू केलेले एफर्ट (P) यांच्या गुणोत्तराला मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज म्हणतात.

$$\text{मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज} = \frac{\text{उचललेला लोड (W)}}{\text{लावलेला एफर्ट (P)}}$$

$$\text{MA} = \frac{W}{P}$$

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेजला एकक नाही.

वेग गुणोत्तर (Velocity Ratio) V.R

एफर्टचे (Effort) हललेले अंतर व लोडचे (Load) हललेले अंतर यांच्या गुणोत्तरास वेग गुणोत्तर असे म्हणतात.

$$\text{वेग गुणोत्तर} = \frac{\text{एफर्टचे (Effort) हललेले अंतर (y)}}{\text{लोडचे (Load) हललेले अंतर (x)}}$$

$$VR = \frac{Y}{X}$$

वेग गुणोत्तराला एकक नसते.

मशीनचे इनपुट (Machine Input):

हे मशीनवर केलेले कार्य आहे. लिफ्टिंग मशीनमध्ये इनपुट पुढीलप्रमाणे मोजले जाते.

मशीनचे इनपुट = एफर्ट (P) x एफर्टचे हललेले अंतर (y)

मशीनचे इनपुट = P x y

येथे P = एफर्ट (Effort) आणि y = एफर्टचे हललेले अंतर

मशीनचे आउटपुट (Machine Output)

हे मशीनद्वारे केलेले प्रत्यक्ष कार्य आहे.

मशीनचे आउटपुट = लोड (W) × लोडचे हललेले अंतर (x)

मशीनचे आउटपुट = W x x

येथे

W = लोड x = लोड चे हललेले अंतर

मशीनची कार्यक्षमता (Machine Efficiency):

मशीनच्या आउटपुट व इनपुट यांच्या गुणोत्तराला मशीनची कार्यक्षमता असे म्हणतात.

$$n = \frac{\text{आउटपुट}}{\text{इनपुट}}$$

हे साधारणतः टक्केवारी % च्या स्वरूपात दाखविले जाते.

1.1.2 रिव्हर्सिबल मशीन

जेव्हा मशीनवरील एफर्ट (P) पूर्णपणे काढून टाकला जातो व मशीन फक्त त्याच्या लोडमुळे उलट दिशेने काम करण्यास सक्षम असते तेव्हा त्या मशीनला रिव्हर्सिबल मशीन म्हटले जाते. ज्या वेळेस एफर्ट पूर्णपणे काढून टाकला जातो, तेव्हा लोडवर केलेले कार्य आउटपुट ऐवजी इनपुट होईल व इथे इनपुट हे घर्षण नुकसानीच्या (Frictional Loss) बरोबर असेल.

1.1.3 नॉन रिव्हर्सिबल मशीन / अपरिवर्तनीय किंवा सेल्फ लॉकिंग मशीन (Non-reversible/irreversible or self-locking machine)

जेव्हा मशीनवरील एफर्ट (P) पूर्णपणे काढून टाकल्यानंतर सुद्धा मशीन उलट्या दिशेने काम करण्यास सक्षम नसते. तेव्हा त्या मशीनला नॉन रिव्हर्सिबल मशीन / अपरिवर्तनीय किंवा सेल्फ लॉकिंग मशीन म्हणतात. मशीन नॉन रिव्हर्सिबल असण्याची अट एकच ती म्हणजे त्याची कार्यक्षमता 50% पेक्षा जास्त नसावी.

$$\eta < 50\%$$

1.2.1 आदर्श मशीन. (आयडियल) (Ideal Machine)

मशीनची कार्यक्षमता 100% असल्यास त्यास आदर्श म्हणजेच आयडियल मशीन असेम्हटले जाते.या ठिकाणी, आउटपुट हे इनपुटच्या बरोबरीचे आहे. आदर्श (आयडियल) मशीनची वैशिष्ट्येः

1. कार्यक्षमता 100% आहे
2. आउटपुट = इनपुट
3. घर्षण (Friction) शून्य आहे
4. M.A = V.R

1.2.2 मशीनमधील घर्षणाची संकल्पना (Concept of friction)

मशीनला आपण जेवढे इनपुट देतो त्यापैकी काही इनपुट चे लॉस (Loss) प्रत्येक मशीनमध्ये होत असते. आणि बहुतेक वेळा हा लॉस (Loss) घर्षणामुळे होतो. हे ठरवण्याचा एक मार्ग म्हणजे मशीनची कार्यक्षमता मोजणे. घर्षणामुळे होणारे लॉस खालील पद्धतीने सुद्धा दाखवता येते.

एफर्ट (P) चा होणारा लॉस

लोड (W) उचलण्यामध्ये होणारा लॉस

समजा,

P = लोड उचलण्यासाठी प्रत्यक्ष लागलेला एफर्ट (मशीनचे घर्षण लक्षात घेऊन) न्यूटन मध्ये (N)

Pi = आयडियल एफर्ट (मशीन घर्षण लक्षात न घेता) न्यूटन मध्ये (N)

W = प्रत्यक्ष उचललेला लोड (मशीनचे घर्षण लक्षात घेऊन) न्यूटन मध्ये (N)

Wi = उचललेला आयडियल लोड (मशीन घर्षण लक्षात न घेता) न्यूटन मध्ये (N)

P_f = घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस न्यूटन मध्ये (N) (Loss of effort due to Friction)

W_f = घर्षण झाल्यामुळे लोड चा झालेला लॉस न्यूटन मध्ये (N) (Loss of Load due to Friction)

घर्षणामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस (P_f)

$P_f = P - P_i$ ....(1)

घर्षणामुळे लोड चा झालेला लॉस (W_f)

$W_f = W_i - W$ ....(2)

आता आपण P_i, ची किंमत काढूया त्यासाठी आपण एक आयडियल मशीन मानूया. आपल्याला माहीत आहे कि आयडियल मशीनची कार्यक्षमता $\eta = 1$.

$\eta = \frac{M.A}{V.R}$

M.A. = $\eta \times$ V.R

$\frac{W}{P_i}$= 1 x V.R

$P_i = \frac{W}{V.R}$ ……………………….(3)

समीकरण (3) मधील P_iची किंमत समीकरण (1) मध्ये टाका

$P_f = P - \frac{W}{V.R}$ ………………..(4)

आता आपण W_iची किंमत काढूया. त्यासाठी आपण पुन्हा एक आयडियल मशीन मानूया आपल्याला माहीत आहे कि आयडियल मशीनची कार्यक्षमता η = 1.

$\eta = \frac{M.A}{V.R}$

M.A = η X V.R

$\frac{W_i}{P}$ = 1 X V.R

W_i= P X V.R ………………. (5)

समीकरण (5) मधील W_iची किंमत समीकरण (2) मध्ये टाका

W_f = P X V.R – W ………………. (6)

1.2.3 आयडियलएफर्ट (Ideal Efforts)

हा एफर्ट (P) आहे जो मशीनच्या 100% कार्यक्षमतेवर (म्हणजे घर्षण नसताना) भार W उचलतो.

घर्षण नसल्यास, आयडियल मशीनआहे

M.A = V.R

$\frac{W}{P_i}$ = V.R

$P_i = \frac{W}{V.R}$

भार उचलण्यासाठी, वास्तविक एफर्ट (P) नेहमी आदर्श एफर्टपेक्षा जास्त पाहिजे (Pi), $P > P_i$

1.2.4 आयडियल लोड (Ideal Load)

(W_i) हा भार आहे जो P एफर्ट ने उचलला जाऊ शकतो. आदर्श मशीनसाठी, कोणतेही घर्षण नसते.

M.A = V.R

$\frac{W_i}{P}$ = V.R

$W_i = P \times V.R$

दिलेल्या एफर्टसाठी, घर्षण लॉस मुळे वास्तविकलोड नेहमीआयडियल लोडपेक्षा कमी असतो.

1.2.5 घर्षणात लॉस झालेला लोड आणि घर्षणात लॉस झालेला एफर्ट

आदर्श मशीनसाठी, कार्यक्षमता 100% आहे, म्हणजे, कोणतेही घर्षण अस्तित्वात नाही. परंतु व्यवहारात प्रत्येक यंत्रामध्ये नेहमी काही प्रमाणात घर्षण असते. त्यामुळे, भार उचलण्यासाठी आवश्यक असलेला वास्तविक एफर्ट हा आयडियल एफर्ट पेक्षा नेहमीच मोठा असतो.

$$P > P_i$$

घर्षणात लॉस झालेला एफर्ट

घर्षणात लॉस झालेला एफर्ट r $(P_f) = P - P_i$

घर्षणात लॉस झालेला एफर्ट r $(P_f) = P - \frac{W}{V.R}$

त्याचप्रमाणे, दिलेल्या एफर्ट साठी घर्षणामुळे, वास्तविक लोड उचलला जातो तो नेहमी आयडियल लोड पेक्षा कमी असतो, म्हणजे, $W_i > W$

घर्षणात लॉस झालेला लोड

घर्षणात लॉस झालेला लोड $(W_f) = W_i - W$

घर्षणात लॉस झालेला लोड $(W_f) = P \times V.R - W$

1.2.6 मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज $= \frac{W}{P}$ ………………(1)

eq 1 मध्ये p चे बदली मूल्य ठेवा$P = m\,W + C$

$$M.A = \frac{W}{mW+C}$$

$$M.A = \frac{1}{m+\frac{C}{W}}$$

i.e. $\left(m + \frac{C}{W}\right)$

M.A तेव्हा जास्तीत जास्त असेल $\frac{C}{W} = 0$

$\frac{C}{W} = 0$ eq मध्ये ठेवा (2)

$$M.A = \frac{1}{m}$$

मशीनची कमाल कार्यक्षमता

$\eta = \frac{M.A}{V.R}$

$\eta = \frac{\text{कमाल } M.A}{V.R} = \frac{\frac{1}{m}}{V.R} = \eta = \frac{1}{m\ X\ V.R}$

% **कमाल** $\eta = \frac{1}{m\ X\ V.R} X1$

उदाहरण

उदाहरण क्र. 01 - एका लिफ्टिंग मशीनमध्ये 120 N चा लोड 5 cm अंतराने हलवला जातो, जेव्हा P एवढा एफर्ट 70 cm अंतरावरून लावला जातो. जर मशीनची कार्यक्षमता 60% असेल तेव्हा P ची किंमत शोधा.

उत्तर-

उचललेला लोड (W) = 120 N

एफर्टचे हललेले अंतर (y) = 70 cm

लोडचे हललेले अंतर (x) = 5 cm

कार्यक्षमता (η) = 60

P ची किंमत = ?

आपल्याला माहित आहे कि

(i) मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A= $\frac{W}{P} = \frac{120}{P}$

(ii) वेग गुणोत्तर V.R = $\frac{y}{x} = \frac{70}{5} = 14$

(iii) कार्यक्षमता (η%) = $\frac{M.A}{V.R}$ X 100

$$(\eta\%) = \frac{\frac{120}{P}}{14} X\ 100$$

$$(\eta\%) = \frac{120}{P\ X 14} X\ 100$$

$$P = \frac{120}{\eta\%\ X 14} X\ 100$$

$$P = \frac{120}{60\ X\ 14} X\ 100$$

P = 14.29 N

उदाहरण क्र. 02: एका मशीनने 220mm च्या अंतराने 410 N चा लोड उचलला. या प्रक्रियेदरम्यान 67 N चा एफर्ट 1.9 m ने हलवला गेला. शोधा

(1) वेग गुणोत्तर

(ii) मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज

(iii) घर्षणाचा परिणाम

(iv) कार्यक्षमता

उत्तर-

उचललेला लोड, W= 410 N

लावलेला एफर्ट P = 67 N

एफर्टचे हललेले अंतर, y=1.9 m =1900 mm .... (1m=1000mm)

लोडचे हललेले अंतर, x=220 mm

i. मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज, M.A= $\frac{W}{P}$

$M.A = \frac{410}{67}$

M.A= 6.119

ii. वेग गुणोत्तर $V.R = \frac{y}{x} = \frac{1900}{220} = 8.636$

iii. कार्यक्षमता $(\eta\%) = \frac{M.A}{V.R} X\ 100$

$(\eta\%) = \frac{6.119}{8.636} X\ 100$

$(\eta\%) = 70.85\%$

iv. घर्षणाचा परिणाम (Effect of friction) =?

आपल्याला माहित आहे कि,

घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस (P_f)

$P_f = P - \frac{W}{V.R}$

$P_f = 67 - \frac{410}{8.363}$

$P_f = 19.52$ N

घर्षण झाल्यामुळे लोड चा झालेला लॉस (W)

$W_f = P\ X\ V.R - W$

$W_f = 67\ X\ 8.636 - 410$

$W_f = 168.612$ N

उदाहरण क्र. 03:एका लिफ्टिंग मशीनमध्ये 20 N च्या एफर्ट मुळे 900 N चा लोड उचलला गेला. जर मशीनची कार्यक्षमता 52% असेल तर मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज व वेग गुणोत्तर शोधा.

उत्तर-

उचललेला लोड. W = 900 N

लावलेला एफर्ट.P = 20 N

कार्यक्षमता η = 52%

(i) मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A= $\frac{W}{P} = \frac{900}{20}$ = 45 N

(ii) वेग गुणोत्तर V.R = ?

आपल्याला माहित आहे कि,

$$\eta\ \% = \frac{M.A}{V.R} \text{ X } 100$$

$$V.R = \frac{M.A}{\eta\ \%} \text{ X } 100$$

$$V.R = \frac{45}{52} \text{ X } 100$$

V.R = 86.538 N

उदाहरण क्र. 04:एका लिफ्टिंग मशीनमध्ये 21 N च्या एफर्ट मुळे 800 N चा लोड उचलला गेला असेल तर मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज किती असेल? या मशीनची कार्यक्षमता 62% असल्यास वेग गुणोत्तर (V.R) शोधा.

उत्तर-

कार्यक्षमता = 62%.

उचललेला लोड, W= 800 N

लावलेला एफर्ट, P=21 N

i. मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A. = $\frac{W}{P}$

$$M.A = \frac{800}{21}$$

M.A = 38.09 N

ii. वेग गुणोत्तर V.R = ?

आपल्याला माहित आहे कि,

$$\eta\ \% = \frac{M.A}{V.R} X\ 100$$

$$V.R = \frac{M.A}{\eta\ \%} X\ 100$$

$$V.R = \frac{38.09}{62} X\ 100$$

V.R = 61.44 N

उदाहरण क्र. 05:एका लिफ्टिंग मशीनमध्ये, 22 N आणि 32 N लोड उचलण्यासाठी अनुक्रमे 6 N आणि 7 N एवढा एफर्ट लावला गेला. जर मशीनचा वेग गुणोत्तर (V.R) 20 असेल तर खालील बाबी निश्चित (Determine) करा.

(i) मशीनचा नियम

(ii) 22 N आणि 32 N च्या लोड संबंधित कार्यक्षमता

(iii) दोन्ही प्रकरणांमध्ये घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस (Effort lost in friction)

(iv) या मशिनकडून तुम्हाला जास्तीत जास्त किती कार्यक्षमता अपेक्षित आहे. (Maximum efficiency)

उत्तर-

(1) मशीनचा नियम (Law of the machine) = ?

मशीनचा नियम

$P=mW+C$

जेथे P = लावलेला एफर्ट

W = उचललेला लोड 'm' आणि 'C' हे दोन स्थिरांक आहेत.

आता, जेव्हा W = 22 N   P= 6 N

जेव्हा W = 32 N   P= 7 N

ह्या किमती मशीनच्या नियमात टाकूया

$6 = 22\ m + C$ …….(i)

$7 = 32\ m + C$ …….(ii)

समीकरण (i) हे समीकरण (ii) मधून वजा करूया

$7 = 32\ m + C$ …….(ii)

$\underline{6 = 22\ m + C}$ …….(i)

$1 = 10\ m$

$m=\frac{1}{10}$

$m=0.1$

m=0.1 हि किंमत समीकरण (i) मध्ये टाकूया, मग आपल्याला मिळेल

$6 = 22 \times 0.1 + C$

C = 3.8

अशाप्रकारे मशीनचा नियम खालीलप्रमाणे तयार होईल

P = (0.1 W + 3.5) N

i. कार्यक्षमता ?

जेव्हा, W=22 N and P= 6 N

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज, M.A = $\frac{W}{P}$

M.A = $\frac{22}{6}$

M.A = 3.67

आपल्याला दिलेले आहे कि, वेग गुणोत्तर V.R = 20

η % = $\frac{M.A}{V.R}$ X 100

η % = $\frac{3.67}{20}$ X 100

η = 18.33 %

जेव्हा, W=32 N and P= 7 N

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज, M.A = $\frac{W}{P}$

M.A = $\frac{32}{7}$

M.A = 4.57

आपल्याला दिलेले आहे कि, वेग गुणोत्तर V.R = 20

η % = $\frac{M.A}{V.R}$ X 100

$\eta\ \% = \frac{4.57}{20}$ X 100

η = 22.85 %

ii. घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चे झालेले लॉस (Effort lost in friction) =?

जेव्हा,

W = 22 N, P =6N

घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चे झालेले लॉस (P_f)

$P_f = P - \frac{W}{V.R}$

$P_f = 6 - \frac{22}{20}$

P_f = 4.9 N

जेव्हा,

W = 32 N, P = 7 N

घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चे झालेले लॉस (P_f)

$P_f = P - \frac{W}{V.R}$

$P_f = 7 - \frac{32}{20}$

P_f = 5.4 N

iii. जास्तीत जास्त कार्यक्षमता (Maximum efficiency) = ?

मशीनची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता

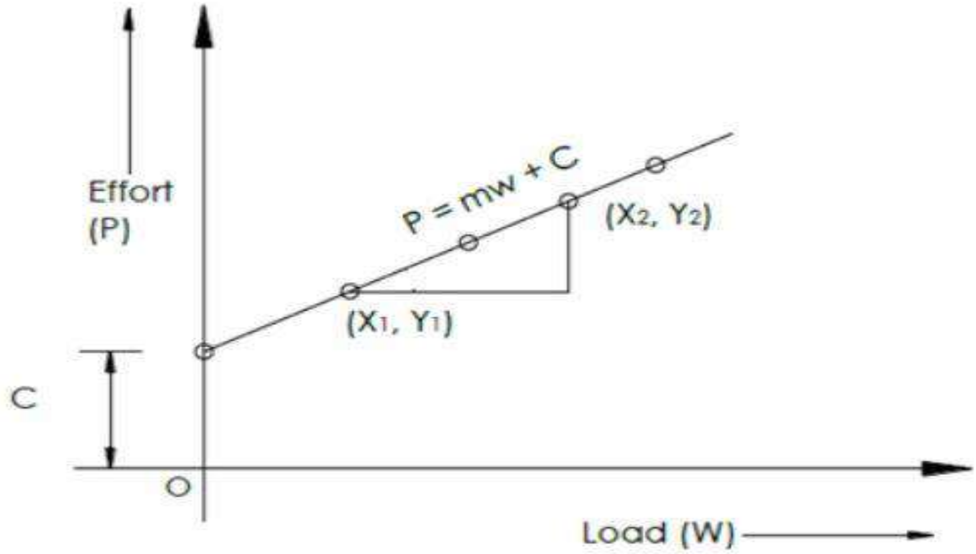
$\eta = \frac{1}{m\ X\ V.R}$ X 100

η = 50%

1.3आलेख (GRAPHS)

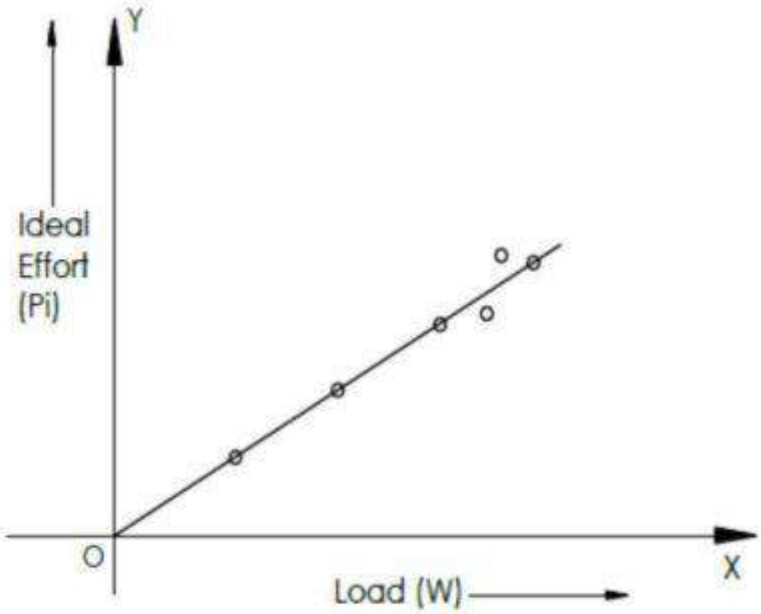
1.3.1 लोड v/s एफर्ट (Load v/s Effort)

लोड v/s एफर्ट चा आलेख हा एक सरळ रेषा आहे, जी y-axis ला 'C' इंटरसेप्ट देऊन कट करते जे शून्य लोड ला घर्षणामुळे झालेले एफर्टचे लॉस दर्शविते.



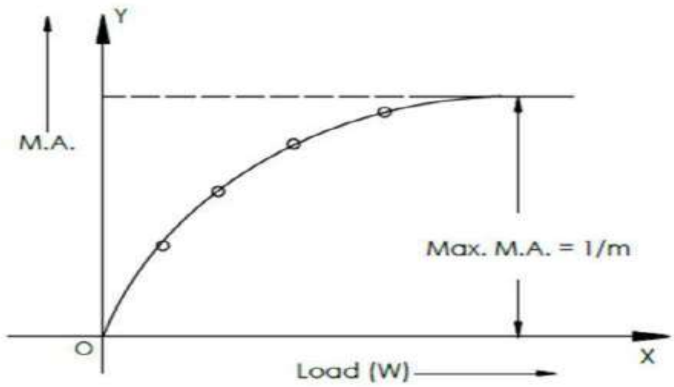
1.3.2 लोड v/s आयडिअल एफर्टचा

लोड v/s आयडिअल एफर्टचा आलेख आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे मूळबिंदू मधून जाणारी सरळ रेषा आहे.



1.3.3. लोड v/s मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज

लोड v/s मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज चा आलेख हा वक्र आहे आणि तो आकृती 2.12 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे वक्र आहे. जसजसा लोड वाढतो तसतसा मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज देखील वाढतो आणि म्हणून हळूहळू वाढत्या वक्रला (Curve) गुळगुळीत (Smooth) करते.

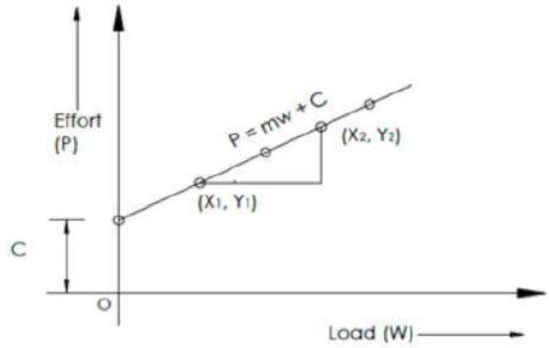


1.3.4. लोड v/s टक्केवारी कार्यक्षमता

लोड v/s % काSर्यक्षमतेचा आलेख खालील आकृती 2.11 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे वक्र आहे. जसजसा लोड (Load) वाढतो, कार्यक्षमतेची टक्केवारी देखील वाढते आणि त्यामुळे हळूहळू वक्र (Curve) गुळगुळीत (Smooth) बनतो व वाढतजातो आणि क्ष-अक्षांशी (x-axis) कमी-अधिक समांतर बनतो.

1.3.5. मशीनचा नियम (Law of Machine)

मशीनचा नियम हा लावलेला एफर्ट (P) व उचललेला लोड (W) यांच्यामधील संबंध दर्शवतो. कोणत्याही मशीनसाठी एफर्ट (P) व लोड (W) यांच्या दरम्यान एक आलेख आखला तर तो एका सरळ रेषेचा संबंध दर्शवितो.



हा आलेख o मधून जात नाही परंतु y- अक्षावर C बिंदू ला एक इंटरसेप्ट करतो जे दर्शविते की केवळ घर्षण प्रतिरोधनावर (Frictional resistance) मात करण्यासाठी एफर्ट चा झालेला लॉस झाला. स्थिर 'm' आलेखाचा उतार दर्शवितो.

P=mW+C

हे समीकरण मशीनचा नियम म्हणून ओळखले जाते.

W_1 आणि W_2यावरून आपण स्थिरांक 'm' आणि 'C' ची किंमत खालीलप्रमाणे काढू शकतो.

$P_1 = m\ W_1 + C$ ………………. (a)

$P_2 = m\ W_2 + C$ ………………. (b)

समीकरण (b) हे समीकरण (a) मधून वजा करावे

$P_1 - P_2 = m\ (W_1 - W_2)$

$m = \frac{P_1 - P_2}{W_1 - W_2}$ ……………….(c)

'm' ची किंमत समीकरण (a) मध्ये टाकावी, मग आपण लिहू शकतो

$P_1 = \left(\frac{P_1 - P_2}{W_1 - W_2}\right) W_1 + C$

$C = P_1 - \left(\frac{P_1 - P_2}{W_1 - W_2}\right) W_1$ ……………………….(d)

मशीनच्या नियमांचा वापर

- मशीनमध्ये घर्षण किती आहे हे शोधण्यासाठी. (c च्या मदतीने).i.e c (y intercept) = मशीन घर्षण.
- ठराविक भार उचलण्यासाठी किती प्रयत्न करावे लागतील याचा अंदाज लावणे.
- ठराविक मशीनचे जास्तीत जास्त मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज शोधणे.
- मशीनची जास्तीत जास्त कार्यक्षमता शोधण्यासाठी

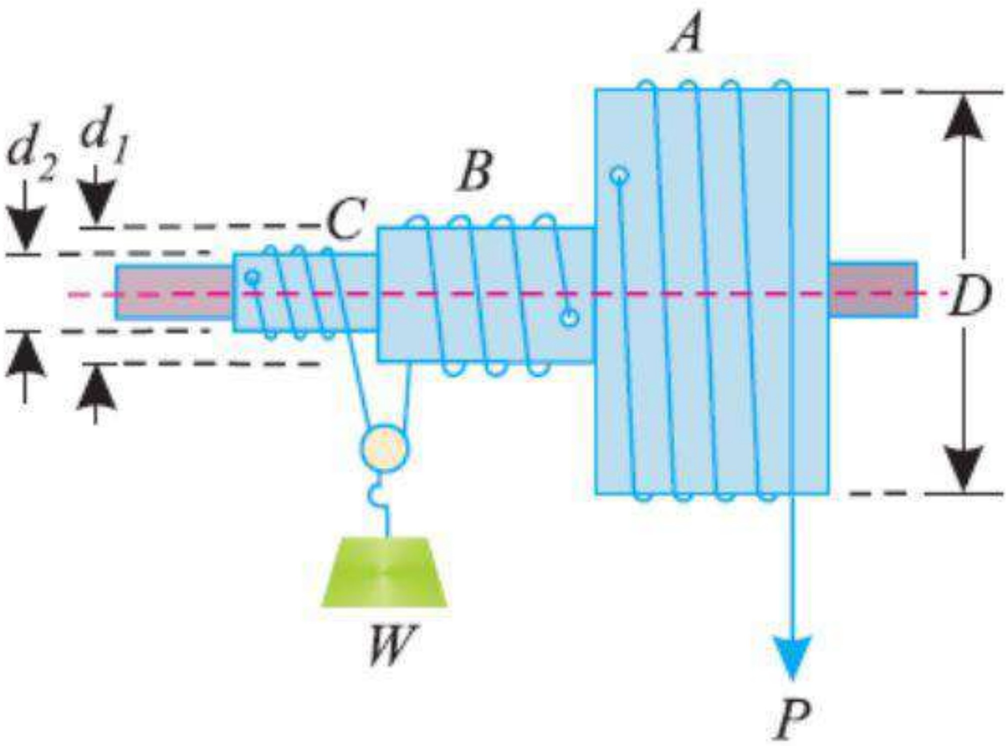
1.4. (Velocity Ratio)

1.4.1.डिफरंशिअल व्हील व ॲक्सल (Differential wheel and axle)

हे एक साधे व्हील व ॲक्सल चे सुधारित रूप आहे. आकृती 2.3 मध्ये एक डिफरंशिअल व्हील व ॲक्सल दाखविलेले आहे. यामध्ये BC हा एक लोड ॲक्सल आहे, जो भिन्न व्यासांच्या दोन भागांपासून बनलेला आहे.

साधे व्हील व ॲक्सल प्रमाणे, व्हील A ॲक्सल B व C हे एकाच शाफ्ट ला जोडलेले असतात व कमीतकमी घर्षण होण्यासाठी ते बॉल बेअरिंग्जवर बसवलेले असतात.

एक दोरी एफर्ट व्हील A च्या भोवती गुंडाळलेली असते. आणखी एक दोरी ॲक्सल B च्या भोवती गुंडाळलेली असते व हि दोरी पुली (ज्यावर लोड W लावलेला असतो) मधून ओवून पुन्हा ॲक्सल C च्या भोवती गुंडाळलेली असते. ॲक्सल C वरील गुंडाळलेली दोरी ही ॲक्सल B च्या गुंडाळलेल्या दोरीच्या विरुद्ध दिशेने असते. मात्र व्हील A व ॲक्सल C यांची गुंडाळलेली दोरी एकाच दिशेने असते हे लक्षात ठेवा.



याचा परिणाम म्हणजे, जेव्हा दोरी व्हील A मधून उलगडली जाते तेव्हा ॲक्सल C ची दुसरी दोरी सुद्धा उलगडली जाते परंतु त्यावेळेस ॲक्सल B वर मात्र दोरी गुंडाळली जाते. जसे कि आकृतीत दाखविलेले आहे.

समजा,

D = व्हील A चा व्यास,

d_1 = ॲक्सल B चा व्यास,

d_2 = ॲक्सल C चा व्यास,

W = उचलला जाणारा लोड,

P = लोड उचलण्यासाठी लावलेले एफर्ट

एका परिभ्रमण मध्ये एफर्ट चे विस्थापन = πD

अशाप्रकारे एका परिभ्रमणामध्ये, ॲक्सल B व C वर गुंडाळल्या गेलेल्या दोरीची लांबी अनुक्रमे = πd_1, आणि πd_2.

परंतु त्यांच्यावरील गुंडाळलेल्या दोरीची दिशा भिन्न असल्याने, ॲक्सल B व C वर गुंडाळल्या गेलेल्या दोरीची निव्वळ लांबी = πd_1 - πd_2.

म्हणून, परिणामी लोडचे विस्थापन = $\frac{(\pi d_1 - \pi d_2)}{2}$असेल

$$V.R = \frac{\pi D}{\frac{\pi d_1 - \pi d_2}{2}}$$

$$V.R = \frac{2\pi D}{\pi d_1 \pi d_2}$$

$$V.R = \frac{2D}{d_1 - d_2}$$

उदाहरणे - डिफरंशिअल व्हील आणि ॲक्सल

उदाहरण क्र.-01

एका डिफरंशिअल व्हील व ॲक्सलमध्ये, व्हील चा व्यास 40 cm आहे तर ॲक्सल चा व्यास 10 cm व 8 cm आहे. जर 50 N चा एफर्ट लावल्यानंतर 1500 N चा लोड उचलला जात असेल, तर मशीनची कार्यक्षमता निश्चित करा.

उत्तर-

एफर्ट व्हील चा व्यास (D) = 40 cm

मोठ्या ॲक्सल चा व्यास (d_1) = 10 cm

छोट्या ॲक्सल चा व्यास (d2) = 8 cm

एफर्ट (P) = 50 N

लोड (W)=1500N

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2D}{d_1 - d_2}$$

$$V.R = \frac{2\ X\ 40}{10-8}$$

V.R = 40

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A काढून घेऊ

$$M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{1500}{50}$$

M.A = 30

कार्यक्षमता काढू

$$\eta\ \% = \frac{M.A}{V.R}\ X\ 100$$

$$\eta\ \% = \frac{30}{40}\ X\ 100$$

η = 75 %

उदाहरण क्र.-02

एका डिफरंशिअल व्हील व ॲक्सलमध्ये, व्हील चा व्यास 500 mm आहे तर ॲक्सल चा व्यास 120 mm व 100mm आहे. जर 40 N चा एफर्ट लावल्यानंतर 1200 N चा लोड उचलला जात असेल तर मशीनची कार्यक्षमता निश्चित करा. तसेच घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चे झालेले लॉस व घर्षण झाल्यामुळे लोड चे झालेले लॉस सुद्धा निश्चित करा.

उत्तर-

दिलेली माहिती -:

एफर्ट व्हील चा व्यास (D) = 500 mm

मोठ्या ॲक्सल चा व्यास (d_1) = 120 mm

छोट्या ॲक्सल चा व्यास (d2) = 100 mm

एफर्ट (P) = 40 N

लोड (W) = 1200 N

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2D}{d_1 - d_2}$$

$$V.R = \frac{2 X 500}{120 - 100}$$

V.R = 50

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A काढून घेऊ

$$M.A = \frac{W}{P}$$

$M.A = \frac{1200}{30}$

M.A = 30

कार्यक्षमता काढू

$\eta\ \% = \frac{M.A}{V.R} \times 100$

$\eta\ \% = \frac{30}{50} \times 100$

$\eta = 60\ \%$

घर्षण झाल्यामुळे एफर्ट चा झालेला लॉस

Effort lost in friction (P_f)= Actual Effort (P) - Ideal Effort (P_i)

$P_f = P - P_i$

$P_f = P - \frac{W}{V.R}$

$P_f = 40 - \frac{1200}{50}$

$P_f = 16$ N

घर्षण झाल्यामुळे लोड चा झालेला लॉस

Load lost in friction (W_f) = Ideal load (W_i) - Actual load (W)

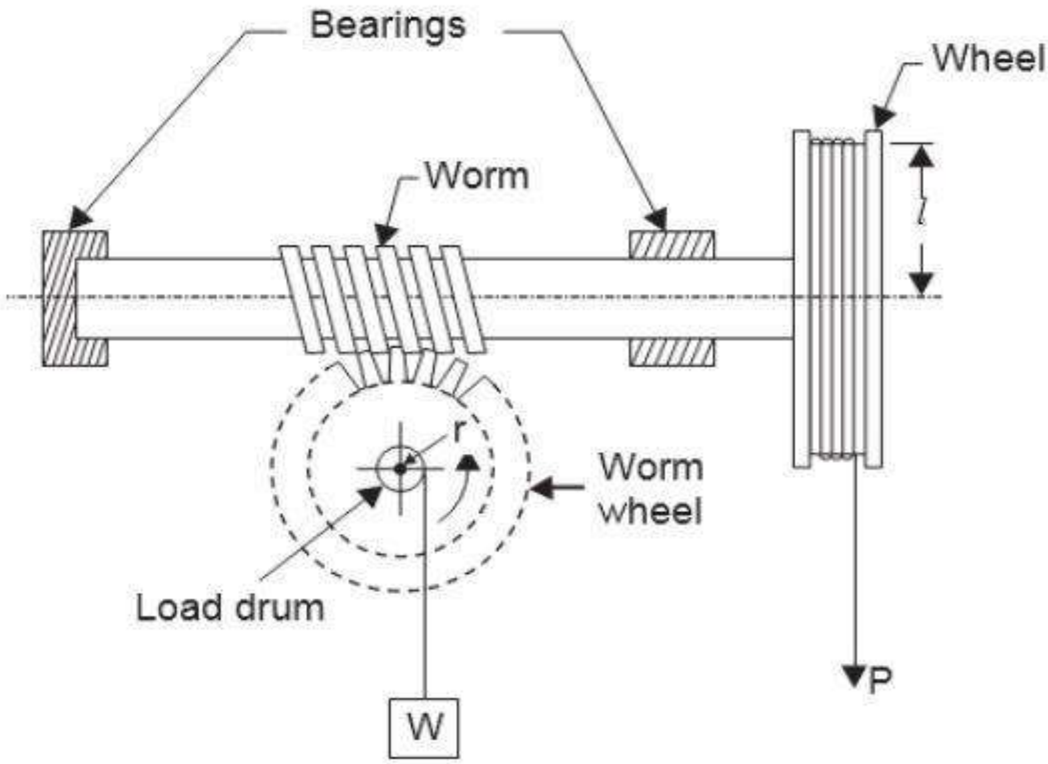
$W_f = P \times V.R - W$

$W_f = 40 \times 50 - 1200$

$W_f = 800$ N

1.4.2. वर्म आणि वर्म व्हील (Worm and Worm wheel)

आकृती मध्ये वर्म आणि वर्म व्हील दाखविले आहे. यात एक स्क्वेअर थ्रेडेड स्क्रू (वर्म म्हणून ओळखले जाते) आणि एक दात असलेले व्हील (वर्म व्हील म्हणून ओळखले जाते) एकमेकांना जोडून तयार केलेले असतात.



वर्म ला एक दुसरे एफर्ट व्हील जोडलेले असते, ज्यावर दोरी गुंडाळलेली असते. कधीकधी व्हील ऐवजी एक हँडल वर्म ला जोडलेले असते . एक लोड ड्रम वर्म व्हील वर सुरक्षितपणे बसवला जातो.

असे मानूया कि,

l = हँडलची लांबी

R = एफर्ट व्हील ची त्रिज्या

r = लोड ड्रम ची त्रिज्या

W = उचलला जाणारा लोड

P = लोड उचलण्यासाठी लावलेला एफर्ट

T = वर्म व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या

जर वर्म सिंगल थ्रेडेड असेल (म्हणजे वर्म च्या एका परिभ्रमण मध्ये वर्म व्हील फक्त एका दाताने पुढे ढकलले जाते)

तर मग, एफर्ट व्हील च्या किंवा हॅण्डल च्या एका परिभ्रमण मध्ये, एफर्ट (P) चे हललेले अंतर = 2 π l

लोड ड्रम ची होणारी हालचाल = $\frac{1}{T}$परिभ्रमण (Revolution)

लोड (W) चे हललेले अंतर = $\frac{2\pi r}{T}$

आणि V.R = $\frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

V.R = $\frac{2\pi l}{\frac{2\pi r}{T}}$

वरील समीकरण सोडवून

V.R = $\frac{lT}{r}$

जर वर्म डबल थ्रेडेड असेल (म्हणजे वर्म च्या एका परिभ्रमण मध्ये वर्म व्हील फक्त दाताने पुढे ढकलले जाते)

तर

V.R = $\frac{lT}{2r}$

साधारणतः वर्म हा 'n' थ्रेडेड असेल तर

V.R = $\frac{lT}{nr}$

V.R = $\frac{DT}{nd}$ ....जर एफर्ट व्हील चा व्यास दिलेला असेल तर

उदाहरणे - वर्म आणि वर्म व्हील

उदाहरण क्र. -01

एका सिंगल थ्रेडेड वर्म आणि वर्म व्हीलमध्ये, वर्म व्हीलवरील दातांची संख्या 70 आहे. एफर्ट व्हील चा व्यास 20 cm आणि लोड ड्रमचा व्यास 10 cm आहे. वेग गुणोत्तर ची किंमत काढा. मशीनची कार्यक्षमता 62% असल्यास, 1500 N चे लोड उचलण्यासाठी किती एफर्ट लावावा लागेल ते शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती :

i) वर्म व्हीलवरील दातांची संख्या, T = 70

ii) हॅण्डल ची लांबी (1) = $\frac{20}{2}$ = 10 cm

iii) लोड ड्रम ची त्रिज्या (r) = $\frac{10}{2}$ = 5 cm

iv) मशीनची कार्यक्षमता (η) = 62%

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{lT}{r}$$

$$V.R = \frac{10\ X\ 70}{5}$$

$$V.R = 140$$

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A

$$M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{1500}{P}$$

मशीनची कार्यक्षमता %η

$$\%\eta = \frac{M.A}{V.R} \text{ X } 100$$

$$\%\eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \text{ X } 100$$

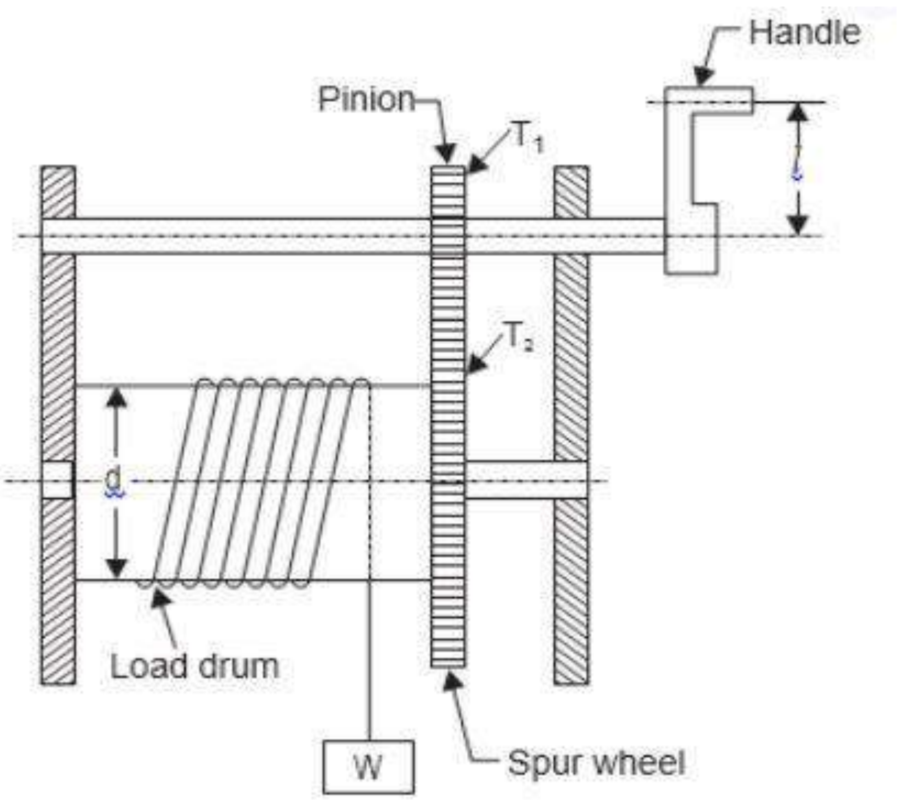
$$\%\eta = \frac{W}{P \ X \ V.R} \text{ X } 100$$

$$P = \frac{1500}{62 \ X \ 140} \text{ X } 100$$

P = 17.28 N

1.4.3. सिंगल पर्चेस कॅब विंच (Single purchase crab winch)

आकृती मध्ये सिंगल पर्चेस कॅब विंच दाखविलेले आहे. आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे एका ड्रम वर दोरीचे एक टोक फिक्स केलेले आहे व दोरी ड्रम ला गुंडाळलेली आहे.



दोरीच्या दुसर्या मोकळ्या टोकाला लोड 'W' जोडलेला आहे. एक मोठे दात असलेले व्हील, ज्याला स्पर व्हील (Spur wheel) असे म्हणतात ते ड्रमवर घट्टपणे बसविलेले आहे. आणखी एक लहान दात असलेले व्हील, ज्याला पिनिअन (Pinion) असे म्हणतात ते स्पर व्हील ला जोडलेले आहे.

असे मानूया कि,

T_1 = पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या

T_2 = स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या

l = हँडलची लांबी

W = उचललेला लोड

P = लोड उचलण्यासाठी लावलेला एफर्ट, (हँडलवर लावलेला)

हँडलने एक परिभ्रमण पूर्ण केल्यावर, एफर्ट P चे हललेले अंतर = 2 π l.

पिनिअन ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = 1

स्पर व्हील ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2}$

लोड ड्रम ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2}$

लोड W चे हललेले अंतर = $d\pi\frac{T_1}{T_2}$

$$\text{वेग गुणोत्तर V.R} = \frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$$

$$V.R = \frac{2\,\pi\, l}{\pi d\frac{T_1}{T_2}}$$

$$V.R = \frac{2l}{d}\frac{T_2}{T_1}$$

जर हँडलची लांबी न देता, एफर्ट व्हील चा व्यास दिला असेल तर वेग गुणोत्तर.

$$V.R = \frac{D}{d}\frac{T_2}{T_1}$$

उदाहरणे - सिंगल पर्चेस कॅब विंच

उदाहरण क्र: 01

एक सिंगल पर्चेस कॅब विंच चा तपशील खालील प्रमाणे आहे,

हँडलची लांबी = 40 cm

लोड ड्रम चा व्यास = 20 cm

पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या = 16

स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या = 80

शोधा

1) वेग गुणोत्तर V.R आणि

2) जर मशीनची कार्यक्षमता 75% असेल तर 2000 N चा लोडउचलण्यासाठी लागणार एफर्ट 'P' निश्चित करा

उत्तर:

दिलेली माहिती :

हँडलची लांबी (l) = 40 cm

लोड ड्रम चा व्यास (d) = 20 cm

पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या (T_1) = 16

स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या (T_2) = 80

लोड (W) = 2000 N

कार्यक्षमता (η) = 75%

अगोदर वेग गुणोत्तर (V.R) काढून घेऊ

V.R= $\frac{2\,l}{d}$ X $\frac{T_2}{T_1}$

V.R= $\frac{2\ X\ 40}{20}$ X $\frac{80}{16}$

V.R = 20

एफर्ट 'P' शोधूया, जर कार्यक्षमता %η

%η = $\frac{M.A}{V.R}$ X 100

%η = $\frac{\frac{W}{P}}{V.R}$ X 100

%η = $\frac{W}{P\ X\ V.R}$ X 100

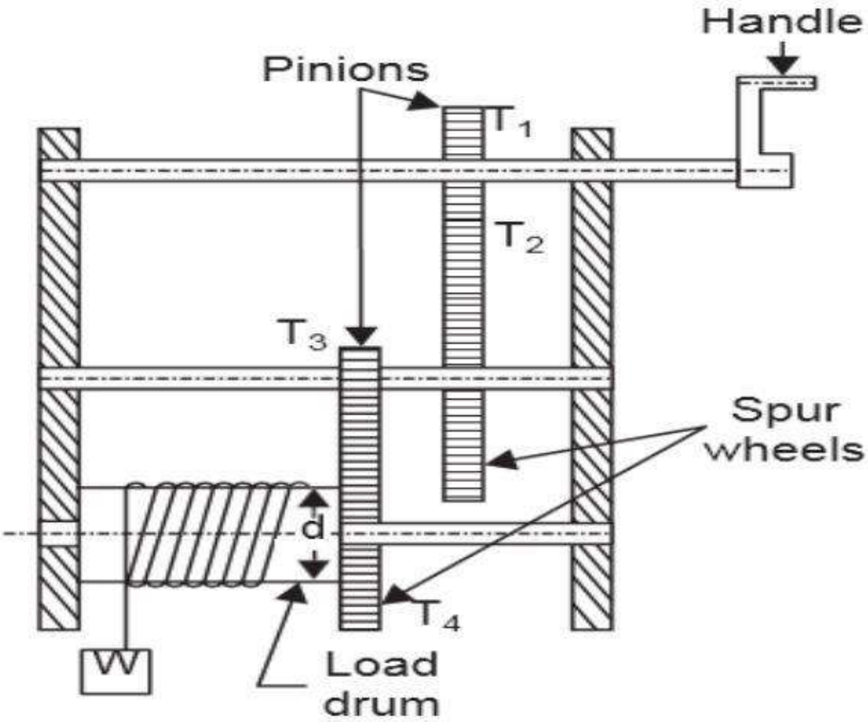
P = $\frac{W}{\%\,\eta\ X\ V.R}$ X 100

P = $\frac{2000}{75\ \ X\ 20}$ X 100

P = 133.33 N

1.4.4. डबल पर्चेस कॅब विंच (Double purchase crab winch)

आकृती डबल पर्चेस कॅब विंच दाखविते. या प्रकारात वेग गुणोत्तर (V.R) दोन टप्प्यांत मिळवले जाते. या लिफ्टिंग मशीनमध्ये दोन स्पर व्हील असतात ज्यांचे दात T_2आणि T4



असतात तसेच, दोन पिनिअन ज्यांचे दात T_1 आणि T3 असतात.स्पर व्हील व पिनिअन एकमेकांना जोडलेले (Mesh) असतात. T_1 दात असलेला पिनिअन हा T2 दात असलेल्या स्पर व्हील सोबत जोडलेला (Mesh) असतो. त्याचपद्धतीने T3 दात असलेला पिनिअन हा T4 दात असलेल्या स्पर व्हील सोबत जोडलेला (Mesh) असतो. एफर्ट P हा हँडलवर लावला जातो.

असे मानूया कि,

T_1 and T3 = पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या

T_2 and T_1 = स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या

1 = एफर्ट हॅण्डलची लांबी

d = ड्रमचा व्यास

D = एफर्ट व्हील चा व्यास

W = उचललेला लोड

P = लोड उचलण्यासाठी लावलेला एफर्ट, (हँडलवर लावलेला)

हॅन्डलने एक परिभ्रमण (Revolution) पूर्ण केल्यावर

एफर्ट P चे हललेले अंतर = 2π l. येथे l ही हँडलची लांबी आहे.

पिनिअन-1 ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = 1

स्पर व्हील-2 ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2}$

पिनिअन-3 ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2}$

स्पर व्हील-4 ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_1}{T_2} \text{ X } \frac{T_3}{T_4}$

लोड W चे हललेले अंतर = $\pi \text{ d } \frac{T_1}{T_2} \text{ X } \frac{T_3}{T_4}$

वेग गुणोत्तर V.R = $\frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

$$V.R = \frac{2\pi l}{\pi d \frac{T_1 T_3}{T_2 T_4}}$$

$$V.R = \frac{2l}{d \frac{T_1 T_3}{T_2 T_4}}$$

$$V.R = \frac{2l}{d} \frac{T_2}{T_1} \frac{T_4}{T_3}$$

जर हँडलची लांबी न देता, एफर्ट व्हील चा व्यास दिला असेल तर वेग गुणोत्तर,

$$V.R = \frac{D}{d} \frac{T_2}{T_1} \frac{T_4}{T_3}$$

उदाहरणे-डबल पर्चेस कॅब विंच

उदाहरण क्र.-01

एका डबल पर्चेस कॅब विंच मध्ये, पिनियनमध्ये 15 आणि 20 दात आहेत, तर स्पर व्हीलमध्ये 45 आणि 40 दात आहेत. एफर्ट हँडल हा 400 mm चा आहे, तर ड्रमचा प्रभावी व्यास 150 mm आहे. जर या मशीनची कार्यक्षमता 40% असेल तर हँडलच्या शेवटी लागू केलेल्या 250 N एफर्ट मुळे किती लोड उचलला जाईल ?

उत्तर:दिलेली माहिती

पिनिअन वर असणाऱ्या दातांची संख्या, T_1= 15 , T_3= 20

स्पर व्हील वर असणाऱ्या दातांची संख्या, = T_2= 45 , T_4= 40

एफर्ट हॅण्डल ची लांबी (1) = 400 mm

ड्रमचा व्यास, d = 150 mm

कार्यक्षमता, η = 40%

एफर्ट, P = 250 N

W हा एफर्ट मुळे उचलला गेलेला लोड आहे असे मानूया

(1) अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ V.R

आपल्याला माहीत आहे कि,

$$V.R = \frac{2l}{d} X \frac{T_2}{T_1} X \frac{T_4}{T_3}$$

$$V.R = \frac{2 X 400}{150} X \frac{45}{15} X \frac{40}{20}$$

V.R = 32

ii) एफर्ट मुळे उचलला गेलेला लोड W शोधूया

$$\%\eta = \frac{M.A}{V.R} X\ 100$$

$$\%\eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} X\ 100$$

$$\%\eta = \frac{W}{P\ X\ V.R} X\ 100$$

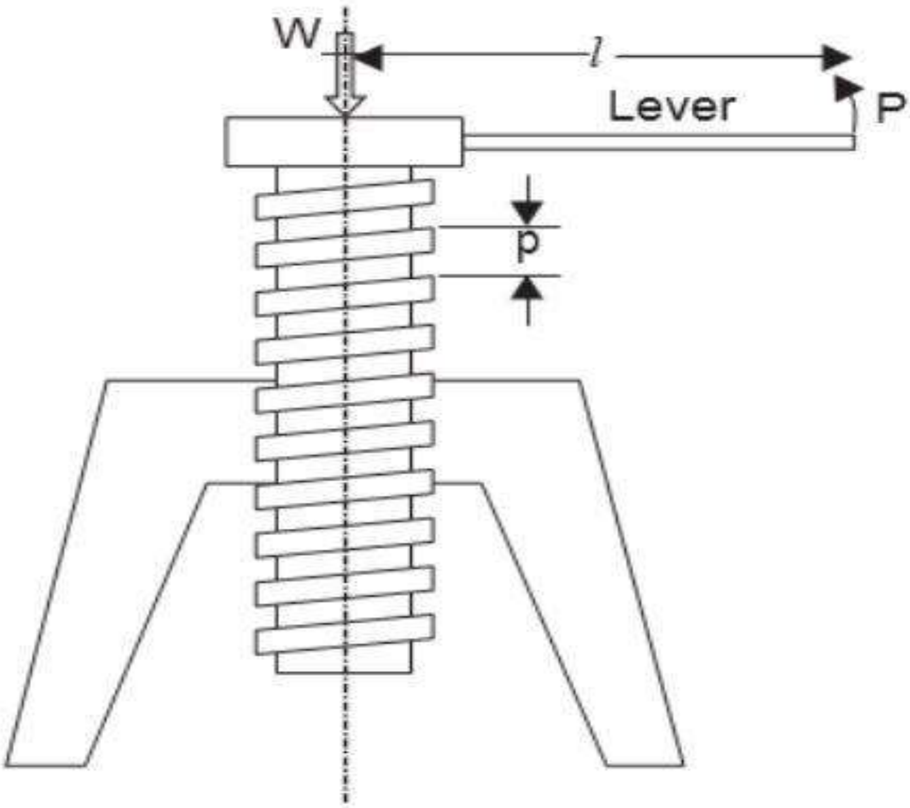
$$W = \frac{\%\ \eta\ X\ P\ X\ V.R}{100}$$

$$W = \frac{250X\ 32\ X\ 40}{100}$$

W = 3200 N

1.4.5. साधा स्क्रू जॅक (Simple Screw jack)

आकृतीमध्ये एक साधा स्क्रू जॅक दाखविलेला आहे. हे एक उपकरण आहे जे जड लोड उचलण्यासाठी वापरले जाते. लोड सहसा त्याच्या मध्यवर्ती भागावर असतो. लिवर किंवा हॅण्डल च्या मदतीने आडव्या बाजूने शक्ती (Horizontal Power) लावून लोड उचलला जातो.



असे मानूया कि,

l = लिवर ची लांबी (किंवा पॉवर आर्म)

D = एफर्ट व्हील चा व्यास

P = लावलेला एफर्ट

W = उचललेला लोड

p = स्क्रू चा पीच (Pitch)

स्क्रू च्या एका परिभ्रमण मध्ये लोड चे हललेले अंतर = p

एफर्ट चे हललेले अंतर = 2 π1

वेग गुणोत्तर V.R = $\frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

V.R = $\frac{2\,\pi 1}{p}$ or V.R = $\frac{\pi D}{p}$

जर स्क्रू डबल थ्रेडेड असेल तर लिव्हर किंवा पॉवर आर्म (Power Arm) च्या एका परिभ्रमण मध्ये लोड हा पीच (Pitch) च्या दुप्पट उचलला जातो. म्हणून डबल थ्रेडेड स्क्रू साठी वेग गुणोत्तर.

V.R = $\frac{2\,\pi 1}{2p}$

V.R = $\frac{\pi 1}{p}$

उदाहरणे- साधा स्क्रू जॅक

उदाहरण क्र.- 01

एक स्क्रू जॅक 30 kNचा लोड उचलतो व त्याची कार्यक्षमता 30% आहे, तसेच त्य लांबी 60 cm आहे .जर स्क्रूचा पिच 15 mm असेल तर लागणारा एफर्ट शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती

लोड (W) = 30 kN = 30000 N .(1 kN =1000 N)

कार्यक्षमता (η) = 30%

हँडलची लांबी (1) = 60 cm = 600 mm .(1 cm = 10 mm)

स्क्रचा पिच Pitch (p) =15 mm

अगोदर वेग गुणोत्तर (V.R) काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2\pi l}{p}$$

$$V.R = \frac{2 \text{ X } 3.1415 \text{ X } 600}{15}$$

V.R = 251.32

एफर्ट P शोधूया

$$\%\eta = \frac{M.A}{V.R} \text{ X } 100$$

$$\%\eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} \text{ X } 100$$

$$\%\eta = \frac{W}{P \ X \ V.R} \text{ X } 100$$

$$P = \frac{W}{\% \eta \ X \ V.R} \text{ X } 100$$

$$P = \frac{30 \ X \ 10^3}{30 \ X \ 251.32} \text{ X } 100$$

P = 397.89 N

उदाहरण क्र.- 02

एका स्क्रू जॅकमध्ये एफर्ट व्हील चा व्यास 200 mm आणि पिच 5 mm आहे. 150 N च्या एफर्ट मुळे 1000 N चा लोड उचलला जातो. तर स्क्रू जॅकची कार्यक्षमता शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती

i. एफर्ट व्हील चा व्यास (D) = 200 mm

ii. स्क्रूचा पिच Pitch (p) = 5 mm

iii. लोड (W) =1000 N

iv. एफर्ट (P) =150 N

v. कार्यक्षमता= ?

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ V.R

$$V.R = \frac{\pi \text{ X } D}{p}$$

$$V.R = \frac{3.1415 \text{ X}200}{5}$$

V.R = 125.66

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A काढून घेऊ

$$M.A = \frac{W}{P}$$

$$M.A = \frac{1000}{150}$$

M.A = 6.67

कार्यक्षमता काढू

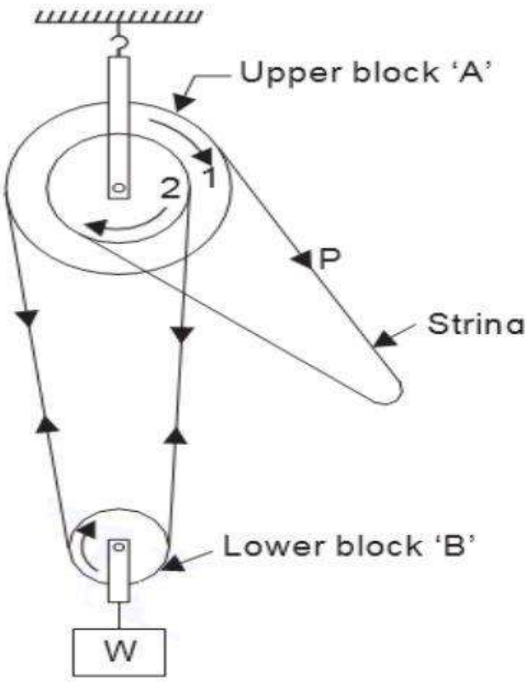
$$\%\eta = \frac{M.A}{V.R} \text{ X } 100$$

$$\%\eta = \frac{6.67}{125.66} \text{ X } 100$$

η = 5.3 %

1.4.6. वेस्टन (Weston's) डिफरंशिअल पुली ब्लॉक (Weston's differential pulley block)

आकृती मध्ये दाखविल्याप्रमाणे वेस्टनच्या डिफरंशिअल पुली ब्लॉकमध्ये दोन ब्लॉक A आणि B असतात. वरच्या ब्लॉक A मध्ये दोन पुली (1 आणि 2) असतात, एकाचा व्यास दुसऱ्यापेक्षा थोडा मोठा असतो. ह्या दोन पुली एकच पुली म्हणून एकत्र गोल फिरतात. खालचा ब्लॉक B मध्ये देखील एक पुली असते, ज्यावर लोड W जोडलेला असतो. एक अंतहीन साखळी पुली '1' वरून जाते आणि नंतर खालच्या ब्लॉक मधील पुली वरून, नंतर शेवटी पुली '2' वरून जाते. उर्वरित लोम्बकळत असलेली साखळी पहिल्या मोकळ्या टोकाला जोडली जाते. एफर्ट P हा पुली '1' वरून जाणाऱ्या साखळीवर लावला जातो. साखळी घसरण्यापासून रोखण्यासाठी, पुलीच्या खोबणीमध्ये (Grooves) प्रोजेक्शन (Projection) दिले जातात.



D = पुली 1 चा व्यास

d = पुली 2 चा व्यास,

W= उचलले जाणारे वजन

P = वजन उचलण्यासाठी लावलेला एफर्ट

ज्यावेळेस आपण एफर्ट P हा मोठ्या पुलीवर लावतो, त्यावेळेस साखळी मोठ्या पुलीवरून ओढली जाते. मोठ्या पुलीच्या एका परिभ्रमण मध्ये, पुलीवरुण ओढल्या जाणाऱ्या साखळीची लांबी = πD.

ही लांबी म्हणजेच एफर्ट P द्वारे हलवले गेलेले अंतर आहे.

आपल्याला माहीत, आहे की, लहान पुली सुद्धा मोठ्या पुलीसोबत फिरणार आहे. त्यामुळे लहान पुलीद्वारे सोडलेल्या साखळीची लांबी =πd.

म्हणून

साखळीचे नेट शॉर्टनिंग = π D - π d = π (D - d) (Net Shortening of Chain)

साखळीचे हे शॉर्टनिंग साखळीच्या दोन भागांमध्ये समान प्रमाणात विभाजित केले जाईल, लोडला समर्थन देईल.

ज्या अंतराने लोड वर उचलला जाईल $=\frac{\pi\,(D-d)}{2}$

वेग गुणोत्तर V.R = $\frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

$$V.R = \frac{\pi D}{\frac{\pi D - \pi d}{2}}$$

$$V.R = \frac{\pi D}{\frac{\pi (D - d)}{2}}$$

$$V.R = \frac{2D}{(D-d)}$$

जर मोठ्या आणि लहान पुलीची त्रिज्या दिली असेल तर

$$V.R = \frac{2R}{(R-r)}$$

जर मोठ्या आणि लहान पुलीच्या दात किंवा कॉग ची संख्या दिली असेल तर जर, T_1किंवा N_1 = मोठ्या किंवा वरच्या पुलीवर दात किंवा कॉग ची संख्या, T_2किंवा N_2 = लहान किंवा खालच्या पुलीवर दात किंवा कॉग ची संख्या

$$V.R = \frac{2T_1}{(T_1-T_2)}$$

Or

$$V.R = \frac{2N_1}{(N_1-N_2)}$$

उदाहरणे – वेस्टनची (Weston's) डिफरंशिअल पुली ब्लॉक

उदाहरण क्र.-1

एक वेस्टनचा डिफरंशिअल पुली ब्लॉक हा 8 kNचा लोड उचलण्यासाठी वापरला जातो. त्यात पुलीचे व्यास 260 mm आणि 240 mm आहे. जर मशीनची कार्यक्षमता 45% असेल तर लोड उचलण्यासाठी लागणाऱ्या एफर्ट ची किंमत निश्चित करा.

उत्तर

दिलेली माहिती

लोड (W) = 8 kN = 8000 N (1 kN = 1000 N)

मोठ्या पुलीचा व्यास (D) = 260 mm

छोट्या पुलीचा व्यास (d) = 240 mm

कार्यक्षमता (η) = 45%

एफर्ट P = ?

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

$$V.R = \frac{2D}{D-d}$$

$$V.R = \frac{2 X 260}{260-240}$$

V.R = 26

$$\%\eta = \frac{M.A}{V.R} X 100$$

$$\%\eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} X 100$$

$\%\eta = \frac{W}{P \; X \; V.R}$ X 100

P = $\frac{W}{\% \eta \;\; X \; V.R}$ X 100

P = $\frac{8 \; X \; 10^3}{45 \; X \; 26}$ X 100

P = 683.76 N

उदाहरण क्र. -2

वेस्टनच्या डिफरंशिअल पुली ब्लॉकमध्ये लहान पुलीवर 12 कॉग आणि मोठ्या पुलीवर 13 कॉँग आहेत. मशीनचा नियम P = (W/20) + 20 आहे. जर 750 N चा लोड उचलला जात असेल तर मशीनची कार्यक्षमता शोधा.

उत्तर

दिलेली माहिती :

लहान पुलीवर कॉग (N_2) = 12

मोठ्या पुलीवर कॉँग (N_1) = 13

W मशीनचा नियम P = $\frac{W}{20}$ + 20 N

लोड (W) =750 N

कार्यक्षमता (η)=?

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ

V.R = $\frac{2N_1}{N_1 - N_2}$

V.R = $\frac{2\ X\ 13}{13-12}$

V.R = 26

एफर्ट P ची किंमत काढ्या (मशीनचा नियम वापरून)

P = $\frac{W}{20}$ + 20 N

W = 750 टाका

P = $\frac{750}{20}$ + 20 N

P = 57.5 N

मेकॅनिकल ॲडव्हान्टेज M.A काढून घेऊ

M.A = $\frac{W}{P}$

M.A = $\frac{750}{57.5}$

M.A = 13.043

कार्यक्षमता % η

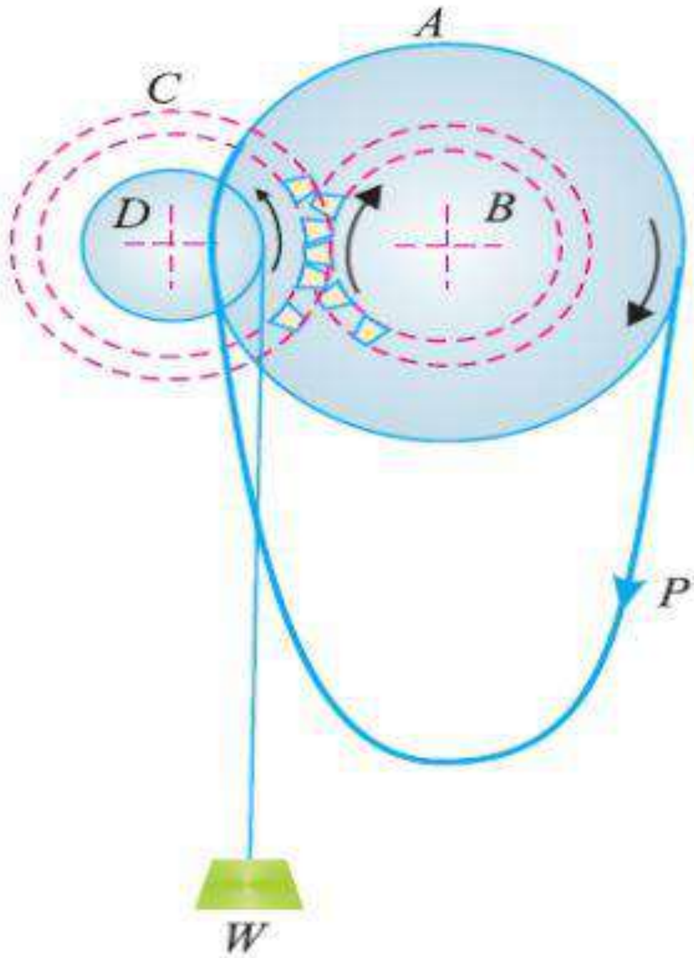
% η = $\frac{M.A}{V.R}$ X 100

% η = $\frac{13.043}{26}$ X 100

η = 50.16 %

1.4.7. गियर पुली ब्लॉक (Geared Pulley block)

हे डिफरंशिअल पुली ब्लॉकचे सुधारित रूप आहे ज्यामध्ये गियर्सच्या मदतीने वेग गुणोत्तर तीव्र (Intensified) केले जाते. गियर पुली ब्लॉकमध्ये कॉगव्हील A असते, ज्याभोवती एक अंतहीन साखळी असते.एक लहान गियर व्हील B, ज्याला पिनियन म्हणतात. कॉगव्हील A व पिनियन B एकाच शाफ्ट वर जोडलेले असतात. व्हील B हा दुसर्या मोठ्या व्हील C सह जोडला (Geared) आहे, ज्याला स्पर व्हील म्हणतात. कॉगव्हील D व स्पर व्हील C एकाच शाफ्ट वर जोडलेले असतात. लोड हा एका साखळीशी जोडलेला असतो जी साखळी कॉगव्हील D वरून जातो. एफर्ट हा अंतहीन साखळीवर लावला जातो, जी साखळी व्हील A वरून जाते जसे आकृती मध्ये दाखविलेले आहे.



आपण असे मानूया,

T_1 = व्हील A वरील कॉगची संख्या (ह्यालाच एफर्ट व्हील म्हटले जाते)

T_2= व्हील B वरील दातांची (teeth) संख्या (ह्यालाच पिनिअन असे म्हटले जाते)

T3= व्हील C वरील दातांची संख्या (ह्यालाच स्पर व्हील म्हटले जाते),

T4= व्हील D वरील कॉगची (Cogs) संख्या (ह्यालाच लोड व्हील म्हटले जाते)

आपल्याला माहीत आहे कि,

कॉग व्हील A च्या एका परिभ्रमणामध्ये एफर्ट चे हललेले अंतर, = T_1

पिनिअन-B ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या =1

स्पर व्हील C ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_2}{T_3}$

लोड व्हील D ने केलेले परिभ्रमण ची संख्या = $\frac{T_2}{T_3}$

..लोड W चे हललेले अंतर = $\frac{T_2}{T_3}$ X T_4

वेग गुणोत्तर V.R = $\frac{\text{एफर्ट P चे हललेले अंतर}}{\text{लोड W चे हललेले अंतर}}$

$$V.R = \frac{T_1}{\frac{T_2}{T_3} X T_4}$$

$$V.R = \frac{T_1}{T_2} X \frac{T_3}{T_4}$$

उदाहरणे- गियर पुली ब्लॉक

उदाहरण क्र.- 01

एक गियर पुली ब्लॉक जो लोड उचलण्यासाठी वापरला जातोय त्याचे डायमेन्शन खालील प्रमाणे दिलेले आहेत. एफर्ट व्हील वरील कॉग ची संख्या = 90, लोड व्हीलवरील कॉगची संख्या = 8, पिनियन वरील दातांची संख्या = 25, स्पर व्हील वरील दातांची संख्या = 40. जर मशीनद्वारे 50 N चा एफर्ट लावला जात असेल तर जास्तीत जास्त किती लोड उचलला जाऊ शकतो ते शोधा. पुली ब्लॉकची कार्यक्षमता 75% घ्या.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given):

एफर्ट व्हील वरील कॉगची संख्या (T_1) = 90

पिनियनवरील दातांची संख्या = (T2) = 25

स्पर व्हीलवरील दातांची संख्या (T3) = 40

लोड व्हीलवरील कॉगची संख्या (T_4) = 8

एफर्ट (P) = 50 N

कार्यक्षमता (η %) = 75%

W हा एफर्ट मुळे उचलला गेलेला लोड आहे असे मानूया

अगोदर वेग गुणोत्तर काढून घेऊ V.R

$$V.R = \frac{T_1}{T_2} X \frac{T_3}{T_4}$$

$$V.R = \frac{90}{25} X \frac{40}{8}$$

V.R = 18

एफर्ट मुळे उचलला गेलेला लोड W शोधूया

$$\%\eta = \frac{M.A}{V.R} X\ 100$$

$$\%\eta = \frac{\frac{W}{P}}{V.R} X\ 100$$

$$\%\eta = \frac{W}{P\ X\ V.R} X\ 100$$

$$W = \frac{\%\ \eta\ X\ P\ X\ V.R}{100}$$

$$W = \frac{50\ X\ 15\ X\ 75}{100}$$

W = 675 N

1.4.8. शेव ब्लॉक्स (दोन आणि तीन शेव)

1.4.8.1. दोन शेव पुली ब्लॉक:

त्यामध्ये वरचा ब्लॉक आणि खालचा ब्लॉक देखील असतो ज्यांच्या शेव्हमध्ये पुली असतात; त्यामुळे पुलींची एकूण संख्या चार आहे. वरचा ब्लॉक निश्चित केला आहे की खालच्या ब्लॉकचा जंगम आहे. आकृतीमध्येलोड W हे दोरीच्या चार भागांनी समान रीतीने सामायिक केले आहे; प्रत्येक दोरीतील ताण (T) W/4 आहे. लागू केलेले प्रयत्न तणावाच्या समान असल्याने;

P=T

$T=\frac{W}{4}$, $P=\frac{W}{4}$आयडियल मशीन साठी M.A =V.R

जसे $\frac{W}{P}$ = V.R . …M.A= $\frac{W}{P}$

$\frac{W}{\frac{W}{4}}$ = V.R

V.R = 4

1.4.8.2 तीन शेव पुली ब्लॉक:

यात वरचा ब्लॉक आणि खालचा ब्लॉक देखील असतो परंतु प्रत्येकाच्या शेवमध्ये तीन पुली असतात; त्यामुळे पुलींची एकूण संख्या सहा आहे. या पुली ब्लॉकमध्येही वरचा ब्लॉक स्थिर असतो आणि खालचा ब्लॉक जंगम असतो. आकृतीमध्ये लोड W हे दोरीच्या सहा भागांद्वारे समान प्रमाणात वितरीत केले जाते; प्रत्येक दोरीतील ताण (T) W/6 आहे.

लागू केलेले प्रयत्न तणावाच्या समान असल्याने;

P=T

T= $\frac{W}{6}$

P = $\frac{W}{6}$

आयडियल मशीन साठी

M.A = V.R

V.R = $\frac{W}{P}$

V.R = $\frac{W}{\frac{W}{6}}$

V.R = 6

संदर्भ (Reference)

Sr no	Author	Title	Publisher with ISBN Number
1	S. Ramamrutham	Engineering Mechanics	Dhanpat Rai Publishing Co. 2016 ISBN-13: 978-9352164271
2	R. S. Khurmi,N.Khurmi	Engineering Mechanics	S.Chand& Co. New Delhi 2018 ISBN: 978-9352833962
3	S. S. Bhavikatti	Engineering Mechanics	New Age International Private Limited ISBN: 978-9388818698
4	D. S. Bedi, M. P.Poonia	Engineering Mechanics	Khanna Publishing ISBN-13:978-9386173263
5	Dr. R. K. Bansal	Engineering Mechanics	Laxmi Publications ISBN 13: 9788131804094

घटक-2

बलांचे विश्लेषण

(Analysis of Forces)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome):परिणामी बलाची गणना करण्यासाठी दिलेल्या बल प्रणालीचे विश्लेषण करा.

सिद्धांत शिक्षण परिणाम (Theory Learning Outcome):

१. बलाच्या वैशिष्ट्यांचे वर्णन करा.

२. बल प्रणालीमध्ये दिलेल्या बलांच्या मोमेंतची गणना करा.

३. दिलेल्या बल प्रणालीच्या विश्लेषणासाठी योग्य कायदा सुचवा.

४. दिलेल्या बलाचे घटक निश्चित करा.

५. दिलेल्या बल प्रणालीच्या परिणामी बलाची विश्लेषणात्मक गणना करा.

६. दिलेल्या बल प्रणालीच्या परिणामी बलाची ग्राफच्या मदतिने गणना करा.

२.१. यांत्रिकीचा परिचय (Introduction to Mechanics)

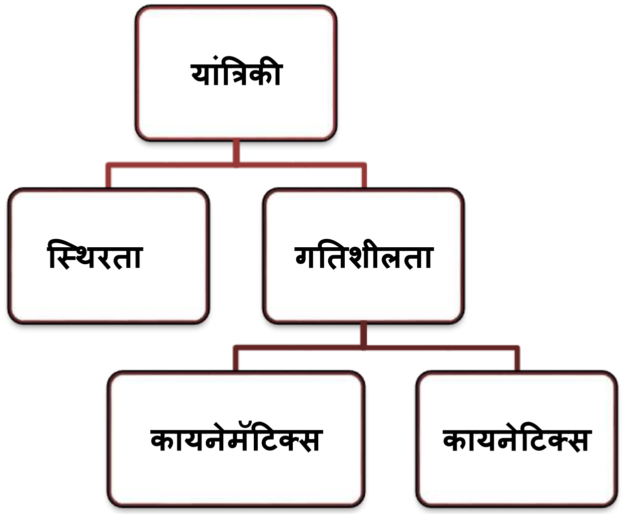
इंजिनीयरिंग मेकॅनिक्स हा विषय म्हणजे एप्लाइड सायन्सची शाखा आहे, जी यांत्रिकीच्या नियम आणि तत्त्वांबरोबरच त्यांच्या अभियांत्रिकी समस्यांशी संबंधित आहे. खरं तर, इंजिनीयरिंग मेकॅनिक्सचे ज्ञान एखाद्या अभियंत्यासाठी प्लॅनिंग,डिझाईनआणिविविध प्रकारच्या मशीन आणि स्ट्रक्चरच्या कन्स्ट्रक्शनसाठी अत्यंत आवश्यक आहे.

२.१.१अभियांत्रिकी यांत्रिकी (Engineering Mechanics)

यांत्रिकी ही विज्ञानाची एक शाखा आहे जी बलांचा अभ्यास करते आणि विश्रांतीच्या स्थितीत किंवा हालचालीत असलेल्या शरीरावर त्याचे परिणाम हाताळते.

२.१.२उपयोजित यांत्रिकी (Applied Mechanics)

जेव्हा अभियांत्रिकी समस्यांवर यांत्रिकी नियम आणि तत्त्वे लागू केली जातात, तेव्हा त्याला उपयोजित यांत्रिकी म्हणतात. यांत्रिकी खालीलप्रमाणे शाखांमध्ये विभागली गेली आहे:



आकृती २.१: यांत्रिकीचे वर्गीकरण

यांत्रिकी दोन भागांमध्ये विभागली गेली आहे .

१) **स्थिरता (Statics)**:

२) **गतिशीलता(Dynamics):**

१) स्थिरता(Statics):

ही इंजिनीयरिंग मेकॅनिक्सची शाखा आहे, जी बल आणि त्यांचे परिणामयांच्याशी संबंधितआहे जेव्हा ते एखाद्या **स्थिर वस्तूवर** कार्य (Act) करत असतील.

२) **गतिशीलता(Dynamics):**

ही इंजिनीयरिंग मेकॅनिक्सची शाखा आहे, जी बल आणि त्यांचे परिणामयांच्याशी संबंधितआहे जेव्हा ते एखाद्या **गतिशील वस्तूवर** कार्य (Act) करत असतील.

गतिशीलता पुढील दोन शाखांमध्ये विभागली जाऊ शकते:

(i) **कायनेमॅटिक्स (Kinematics)**

(ii) **कायनेटिक्स (Kinetics)**

(i) कायनेटिक्स (Kinetics):

ही गतिशीलतेची(डायनॅमिक्सची)शाखा आहे,जी बलामुळे तयार झालेल्या गतिमान वस्तूशी संबंधित आहे.

(ii) कायनेमॅटिक्स (Kinematics):

ही गतिशीलतेची (डायनॅमिक्सची)शाखा आहे, जीगतिशीलवस्तूशीसंबंधित आहे,ज्यामध्येगतीसाठी जबाबदार असलेल्या बलाचा कोणताही संदर्भ घेतला जात नाही.

मूलभूत व्याख्या (Fundamental Definition):

१) स्पेस (Space):

जिओमेट्रीकरिजन (Geometric Region)ज्यामध्ये वस्तूचा अभ्यास केला जातो त्याला स्पेस म्हणतात.

२) वेळ (Time):

हे एकमूलभूत प्रमाण आहे. वेळ म्हणजे मोजलेला किंवा मोजण्यायोग्य कालावधी ज्या दरम्यान एखादी क्रिया, प्रक्रिया किंवा स्थिती अस्तित्वात असते किंवा चालू असते. आणि ते ‘t ' किंवा 'T' द्वारे दर्शविले जाते.

३) वस्तुमान (Mass):

बॉडी मधील पदार्थाच्या(Matter) प्रमाणास वस्तुमान असे म्हणतात.

त्याचे एकक किलोग्राम(kg) किंवा ग्रॅम(gm) आहे.

४) कण (Particle):

कणहा अत्यंत लहान आकाराची वस्तूम्हणून परिभाषित केला जाऊ शकतोआणि तो एकाग्रबिंदू (Concentrated point) मानले जातो.

५) वस्तू(Body):

निश्चित वस्तुमान असलेल्या आणि निश्चित जागा व्यापलेल्या वस्तूला बॉडी म्हणतात.

६) रिजिड बॉडी (Rigid Body):

रिजिड वस्तूची व्याख्या अशी केली जाऊ शकते जी काही बाह्य बलाच्या अधीन असली तरीही त्याचे आकार आणि आकारमान (Shape and Size) टिकवून ठेवू शकते. प्रत्यक्ष व्यवहारात, कोणतीही वस्तू पूर्णपणे रिजिड नसते. पण साधेपणासाठी, आपण सर्व वस्तू रिजिड वस्तू म्हणून घेतो.

७) वजन(Weight):

एखाद्या वस्तूला पृथ्वी ज्या बलाने आपल्या केंद्राच्या दिशेने ओढते त्याला वस्तूचे वजन म्हणतात.वस्तूचे वस्तुमान ‘m’ आणि वजन (एम) ‘W’मधील संबंध (डब्ल्यू)खालील समीकरणाद्वारे दिले जातात

$W = m \times g$

‘g’ चे मूल्य MKS प्रणालीमध्ये तसेच SI युनिटमध्ये 9.81m/sec^2 .गणना कार्य(Calculation) सुलभ करण्यासाठी सहसा 9.80 m/sec^2 म्हणून घेतले जाते.

टेबल 1.1 : वस्तुमान(Mass) आणि वजन(Weight)यांच्यातील फरक:

अ. क्र.	**वस्तुमान(Mass)**	**वजन (Weight)**
1	हे वस्तू मध्ये असलेल्या पदार्थाचे प्रमाण आहे.	हे एक बल आहे ज्याद्वारे वस्तू पृथ्वीच्या केंद्राकडे आकर्षित होते.
2	हे सर्व ठिकाणी स्थिर आहे.	वेगवेगळ्या उंचीवर ते वेगळे आहे.
3	हे वस्तू मधील गती(motion) प्रतिकार निर्माण करते.	हे वस्तू मधील गती(motion)निर्माण करते.
4	हे स्केलर प्रमाण आहे कारण त्यात केवळ परिमाण (magnitude) आहे.	हे एक वेक्टर प्रमाण आहे कारण त्यात परिमाण(magnitude)आणि दिशा(direction) आहे.
5	ते कधीच शून्य नसते.	ते पृथ्वीच्या मध्यभागी शून्य आहे.
6	हे युनिट्सच्या MKS प्रणालीमध्ये तसेच SI युनिट्समध्ये किलोग्राम (kg) मध्ये मोजले जाते.	हे युनिट्सच्या)MKS)प्रणालीमध्ये किलोग्राम वजनामध्ये (kg wt. किंवा kgf) आणि SI युनिट्समध्ये न्यूटन)N) मध्ये मोजले जाते .
7	हे साध्या बॅलन्सद्वारे मोजले जाऊ शकते.	हे स्प्रिंग बॅलन्सद्वारे मोजले जाते.

२.१.३अदिश आणि सदिश राशी (Scalar and Vector Quantity):

२.१.४अदिश राशी (Scalar Quantity):

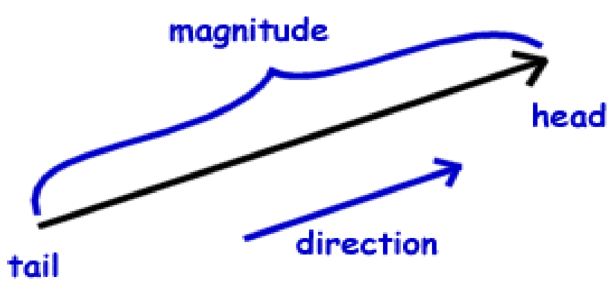
अदिश राशी हे असे आहे ज्यामध्ये केवळ परिमाण(Magnitude) आहे. उदाहरणे: वस्तुमान, परिमाण, वेळ आणि घनता.

आकृती २.२: अदिश राशी

२.१.५ सदिश राशी (Vector Quantity):

१) **सदिश राशी** (Vector Quantity) हे असे आहे ज्यात परिमाण (Magnitude) तसेच दिशा (direction) असते. उदाहरणे: बल , वेग, प्रवेग आणि क्षण इ.

सदिश राशी (Vector Quantity) हि एकरेषा आणि त्याच्या टोकाला डोक्यावर बाण असे दर्शविले जाते. रेषेची लांबी .(सोयीस्कर प्रमाणात) वेक्टरच्या विशालतेच्या बरोबरीची आहे रेषा, त्याच्या बाणाच्या डोक्यासह, वेक्टरची दिशा निश्चित करते.



.

आकृती २.३: सदिश राशी

२.१.६ मोजण्याचे एकक (Units of Measurement):

१) एकक (Unit)

भौतिक प्रमाण मोजण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या मानकांना त्या प्रमाणाचे एकक म्हणतात.

मोजण्याचे दोन एकक आहेत.

- मूलभूत (Fundamental) एकके/बेसिक (Basic) एकके.
- डिराइव्हड (Derived) एकके

२.१.७ मुलभूत एकके /बेसिक एकके (Fundamental or Basic Units):

मुलभूतपरिमाणांच्या (Fundamental Quantities) एककांना मुलभूत एकके म्हणतात. मुलभूतपरिमाण भौतिक परिमाण (Physical Quantity) आहेत, जे त्याच्या मोजमापासाठी इतर कोणत्याही भौतिक परिमाणांवर अवलंबून नाहीत. बेसिक/मुलभूतपरिमाण खालीलप्रमाणे आहेत.

टेबल 1.2 : मुलभूत एकके /बेसिक एकके.

अ. क्र.	**मुलभूत भौतिक प्रमाण**	**मुलभूत एकक**	**चिन्ह**
1	लांबी (Length)	मीटर	m
2	वस्तुमान (Mass)	किलो	kg
3	वेळ (Time)	सेकंद	s

तथापि मुलभूत /बेसिक एककांमध्ये आणखी दोन प्रमाण समाविष्ट केले (अँगल आणि सॉलिड अँगल प्लेन) .जाऊ शकतात

२.१.८ डिराइव्हड (Derived)एकके:

डिराइव्हड(Derived)परिमाणांच्या एककांना डिराइव्हड परिमाण (Derived Units)असे म्हणतात. हे भौतिक प्रमाण एक किंवा अधिक मुलभूत परिमाणाचे संयोजन (combination)म्हणून व्यक्त केले जातात.

टेबल :1.3 : डिराइव्हडएकके(Derived Units)

डिराइव्हड प्रमाण (Derived Quantity)	सुत्र (Formula)	डिराइव्हड एकके (Derived Units)
क्षेत्रफळ (Area)	लांबी × लांबी	चौरस मीटर(m^2)
आकारमान (Volume)	लांबी × लांबी × लांबी	घनमीटर(m^3)
घनता (Density)	वस्तुमान/ आकारमान	किलो/ मी ^{3}(kg/m^3)
वेग आणि स्पीड (Velocity and Speed)	लांब/वेळ	मी / से (m/s)
प्रवेग (Acceleration)	वेग /वेळ ^{2}	मी / से^{2} (m/s^2)
बल (Force)	वस्तुमान ×प्रवेग	किलोमीसे/^{2}(kgm/s^2)किंवा 'N'
ऊर्जा आणि कार्य (Energy and Work)	बल × लांबी	किलोमी^{2} /से^{2} (kgm^2/s^2)
शक्ती (Power)	ऊर्जा/ वेळ	किलोमी^{2} /से^{3} (kgm^2/s^3)
दाब आणि जोर (Pressure and Thrust)	बल/ क्षेत्र	किलोमी/ से ^{2} (kgm/s^2)
चालना (Momentum)	वस्तुमान×वेग	किलोमी/से (kgm/s)

२.१.९ एकक प्रणाली (Systems of Units):

बेसिक / मुलभूत युनिट्स आणि डिराइव्हड (Derived)युनिट्सचा संपूर्ण संच एकक प्रणाली (Systems of Units) म्हणून ओळखला जातो. वेगवेगळ्या देशांनी भौतिक प्रमाण मोजण्यासाठी वेगवेगळ्या प्रकारच्या युनिट्सचा वापर केलाजातो.

एककाच्या खालील प्रणाली वापरात आहेत.

1. **सीजीएस(C.G.S.)** प्रणाली- ते अनुक्रमे सेंटीमीटर, ग्रॅम,सेकंद आहेत.
2. **एफपीएस(F.P.S.)** प्रणाली - ते अनुक्रमे फूट, पाउंड, सेकंद आहेत.
3. **एमकेएस(M.K.S.)** प्रणाली - ते अनुक्रमे मीटर, किलोग्राम आणि सेकंद आहेत.
4. **एसआय(S.I.)** प्रणाली - ते अनुक्रमे न्यूटन, मीटर आणि सेकंद आहेत .

एसआय (S.I.) युनिट प्रणाली आता मापन करण्यासाठी जगभरात स्वीकारले गेले आहे.

२.१.१० बल(Force):

१) बलाची व्याख्या

न्यूटन च्या पहिल्या नियमानुसार स्थिर वस्तू गतिमान करण्यासाठी किंवा वस्तूची सरळ रेषेतील एकसमान गती बदलण्यासाठी लागणाऱ्या भौतिक राशीस बल असे म्हणतात.

बल या राशीस परिमाण आणि दिशा असते, म्हणून तीसदिश (वेक्टर) राशी आहे.

२) बलाची एकके(Units of Force):

बलाचे दोन सामान्यतः वापरले जाणारे एकक आहेत:

i) परिपूर्ण एकके (Absolute units of force)

ii) गुरुत्वाकर्षण एकके.(Gravitational units of force)

३) बलाचे परिपूर्ण एकक (Absolute units of force):

वस्तुमान आणि प्रवेग वेगवेगळ्या युनिट्सच्या वेगवेगळ्या प्रणालींमध्ये मोजले जातात, म्हणून खाली दिलेल्या विविध प्रणालींमध्ये बलाचीएकके देखील भिन्न आहेत:

i) **एफ.पी.एस. FPS (सेकंड-पाउंड-फूट)**प्रणालीमध्ये बलाचे परिपूर्ण एककएक पाउंड आहे. एक बल जे एक पाउंडच्या वस्तुमानात एकक गती निर्माण करते.

ii) **सी.जी.एस.CGS (सेंटीमीटर -ग्राम (सेकंड-**प्रणालीमध्ये बलाचे परिपूर्ण एकक डाइन (Dyne) आहे. एक बल जे एका ग्रॅमच्या वस्तुमानात एकक गती निर्माण करते.

iii) **एम.के.एस.MKS) मीटर -किलोग्राम (सेकंड-**प्रणालीमध्ये बलाचे परिपूर्ण एकक न्यूटन आहे. एक बल जे एक किलोच्या वस्तुमानात एकक गती निर्माण करते.

स्पष्टपणे , 1 Newton = 10^5 Dynes.

४) बलाची गुरुत्वाकर्षण एकके (Gravitational units of force):

ही एकके वस्तूच्या वजनावर अवलंबून असतात. म्हणजे, ज्या बलानेवस्तू पृथ्वीच्या केंद्राकडे आकर्षित होते.

एका वस्तूचे वजन (W) आणि त्याचे वस्तुमान 'm' असेल, म्हणजेत्या वस्तूमधील पदार्थाचे प्रमाण (W =mg), जिथे ‘g’ म्हणजे गुरुत्वाकर्षणामुळे असलेला प्रवेग आहे. म्हणून गुरुत्वाकर्षण एकके बलाच्या युनिट्सच्या तीन सिस्टीम अर्थात FPS, CGS आणि MKS मध्ये अनुक्रमे पौंड वजन, ग्राम वजन आणि किलोग्राम वजनआहे.

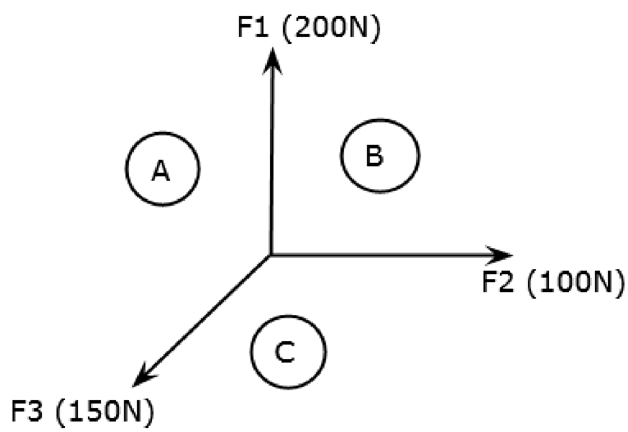
बलाच्या एककांचा संबंध खालीलप्रमाणे आहे:

i) 1 पौंड वजन (किंवा *l*bf) = 32.2 पौण्डल्स(साधारणपणे)

ii) 1 ग्रॅम वजन (किंवा gmf) = 981 डाइन (Dynes) (साधारणपणे)

iii) 1 किलोग्राम वजन (किंवा kgf) = 9.81 न्यूटन (Newton) (साधारणपणे)

२.१.११ बाऊज(Bow’s) नोटेशन: ही एक बल दर्शविण्याची पद्धत आहे ज्यामध्ये दोन कॅपिटल लेटर्स बलाच्या कोणत्याही एका बाजूने एका विशिष्ट अनुक्रमाने घड्याळाच्या दिशेने लिहले जातात जसे आकृती२.४ मध्ये दर्शविले आहे.



आकृती २.४: बाऊज(Bow’s) नोटेशन

आकृती २.४मध्ये ,

जेथे, बल F1 (200 N), ’AB’ द्वारे दर्शविले जाते

बल F2 (100 N), ‘BC’ द्वारे दर्शविले जाते आणि

बल F3 (150 N), ‘CA’ द्वारे दर्शविले जाते.

बलाचे प्रतिनिधित्व (Representation of forces):

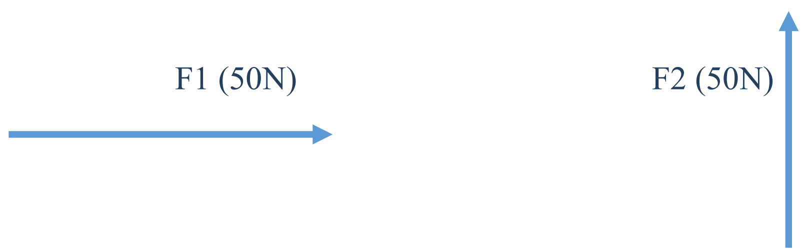
खालील दोन प्रकारे बलाचे प्रतिनिधित्व केले जाऊ शकते:

1. वेक्टर प्रतिनिधित्व (Vector Representation)

2. बाऊज (Bow's) नोटेशन.

वेक्टरप्रतिनिधित्व (Vector Representation):

एक बल आकृती२.५मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एक वेक्टर म्हणून प्रतिनिधित्व करू शकतो.



आकृती२.५: वेक्टर प्रतिनिधित्व(Vector Representation)

२.१.१२ बलाची वैशिष्ट्ये (Characteristics of a force):

1) **परिमाण (Magnitude):** हे बलाचे प्रमाण दर्शवते.(उदा. 50 N चाबल म्हणजे 50 N हा बलाचे परिमाण (Magnitude) आहे.

2) **दिशा (Direction) :** दिशा ज्या रेषेमध्ये बल कार्य करते त्या रेषेद्वारे दर्शविली जाते.

3) **बलाचे स्वरूप (Nature of Force):** बल हा धक्का (Push) किंवा खेचणे (Pull) असू शकतो.

4) **उपयोजित बिंदू (The Point of Application):** ज्या बिंदूवर (किंवा ज्या द्वारे) बल वस्तूवर कार्य करते.

२.१.१३ बलाचे परिणाम (Effect of Forces):

वस्तूमध्ये एक बल खालील प्रभाव निर्माण करू शकते, ज्यावस्तूवर ते कार्य करते:

a. वस्तूची गती बदलू शकते. उदा. जर वस्तूस्थिर असेल तर बल त्याला हलवू शकते.

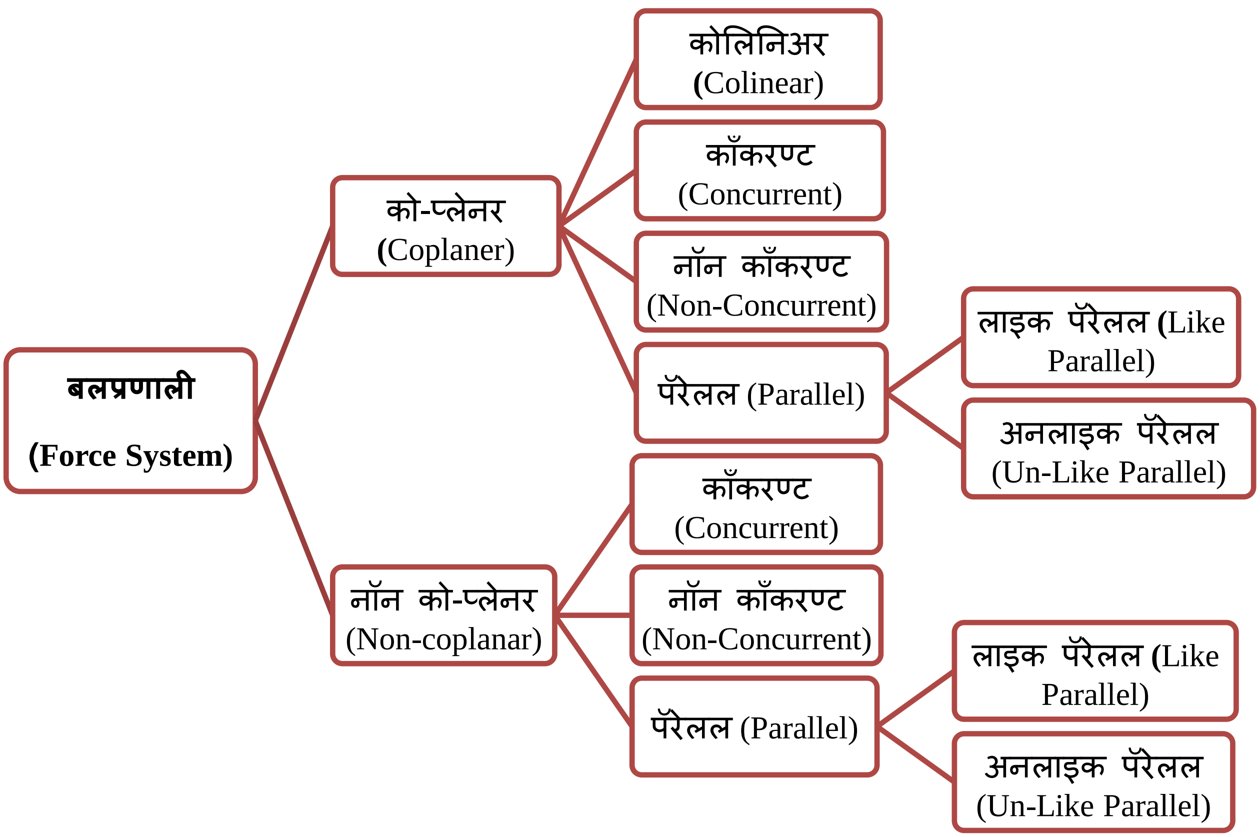
b. हे वस्तूची गती मंद किंवा गतिमान करू शकते.

c. हे वस्तूवर आधीच कार्य करत असलेल्या बलांना मंदावू शकते, त्यामुळे ते स्थिरता किंवा समतोल आणू शकते.

d. हे वस्तूतील अंतर्गत तणावांना (Internal Stresses) तयार करू शकते.

२.१.१४. बल प्रणाली (Force System):

बल प्रणाली म्हणजे एक किंवा अधिक प्लेन (Plane) मध्ये वस्तूवर कार्य करणाऱ्या बलांचा संग्रह. बलांच्या कृतीरेषेच्या सापेक्ष स्थितीनुसार(Relative Position),बलांचे खालीलप्रमाणे वर्गीकरण केले जाऊ शकते

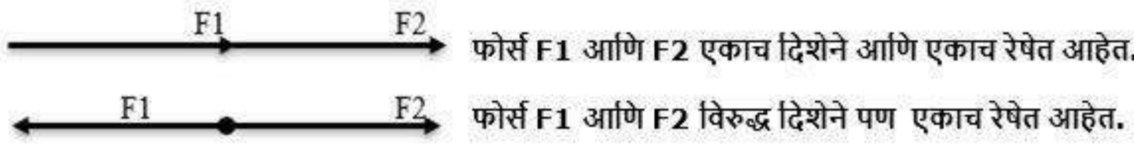


आकृती२.६: बलांचे वर्गीकरण (Classification of Forces)

1. को प्लेनर फोर्सेस-(Coplanar forces)

ज्या फोर्सेस ची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये आहे त्यांना को.प्लेनर फोर्सेस म्हणतात-कोप्लेनर फोर्सचे चार प्रकार - आहेत .

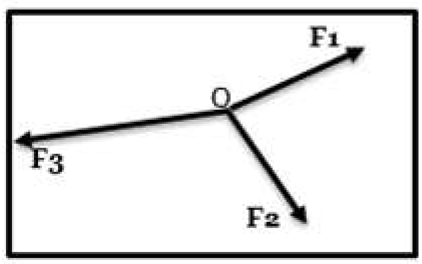
अ) **कोलिनिअर (एकरेषीय) फोर्सेस (Collinear forces)-** ज्या फोर्सेस ची कृतिरेषा एकाच रेषेमध्ये येते त्यांना कोलिनिअर (एकरेषीय)फोर्सेस म्हणतात कोलिनिअर फोर्स . सिस्टम आकृती२.७मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे आहे.



आकृती-२.७: कोलिनिअर फोर्सेस

ब) **को प्लेनर-काँकरण्टफोर्सेस (Concurrent) -** जे फोर्सेस एकाच बिंदूत भेटतात किंवा छेदतात आणि त्यांची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये असते त्या फोर्सेस ला को प्लेनर-काँकरण्टफोर्सेसम्हणतात.

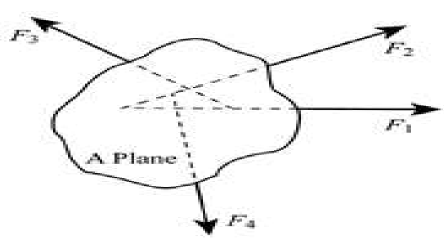
को प्लेनर-काँकरण्टफोर्सेस आकृती २.८ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे



आकृती -२.८: को प्लेनर-काँकरण्टफोर्सेस

क) **को प्लेनर-नॉन काँकरण्टफोर्सेस(Non-Concurrent)-** जे फोर्सेस एकाच बिंदूत भेटतनाही किंवा छेदतनाही परंतू त्यांची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये असते त्या फोर्सेस ला को प्लेनर-नॉनकाँकरण्ट फोर्सेस म्हणतात.

को प्लेनर-नॉन काँकरण्टफोर्सेस आकृती२.९ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे



आकृती२.९: को प्लेनर-नॉन काँकरण्टफोर्सेस

ड) **समांतर(पॅरेलल) फोर्सेस -**

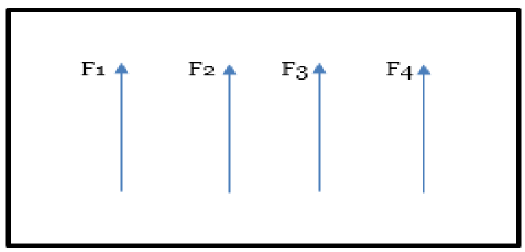
जे फोर्सेस एकाच प्लेन मध्ये लावलेले असतील आणि एकमेकांना समांतर असतील तर त्यांना समांतर फोर्सेस म्हणतात.हे फोर्सेस एकाच दिशेने किंवा विरुद्ध दिशेने असू शकतात .

समांतर फोर्सेस दोन प्रकार आहेत.

(i) लाइक पॅरेलल (Like Parallel)

ज्या फोर्सेस ची कृतिरेषा एकमेकांना समांतर असतील आणि त्यांची दिशा एकच असेल तर अशा फोर्सेस ला लाईक पॅरेलल)Like Parallel)फोर्सेसम्हणतात.

लाइक पॅरेलल (Like Parallel) फोर्सेसआकृती२.१०मध्ये दाखवल्याप्रमाणे

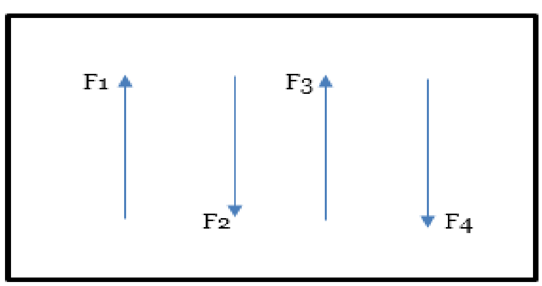


आकृती२.१०: लाइक पॅरेलल (Like Parallel)फोर्सेस

(ii) अनलाइक पॅरेलल (Un-Like Parallel)

ज्या फोर्सेस ची कृतिरेषा एकमेकांना समांतर असतील परंतू त्यांची दिशा एक नसेल तर अशा फोर्सेस ला अनलाईक पॅरेलल)Unlike Parallel)फोर्सेस म्हणतात.

अनलाईक पॅरेलल)Unlike Parallel)फोर्सेस आकृती२.११मध्ये दाखवल्याप्रमाणे,



आकृती२.११: अनलाईक पॅरेलल (Unlike Parallel) फोर्सेस

2. **नॉन प्लेनर फोर्सेस-को-(Non-Coplanar Forces) :-**

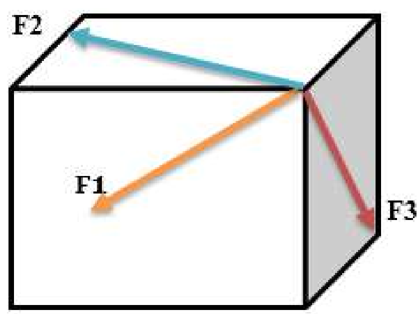
जे फोर्सेस एकाच प्लेन मध्ये नसतातम्हण)जे वेगवेगळ्या प्लेन मध्ये असतात(त्यांना नॉन कोप्लेनर फोर्सेस म्हणतात.

नॉन कोप्लेनर फोर्सेस चे तीन प्रकार आहेत

अ) नॉन प्लेनर-को-काँकरण्टफोर्सेस (Non-Coplanar Concurrent Forces): -

जे फोर्सेस एकाच बिंदूत भेटतात परंतू त्यांची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्येनसते त्या फोर्सेस ला नॉन प्लेनर-को-काँकरण्टफोर्सेसम्हणतात.

नॉन प्लेनर-को-काँकरण्टफोर्सेस आकृती२.१२मध्ये दाखवल्याप्रमाणे,

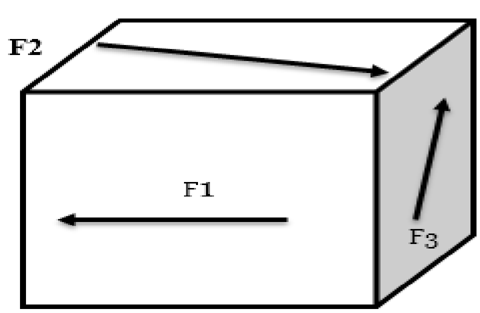


आकृती२.१२: नॉन प्लेनर-को-काँकरण्टफोर्सेस

ब) **नॉन को प्लेनर-नॉन काँकरण्टफोर्सेस (Non-Coplanar Non-Concurrent Forces):**

जे फोर्सेस एकाच बिंदूत भेटतनाही आणि त्यांची कृतिरेषा एकाच प्लेन मध्ये नसते त्या फोर्सेस ला नॉन को प्लेनर-नॉन काँकरण्टफोर्सेसम्हणतात.

नॉन को प्लेनर-नॉन काँकरण्टफोर्सेस आकृती२.१३ मध्ये दाखवल्याप्रमाणे,



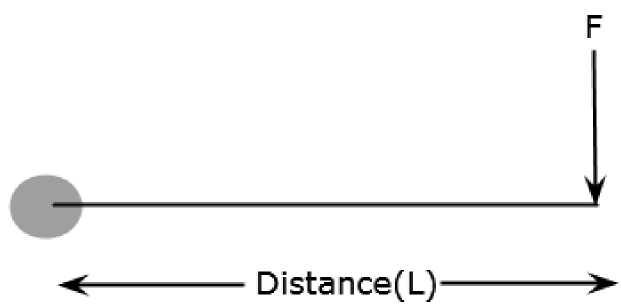
आकृती२.१३: नॉन को प्लेनर-नॉन काँकरण्टफोर्सेस

क) **नॉन को प्लेनर-पॅरेलल (Parallel)फोर्सेस -**

हे समांतर फोर्सेस आहेत ,जे एकाच प्लेन मध्ये नसतात   म्हणजे वेगवेगळ्याप्लेन मध्ये असतातआणि ते एकाच दिशेने किंवा वेगवेगळ्या बिंदूवर वेगवेगळ्या दिशेने कार्य करत असतातजे फोर्सेस एकाच दिशेने कार्य . करत असतात त्यांना लाईक पॅरेलेल फोर्सेस म्हणतात आणि जे विरुद्ध दिशेने कार्य करत असतात त्यांना .अनलाइक पॅरेलेल फोर्सेस म्हणता.

२.२ बलाचा मोमेन्ट(Moment of a Force)

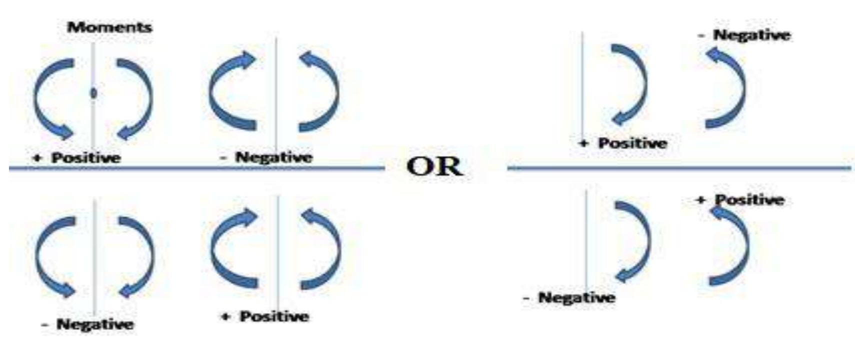
बलाचा मोमेन्ट हा त्याच्या रोटेशनल प्रभावाचे मोजमाप आहे. हे बलाच्या परिमाण (Magnitude) आणि बलाच्या क्रियेच्या लंबवत अंतराचे (Perpendicular Distance) म्हणून परिभाषित केले जाते. बलाचा मोमेन्ट हाबल आणि त्या मधील बिंदूच्या लंबवत अंतराचा (Perpendicular Distance) गुणाकार असतो हे आकृती २.१४ मध्ये दर्शवलेआहे.



आकृती.२.१४: बलाचा मोमेन्ट

बलाचा मोमेन्ट = बल(Force) ×लंबवत अंतर (Perpendicular Distance)

Moment = F× L



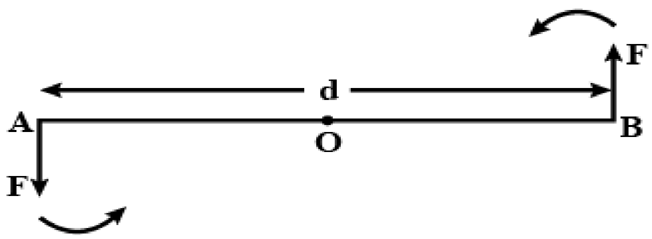
आकृती२.१५: साइन कन्व्हेन्शन

वरील आकृती२.१५मध्ये बलाच्या मोमेन्टचे साइन कन्व्हेन्शन दाखवलेले आहे.

जर,बल न्यूटन (N) आणि अंतर मिलिमीटरमध्ये (mm) घेतले तर मोमेंटचे एकक न्यूटनएम एम (N-mm) असेल.अभियांत्रिकीमध्ये मोमेंटचेसामान्यतः वापरले जाणारे एकक किलो न्यूटनएम-एम (kNmm), न्यूटन मिटर (N-m) आणि न्यूटन-एमएम (N-mm) आहेत.

२.२.१ कपल (Couple)

दोन समान, विपरीत, समांतर, नॉन कॉलिन फोर्स एक जोडपे बनवतात. बल समान आणि विरुद्ध असल्यामुळे त्यांचे परिणामशून्य आहे. त्यामुळे कपल फक्त रोटरी गती तयार करतात.



आकृती२.१६: कपल

२.२.१कपलचे वैशिष्ट्ये (Characteristics of Couple)

१) परिमाण- कपलचे परिमाण हे कपलने तयार केलेले मोमेन्ट असते.

२) कपलचा लीव्हर आर्म- कपच्या दोन बलामधील अंतर लीव्हर आर्म किंवा आर्म ऑफ कपल म्हणून ओळखले जाते.

३) कपलचे प्रकार

- घड्याळाच्या दिशेने कपल सकारात्मकमोमेन्ट देईल.

- घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने जोडपे नकारात्मक मोमेन्ट निर्माण करतील.

२.२.२कपलचे गुणधर्म

(१) कपलच्या बलाचा परिणाम शून्य आहे, म्हणजे R= P-P = 0.

(२) कपलचा मोमेन्ट बला पैकी एकाच्या गुणाकाराच्या बरोबरीचा असतो, म्हणजे,

M = P x a.

(३) कोणत्याही ठीकनि कपलचा मोमेन्ट स्थिर असतो.

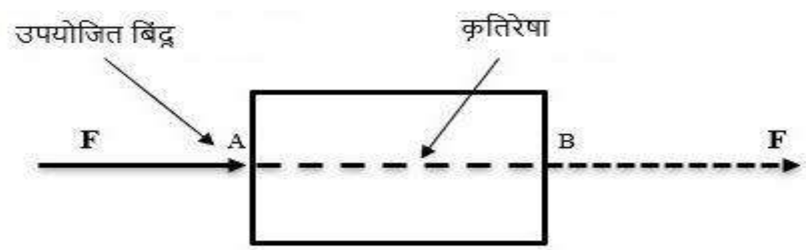
(४) दोन किंवा अधिक कपला समान संवेदना आणि समान मोमेन्ट असल्यास समान कपल म्हटले जाते.

(५) एकल कपलद्वारे कितीही कॉप्लॅनर जोडप्यांचे प्रतिनिधित्व केले जाऊ शकते. मोमेन्टची बीजगणितीय बेरीज सर्व कपलच्या मोमेन्टच्या बरोबरीची असते.

२.३. बलाशी सम्बधित प्रमेय(Laws related to forces)

२.३.१ बलाची संक्रमणीयता (Transmissibility of a force):

हे असे सांगते की, " जर एखादे बल रिजिड वस्तूवर कोणत्याही एका बिंदूवर लागत असेल , तर ते बल त्याच्या कृतीरेषेवरील (Line of Action) कोणत्याही दुसऱ्या बिंदूवर विचारात घेतला जाऊ शकतो. फक्त तो दुसरा बिंदू रिजिड वस्तुशी संबंधित असावा ".

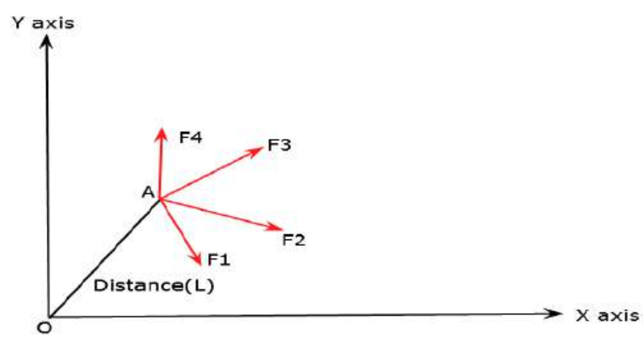


आकृती२.१७: बलाची संक्रमणीयता (Transmissibility of a force)

जर आपण बल 'F' ला बिंदू A वरून बिंदू B वर नेले जे F च्या कृतीरेषेवर आहे , तर समान परिणाम अपेक्षित असेल.

२.३.२: व्हेरिग्ननचे प्रमेय (Varignon's Theorem)

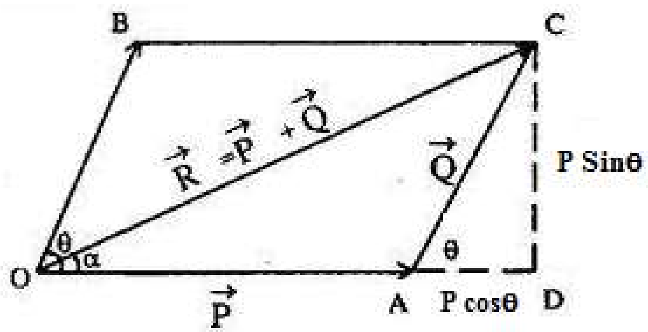
कॉंकरण्ट बल (Concurrent forces)प्रणालीच्या एका बिंदूबद्दलच्या मोमेन्टची बीजगणितीय बेरीज (Algebraic sum) ही एकाच बिंदूबद्दल या सर्व बलाच्यामोमेन्टचा रिझल्टन्ट आहे.



आकृती२.१८: व्हेरिग्ननचे प्रमेय

२.३.३.बलाचासमांतरभुजचा नियम (Parallelogram law of Forces)

बलाच्या समांतरभुज नियमात असे नमूद केले आहे की, “जर एका वस्तूवर (On a particle) एकाच वेळी कार्य करणाऱ्या दोन बलाला समांतर चतुर्भुजच्या (Parallelogram) दोन समीप बाजूंनी (Two side) परिमाण (Magnitude) आणि दिशेने (In the direction) प्रतिनिधित्व केले जातअसेल तर, त्याचारिझल्टन्टसमांतर चतुर्भुजच्या कर्णाच्या (Diagonal) परिमानाणे आणि दर्शविला जातो;जो कि बलाच्या विरुध्द दिशेने असतो”.खालील आकृती २.१९मध्ये बलाचा समांतरभुजचा नियम दाखवलेला आहे. तसेच बल P आणि Q मधीलकोन‘θ’आहे



आकृती२.१९: बलाचासमांतरभुजचा नियम

गणितीय पद्धतीने (Mathematically) ;रिझल्टन्ट(R)= $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

येथे P आणि Q दोन बल आहेत रिझल्टन्ट ची दिशा(α)नेदिली जाते.

रिझल्टन्टची दिशा(α) $= \tan^{-1}\left|\frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}\right|$

बलाच्यासमांतरभुज नियमाच्या मर्यादा :

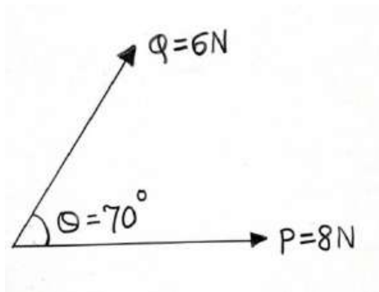
1. हे केवळ वस्तूवर कार्य करणाऱ्या दोन बलाना लागू आहे.

2. बल काँकरण्ट (Concurrent) असणे आवश्यक आहे.

उदाहरणे:बलाचासमांतरभुजचा नियम

उदाहरणक्र.-01

दोन बल 8N आणि 6N हे एका वस्तूवर(A particle) त्यांच्या क्रियेच्या (With their line of action) रेषेसह70 च्या कोनात झुकलेले आहे (Inclined), तर रिझल्टन्टची (R)मॅग्निट्यूड (Magnitude) आणिदिशा (Direction) शोधा.



आकृती२.२०: बलाचा समांतरभुजचा नियम

दिलेलीमाहिती : P = 8N, Q = 6N, $\theta = 70^0$

शोधा: रिझल्टन्टची (R) मॅग्निट्यूड (Magnitude) आणिदिशा (Direction) शोधा.

उत्तर : वरील आकृती **3.6** मध्ये वस्तुवर लागु होणारे बल दाखवलेले आहे आपल्याला माहित आहे की,

रिझल्टन्ट (R) = $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

R= $\sqrt{8^2 + 6^2 + 2 \times 8 \times 6 \cos 70^0}$

R= $\sqrt{64 + 36 + 96 \cos 70^0}$

R= $\sqrt{100 + 96 \cos 70^0}$

R= $\sqrt{132.83}$

R=11.53N ……………………………………….उत्तर

रिझल्टन्ट ची दिशा (α)

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{Q \sin\theta}{P + Q\cos\theta} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{6 \sin 70}{8 + 6\cos 70} \right|$$

$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{5.63}{10.05} \right|$

$\alpha = \tan^{-1} | 0.56 |$

$\boldsymbol{\alpha = 29.75^0}$ **..उत्तर**

उदाहरणक्र.-02

दोन कॉँकरण्ट200N बलासाठी आणि त्यांच्या 150N रिझल्टन्टसाठीचाकोन शोधा.

दिलेलीमाहिती: बलP = Q= 200N

शोधा: बला-मधील कोन(θ).

उत्तर **:** आपल्याला माहित आहे की,(R) = $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$

$150 = \sqrt{[100^2 + 100^2 + 2 \times 100 \times 100 \cos \theta]}$

$150^2 = [100^2 + 100^2 + (2 \times 100 \times 100 \cos \theta)]$

$22500 = 20000 + (20000 \cos \theta)$

$2500 = 20000 \cos \theta$

$\cos \theta = (2500/20000)$

$\cos \theta = 0.125$

$\theta = \cos^{-1}(0.125)$

$\theta = 82.82^0$

बला-मधील कोन (θ) = 82.82^0 ....**उत्तर**

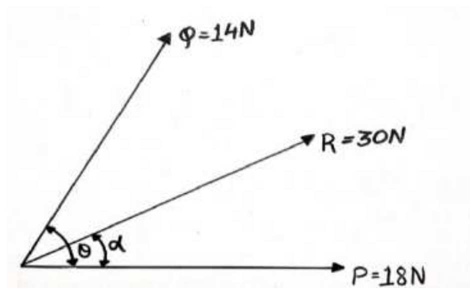
उदाहरणक्र.-03

18 Nआणि 14 Nहे दोन बल अशा वस्तूवरलागु होत आहेत की त्यांचा रिझल्टन्ट30N आहे,तर त्यांच्याबला-मधील कोनआणि रिझल्टन्टची दिशाशोधा.

दिलेलीमाहिती: बल P =18 N, Q =14 N, R= 30 N

शोधा: 1. बला-मधील कोन (θ).

2.रिझल्टन्टची दिशा (α)



आकृती२.२१: बलाचा समांतरभुजचा नियम

उत्तर : वरील आकृती **2.21** मध्ये वस्तुवर लागु होणारे बल दाखवलेले आहे,आपल्याला माहित आहे की,

रिझल्टन्ट (R) = $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

$30 = \sqrt{18^2 + 14^2 + 2 \times 18 \times 14 \cos\theta}$

$30^2 = [18^2 + 14^2 + (2 \times 18 \times 14 \cos\theta)]$

$900 = 520 + (504 \cos\theta)$

$380 = 504 \cos\theta$

$\cos\theta = (380/504)$

$\cos\theta = 0.75$

$\theta = \cos^{-1}(0.75)$

$\theta = 41.06^0$

बला-मधील कोन (θ) = 41.06^0 ....उत्तर

रिझल्टन्टची दिशा($\boldsymbol{\alpha}$)= $\tan^{-1} \left| \frac{Q \sin \theta}{P+Q \cos \theta} \right|$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{14 \sin 41.06}{18+14 \cos 41.06} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{9.20}{28.56} \right|$$

$$\alpha = \tan^{-1} | 0.32]$$

$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{17.74}^0$....................................उत्तर

उदाहरणक्र.-04

जर दोन समानबलआणि त्यांचा रिझल्टन्ट**P** देखीलबरोबरअसतील ,तर **P** मधील कोन शोधा.

दिलेलीमाहिती: बल P= Q = P (Newton)मध्येआणिरिझल्टन्ट (R) = P (Newton)मध्ये

शोधा: 1.बला-मधील कोन(θ).

उत्तर : आपल्याला माहित आहे की,

रिझल्टन्ट(R) = $\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$

$$P = \sqrt{P^2 + P^2 + 2 \times P \times P \cos \theta}$$

$$P = \sqrt{2P^2 + 2P^2 \cos \theta}$$

$$P^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos \theta$$

$$-P^2 = 2P^2 \cos \theta$$

$$-(1/2) = \cos \theta$$

$$\text{Cos}\,\theta = -0.5$$

$$\theta = \cos^{-1}(-0.5)$$

$\boldsymbol{\theta}$ = 120^0....................................उत्तर

२.३.४ त्रिकोणाचा नियम (Law of Triangle)

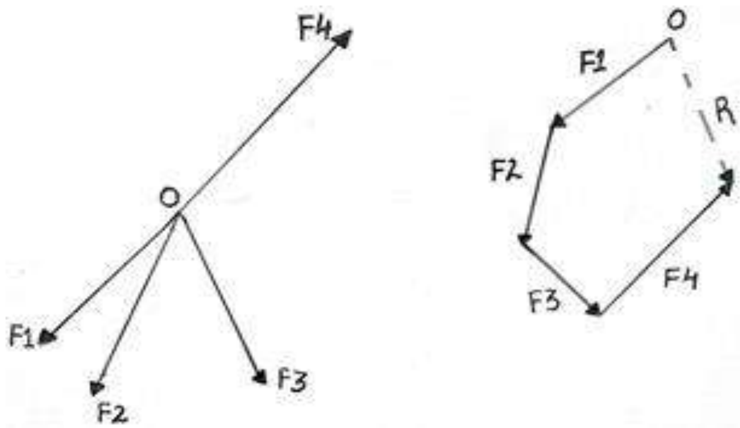
त्रिकोणाच्या नियमामध्ये असे नमूद केले आहे की, "जर दोन बल त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या परिमाण आणि दिशेने दर्शविली गेली असतीलतर बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजूने विरुद्ध दिशेने मिळू शकतो". खालील आकृती २.२२मध्ये दोन बल P आणि Q त्रिकोणाच्या दोन बाजूंनी परिमाण आणि दिशेने दर्शविला आहे आणि बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट त्रिकोणाच्या तिसऱ्या बाजूने दर्शविलाआहे, जो P & Q च्या विरुद्ध दिशेने (Opposite Direction) आहे.

आकृती२.२२: त्रिकोणाचा नियम

जेव्हा वस्तूवर कार्य करणारे बल दोनपेक्षा जास्त असतात, तेव्हा त्रिकोणाचा नियमपॉलीगोन**च्या**नियमापर्यंत वाढवता येतो.

२.३.५पॉलीगोन चा नियम(Polygon Law)

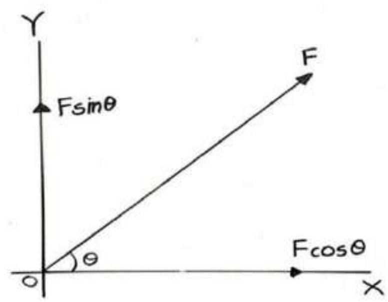
पॉलीगोनच्या नियमामध्ये असे नमूद केले आहे की, “जर एका वस्तूवर एकाच वेळी कार्य करणारी अनेक कोप्लेनर-काँकरण्ट बल एका बहुभुजाच्या बाजूने परिमाण आणि दिशेने दर्शविली आणि क्रमाने घेतली गेलीअसतीलतर, त्याबल प्रणालीचा रिझल्टन्टबहुभुजाच्या बाजूने परिमाण आणि दिशेने बंद करून दर्शविला जातो;जो कि बलाच्या विरुध्द दिशेने असतो”.खालील 2.23 आकृतीत कोप्लेनर-(Coplanar) काँकरण्ट बल एका वस्तूवर एकाच वेळी कार्य करतात आणि ते बहुभुजाच्या बाजूंनी परिमाण आणि दिशेने दर्शविले जातात, येथे बल प्रणालीचा रिझल्टन्टबहुभुजाच्या बाजूने परिमाण आणि दिशेने बंद करून (Closed) विरुध्द दिशेने (Opposite direction) दर्शविले आहे.



आकृती२.२३:पॉलीगोन चा नियम

२.४ बलाचे रिझोल्युशन (Resolution of Force)

दोन किंवा अधिक बल शोधण्याच्या प्रक्रियेला ज्याचा परिणाम वस्तूवर कार्य करणाऱ्या बलाप्रमाणेच होईलत्याला बलाचे रिझोल्युशन (Resolution of Force)असे म्हणतात. हे आकृती 2.24 मध्ये दाखवले आहे. येथे F हे बल आहे. जे $F\sin\theta$ आणि $F\cos\theta$ सारख्या दोन लंब घटकांमध्ये (Perpendicular components) सोडवले जाते.येथे θ हा x-axis च्या सोबत रिझल्टन्टने केलेला कोन आहे.

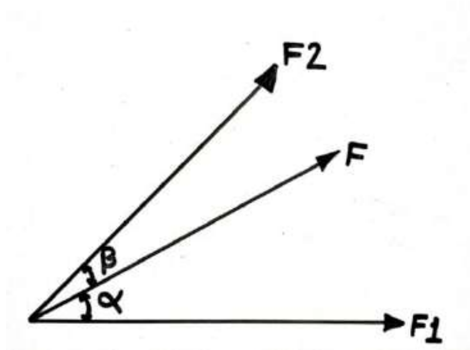


आकृती.२.२४: बलाचे रिझोल्युशन

२.४.१:नॉन लंब बल प्रणाली (Non perpendicular force system.)

यामध्ये सहसा बल आणि बला दरम्यान चे कोन दिले जातात आणि सहसा आपल्याला $\mathbf{F_1}$च्या दिशेचा बलआणि$\mathbf{F_2}$च्या दिशेचा बल शोधणे आवश्यक असते.

समजा F हि बल प्रणाली आकृती२.२५ मध्ये दिलेली आहे.



आकृती.२.२५ : नॉन लंब बल प्रणाली

आकृती 3.10:रिझल्टन्ट आणि त्याचे नॉन-ऑर्थोगोनल (Non orthogonal) घटक (Component)

α = F आणि F_1मधील कोन (angle)

β = F आणि F_2मधील कोन

$\mathbf{F_1}$च्या दिशेचा बल $\mathbf{F_1}=\left[\frac{\mathbf{F \sin \beta}}{\mathbf{\sin (\alpha+ \beta)}}\right]$

$\mathbf{F_2}$ च्या दिशेचा बल $\mathbf{F_2}=\left[\frac{\mathbf{F \sin \alpha}}{\mathbf{\sin (\alpha+ \beta)}}\right]$

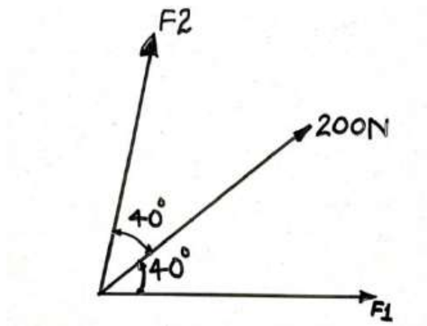
२.५बलाचे कॉम्पोसिशनं(Composition of Force)

रिझल्टन्टशोधण्याच्या प्रक्रियेला बलाचे कॉम्पोसिशनंअसे म्हणतात.एकाच बलाचा शोध घेणे शक्य आहे ज्याचा परिणाम वस्तूवर कार्य करणाऱ्या अनेक बलाप्रमाणे असे.त्याएकचबलाला रिझल्टन्ट असे म्हणतात.

उदाहरणे: नॉन लंब बल प्रणाली

उदाहरणक्र.- 01

200 N चा बल जो दोन्ही बाजूंच्या दोन दिशांना प्रत्येकी 40^0च्या कोनात कार्य करतो, तरत्या बलाचे घटक शोधा.



आकृती२.२६: रिझल्टन्ट आणि त्याचे नॉन-ऑर्थोगोनल घटक

दिलेलीमाहिती: बलF = 200 N आणि$\alpha = \beta = 40^0$

शोधा: **F_1**च्या दिशेचा बलआणि**F_2**च्या दिशेचा बल

उत्तर : आपल्याला माहित आहे की,

$$F_1 = \left[\frac{F \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right]$$

$$F_1 = \left[\frac{200 \sin 40}{\sin(40+40)}\right]$$

$$F_1 = \left[\frac{200 \sin 40}{\sin 80}\right]$$

F_1 = 130.54N ……………………………….उत्तर

$$F_2 = \left[\frac{F \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\right]$$

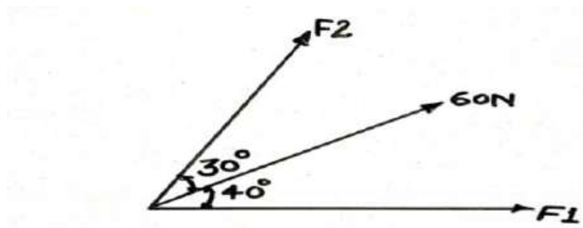
$$F_2 = \left[\frac{200 \sin 40}{\sin(40+40)}\right]$$

$$F_2 = \left[\frac{200 \sin 40}{\sin 80}\right]$$

F_2 = 130.54N ……………………………….उत्तर

उदाहरणक्र.- 02

60 N च्या बलाचे दोन बाजूंनी 40^0आणि 50^0 मध्ये दोन्ही बाजूंनी रिझोल्युशन करा.



आकृती२.२७: रिझल्टन्ट आणि त्याचे नॉन-ऑर्थोगोनल घटक

दिलेलीमाहिती: बल F= 60 N,$\alpha = 40^0$आणि $\beta = 30^0$

शोधा: F_1च्या दिशेचा बल आणिF_2च्या दिशेचा बल

उत्तर : आपल्याला माहित आहे की,

$$F_1 = [\frac{F \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}]$$

$$F_1 = [\frac{60 \sin 30}{\sin (40 + 30)}]$$

$$F_1 = [\frac{60 \sin 30}{\sin 70}]$$

F_1 = 31.93N ………………………………..उत्तर

$$F_2 = [\frac{F \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}]$$

$$F_2 = [\frac{60 \sin 40}{\sin(40 + 30)}]$$

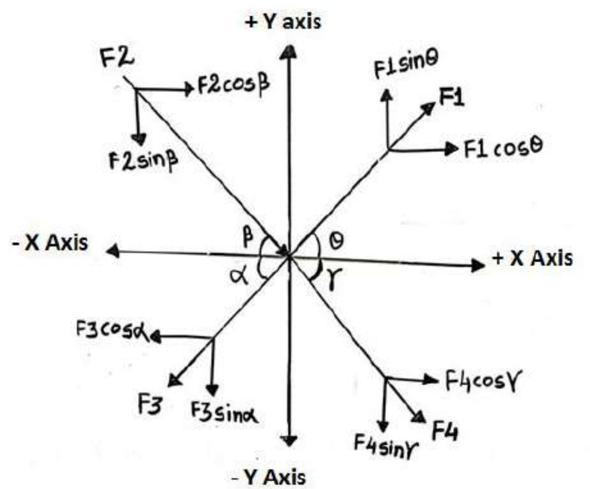
$$F_2 = [\frac{60 \text{ Sin} 40}{\text{Sin } 70}]$$

F_2= 41.02N………………………………..उत्तर

२.५.१ कॉंकरण्ट, नॉनकॉंकरण्टआणि पॅरेललकोप्लेनर-बल सिस्टमसाठी रिझल्टन्ट निश्चित करण्याची विश्लेषणात्मक पद्धत(Analytical Method of Determination of Resultant for Concurrent, Non Concurrent and Parallel Co-Planer Force System)

कॉंकरण्ट, नॉनकॉंकरण्ट आणि पॅरेलल कोप्लेनर-बल सिस्टीमचारिझल्टन्ट खालील चरणांद्वारे (Step) सहजपणे शोधला जाऊ शकतो.

स्टेप1: आकृती २.२८मध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या (Horizontal) आणि उभ्या घटकांकडे (Vertical) झुकलेल्या (Inclined) सर्व बलाचे निराकरण (Resolve) करा.

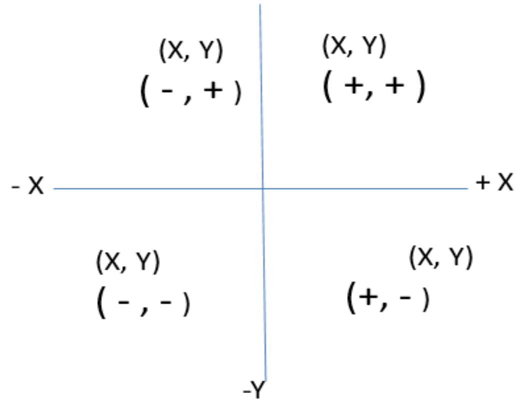


आकृती२.२८: रिझोल्युशनचे ऑर्थोगोनल घटक.

स्टेप 2: ΣFx आणि ΣFy शोधा.

स्टेप 3: Σ Fx आणि ΣFy च्या मदतीने, रिझल्टन्ट(R) चीमॅग्निट्यूडआणि दिशा (Direction)शोधा.

स्टेप 4: कार्टेशियन कोऑर्डिनेट सिस्टम च्या साइन कन्व्हेन्शनचा विचार करून चतुर्भुज (Coordinate) मध्ये रिझल्टन्ट शोधा.



आकृती२.२९: कार्टेशियन कोऑर्डिनेट सिस्टम

स्टेप 5: गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बल एक्स-अक्षकडे (x-axis) झुकलेली आहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.

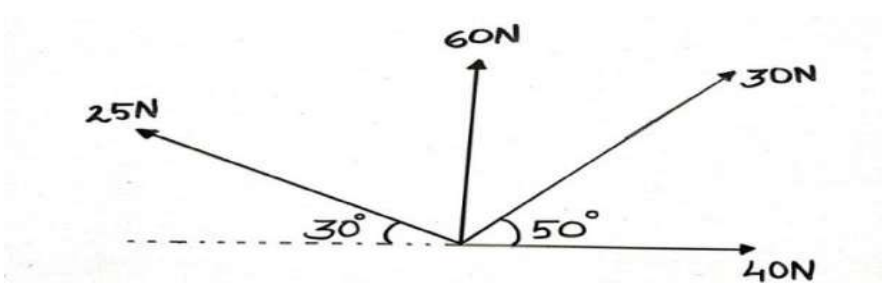
$$R = \sqrt{(\Sigma Fx)^2 + (\Sigma Fy)^2}$$

स्टेप **6**:रिझल्टन्टची दिशा(θ) = $\tan^{-1}\left|\frac{\Sigma Fy}{\Sigma Fx}\right|$

उदाहरणे : रिझोल्युशन (Resolution) आणिकॉम्पोसिशन (Composition)

उदाहरणक्र.- 01

खालील बल प्रणालीच्या रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूड आणिदिशा शोधा



आकृती२.३०: बल प्रणाली

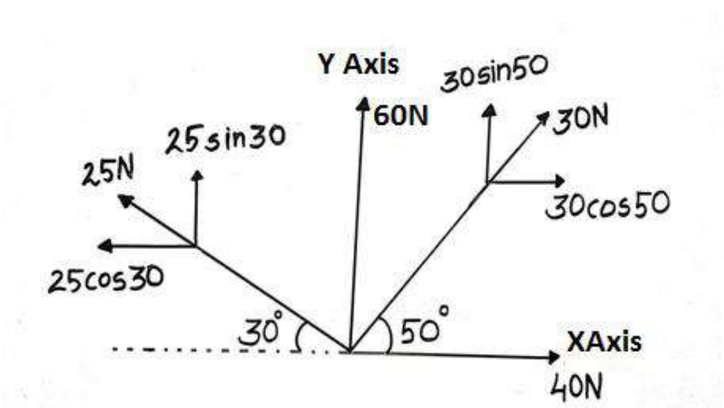
दिलेलीमाहिती : तीन बल F_1=30N, F_2= 60N आणि F_3 = 25 Nआणि x-axis च्या संदर्भात त्यांचा कोन

दिलेला आहे

शोधा : रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूड आणिदिशा.

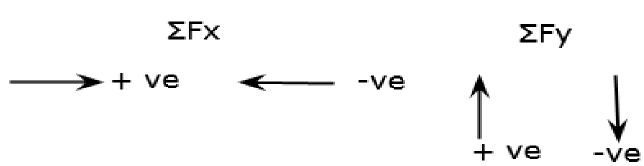
उत्तर : संख्यात्मक गुंतागुंतीची बल प्रणाली(The complex force system)खालील दृष्टिकोनाने सोडवता येते

स्टेप 1: प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या आणि उभ्या घटकांकडे झुकलेल्या सर्व बलाचेनिराकरण करा.



आकृती२.३१: रिझोल्युशनचे ऑर्थोगोनल घटक

स्टेप**2:**ΣFx आणि ΣFy शोधा, येथे एक अतिशय महत्वाच्या गोष्टी म्हणजे साइन कन्व्हेन्शनजे खालीलप्रमाणे



आहे.

आताΣFx शोधूया

$$\Sigma Fx = 40 + 30\cos 50 - 25\cos 30$$

$$\Sigma Fx = 40 + 19.28 - 21.65$$

$$\mathbf{\Sigma Fx = 37.63\ N}$$

त्याच प्रकारे आपण **ΣFy** शोधूया,

$$\mathbf{\Sigma}\mathrm{Fy} = 30\sin 50 + 60 + 25\sin 30$$

$$\Sigma\mathrm{Fy} = 22.98 + 60 + 12.5$$

$$\mathbf{\Sigma Fy = 95.48\ N}$$

स्टेप **3:**Σ Fx आणिΣFy च्या मदतीने, रिझल्टन्ट“R” चीमॅग्निट्यूडआणि दिशा शोधा.

स्टेप**4:** गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बल एक्स-अक्षकडे झुकलेली आहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.

R= $\sqrt{(\mathbf{\Sigma}\ \mathrm{Fx})^2 + (\mathbf{\Sigma}\ \mathrm{Fy})^2}$

R= $\sqrt{(37.63)^2 + (95.48)^2}$

R= $\sqrt{10532.44}$

R=102.63N. ....**उत्तर**

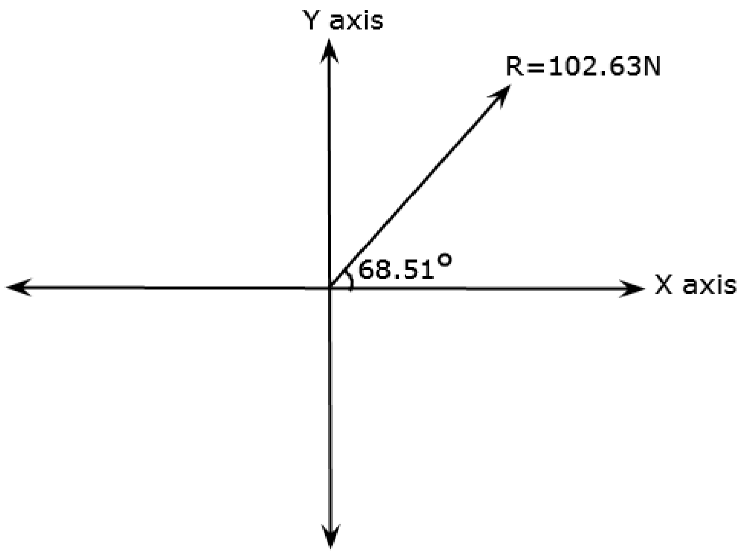
$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\mathbf{\Sigma Fy}}{\mathbf{\Sigma Fx}}\right|$$

$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{95.48}{37.63}\right|$

$\theta = \tan^{-1}[\,2.54\,|$

$\theta = \mathbf{68.51^0}$ ....**उत्तर**

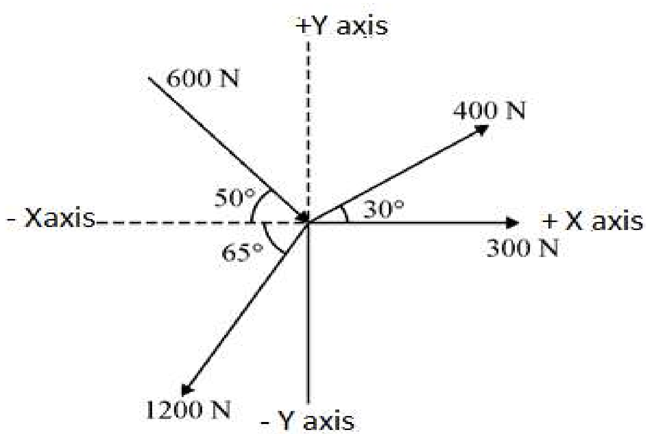
स्टेप**5 :**ΣFx आणिΣFy दोन्हीसकारात्मक (Positive)आहेत,म्हणूनरिझल्टन्ट (R) पहिल्याचतुर्थांशात (First Quadrant)x-axis सह 68.51^0कोनबनवेल.



आकृती२.३२: रिझल्टन्टचि मॅग्निट्यूड आणिदिशा

उदाहरणक्र.- 02

एक कॉंकरण्टबल प्रणाली आकृती 3.19 मध्ये दर्शविली आहे तर रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूड आणिदिशाशोधा.



आकृती२.३३ रिझोल्युशनचे ऑर्थोगोनल घटक

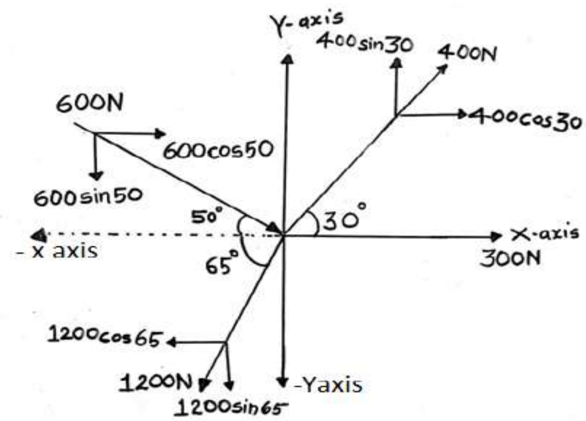
दिलेलीमाहिती : चारबल; **F_1= 300N, F_2= 400N, F_3 = 600N (Push) and F_4 =1200 N** आणि

xआणि **y-axis** च्या संदर्भात त्यांचे कोन दिले आहेत.

शोधा : रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूड आणिदिशा.

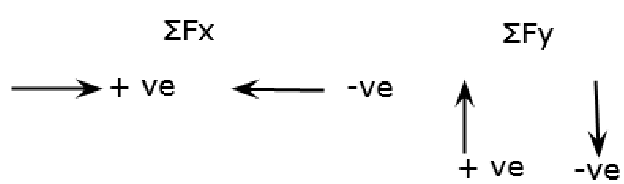
उत्तर : संख्यात्मक गुंतागुंतीची बल प्रणाली खालील दृष्टिकोनाने सोडवता येते.

स्टेप 1: प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या आणि उभ्या घटकांकडे झुकलेल्या सर्व बलाचे निराकरण करा.गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बलंx-अक्षाकडे झुकलेली आहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.



आकृती२.३४: रिझोल्युशनचे ऑर्थोगोनल घटक.

स्टेप 2:ΣFx आणि ΣFy शोधा, येथे एक अतिशय महत्वाच्या गोष्टी म्हणजे साइन कन्व्हेन्शन जे खालीलप्रमाणे आहे



आकृती 3.21: साइन कन्व्हेन्शन

आताΣFx शोधूया

$$\Sigma Fx = 300 + 400\cos 30 + 600\cos 50 - 1200\cos 65$$

$$\Sigma Fx = 300 + 346.41 + 385.67 - 507.14$$

$$\Sigma Fx = 524.94\ N$$

त्याच प्रकारे आपण **Σ**Fyशोधूया

$$\mathbf{\Sigma}\text{Fy} = 400 \sin 30 - 600 \sin 50 - 1200 \sin 65$$

$$\Sigma\text{Fy} = 200 - 459.63 - 1087$$

$$\Sigma\text{Fy} = -1347.2 \text{ N}$$

स्टेप3**:**Σ Fx आणि ΣFy च्या मदतीने, रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडआणि दिशा शोधा. कार्टेशियन कोऑर्डिनेट सिस्टम साइन कॉन्व्हेन्शनचा विचार करून चतुर्भुज मध्ये रिझल्टन्ट शोधा.

R= $\sqrt{(\mathbf{\Sigma}\text{ Fx})^2 + (\mathbf{\Sigma}\text{ Fy})^2}$

R= $\sqrt{(524.94)^2 + (-1347.2)^2}$

R=1445.86 N……………………………….उत्तर

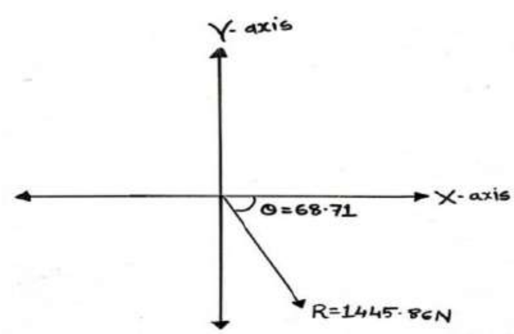
स्टेप4**:** रिझल्टन्टची दिशा$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\mathbf{\Sigma Fy}}{\mathbf{\Sigma Fx}}\right|$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-1347.2}{524.94}\right|$$

$\theta = \tan^{-1}|-2.57|$

$\theta = \mathbf{68.71}^{0}$**……………………………….उत्तर**

स्टेप 5:ΣFx सकारात्मक (Positive) आहेआणिΣFy ऋणात्मक (Negative) आहे,म्हणूनरिझल्टन्ट (R) चौथ्याचतुर्थांशात (Fourth Quardrant) मध्ये असेल,जो x-axis सहरिझल्टन्ट 68.71^{0}चाकोनबनवेल.



आकृती२.३५: रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूड आणिदिशा

उदाहरणक्र.- 03

खालीलबलप्रणालीच्यारिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडआणिदिशाशोधा

(i) 90N जे 30^0 ईशान्यदिशेने (North of East).

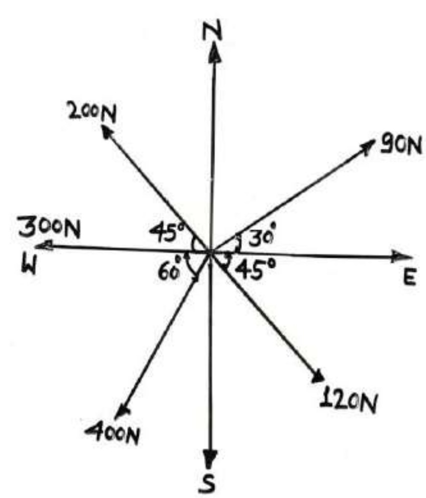
(ii)200N जे 45^0 वायव्य (West of North).

(iii) 300N जे पश्चिम दिशेने (towards West.).

(iv) 400 N जे 30^0 नैऋत्यदिशेने (West of South).

(v)120N जे आग्नेयदिशेने (South of East).

दिलेलीमाहिती :पाच बल **F_1= 90N, F_2 = 200N, F_3 = 300N F_4 = 400 N & F_5 =120 N.**

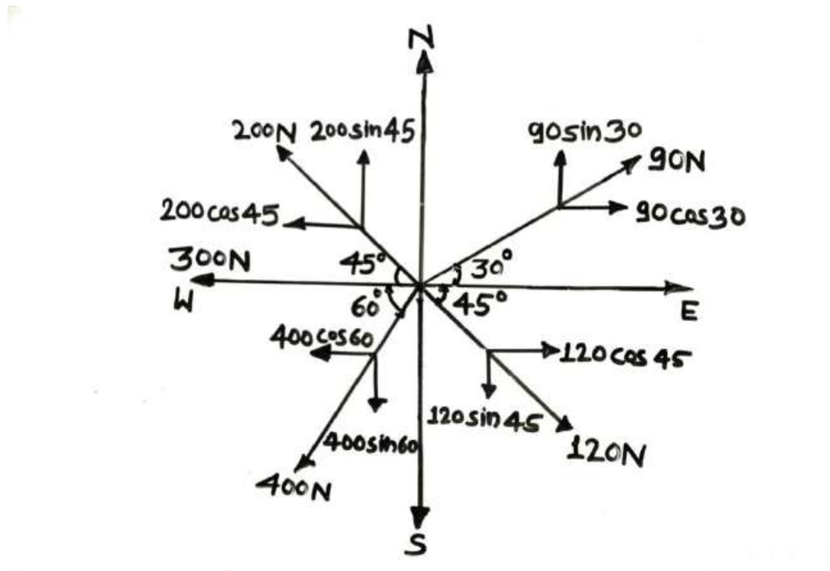


आकृती२.३६: बल प्रणाली.

शोधा : रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडआणिदिशा.

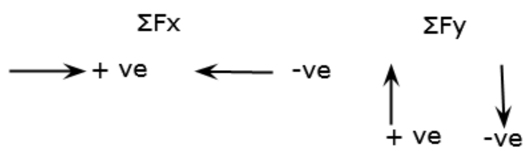
उत्तर : संख्यात्मक गुंतागुंतीची बल प्रणाली खालील दृष्टिकोनाने सोडवता येते.

स्टेप 1: प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या आणि उभ्या घटकांकडे झुकलेल्या सर्व बलाचे निराकरण करा.गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बल x-अक्षकडे झुकलेली आहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.



आकृती२.३७: रीझोल्यूशन चे ऑर्थोगोनल घटक.

स्टेप **2:**ΣFx आणि ΣFy शोधा, येथेएकअतिशयमहत्वाच्यागोष्टम्हणजे साइन कन्व्हेन्शनजेखालीलप्रमाणे आह



आताΣFx शोधूया

$$\Sigma F = 90\cos 30 - 200\cos 45 - 300 - 400\cos60 + 120\cos45$$

$$\Sigma Fx = 77.94 - 141.42 - 300 - 200 + 84.85$$

$$\mathbf{\Sigma Fx = -478.63\ N}$$

त्याच प्रकारे आपण **Σ**Fy शोधूया

$$\Sigma Fy = 90\sin 30 + 200\sin 45 - 400\sin 60 - 120\sin45$$

$$\Sigma Fy = 45 + 141.42 - 346.41 - 84.85$$

$$\mathbf{\Sigma Fy = -244.84\ N}$$

स्टेप **3:**ΣFx आणिΣFy च्या मदतीने, रिझल्टन्ट “R” चीमॅग्निट्यूडआणि दिशाशोधा.कार्टेशियनकोऑर्डिनेटसिस्टमसाइनकॉन्व्हेन्शनचाविचारकरूनचतुर्भुजमध्येरिझल्टन्ट शोधा

$$R=\sqrt{(\Sigma Fx)^2+(\Sigma Fy)^2}$$

$$R=\sqrt{(-478.63)^2+(-244.84)^2}$$

R= 537.62 N.......................................उत्तर

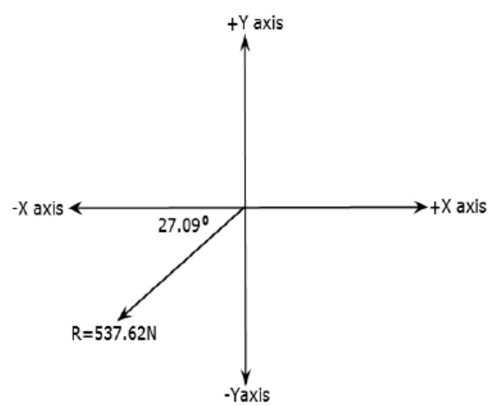
स्टेप **4:** रिझल्टन्टची दिशा$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{\Sigma Fy}{\Sigma Fx}\right|$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{-244.84}{-478.63}\right|$$

$$\theta = \tan^{-1}|0.51|$$

$\theta = \mathbf{27.09^{0}}$ **.......................................उत्तर**

स्टेप**5** :ΣFx आणिΣFy ऋणात्मक(Negative) आहे,म्हणूनरिझल्टन्ट (R) तिसऱ्याचतुर्थांशात(Third Quadrant) असेलजो x-axis सह 27.09^0चाकोनबनवेल.

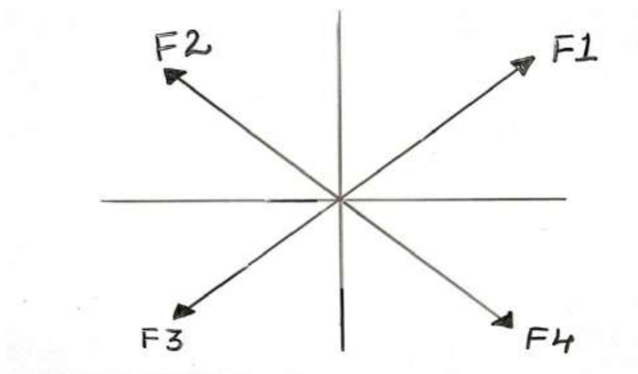


आकृती २.३८: रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडआणिदिशा

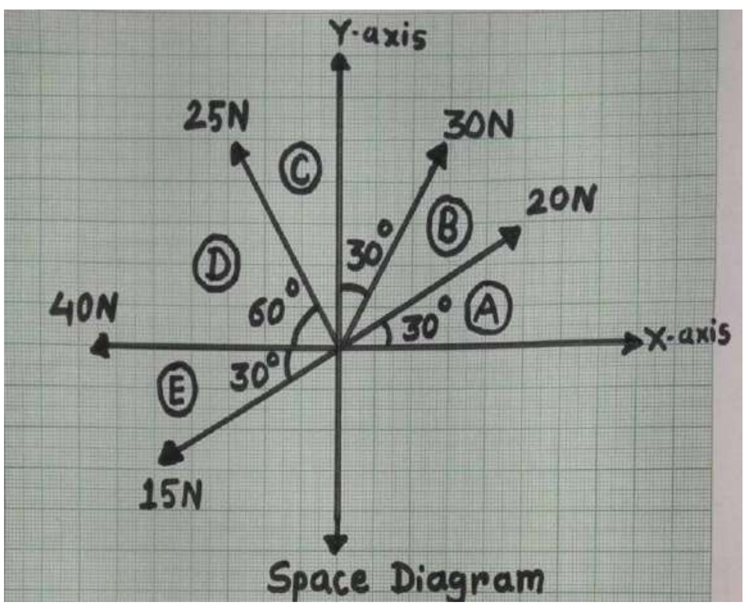
२.६.ग्राफिकल पद्धतीचा वापर करून कॉप्लॅनर फोर्सची रचना. समवर्ती बल प्रणाली आणि समांतर बल प्रणालीचे परिणामकारक केवळ कमाल चार बलांचा समावेश आहे.

२.६.१स्पेस डायग्राम(Space Diagram)

हि आकृती जी वस्तूवर कार्य करणाऱ्या बलाची अचूक स्थान आणि दिशा दर्शवते.



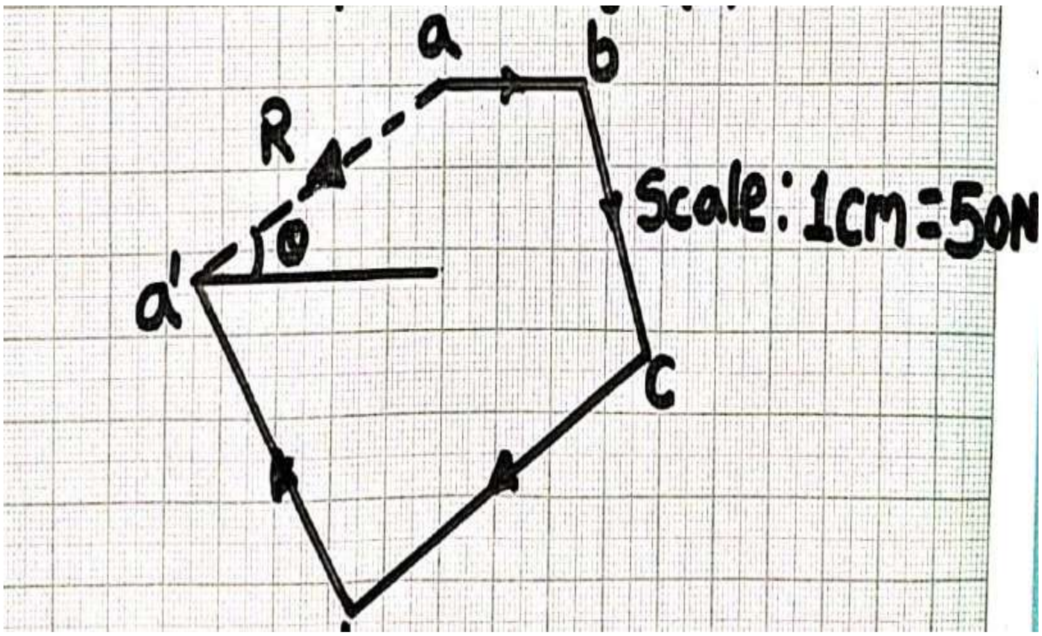
आकृती २.३९: स्पेस डायग्राम



आकृती २.४०: बाउज नोटेशन सह स्पेस डायग्राम

२.६.२ व्हेक्टरडायग्राम (Vector Diagram)

स्पेस डायग्राम काढल्यानंतर सर्व बल एका समांतर रेषांसह भौमितीय पद्धतिनेदर्शविल्या जातात. ज्या लहान अक्षरांनी दर्शविल्या जातात अशा आकृतीला वेक्टर आकृती म्हणतात.



आकृती२.४१: व्हेक्टरडायग्राम (Vector Diagram)

२.६.३पोलरडायग्राम (Polar Diagram)

हि आकृती आहे जी वेक्टर आकृतीतून प्राप्त होते ज्यामध्येध्रुव वेक्टर (O)आकृतीच्या जवळ बिंदू घेतला जातो आणि वेक्टर आकृतीचे सर्व बिंदू ध्रुवाशी (Pole) जोडलेले असतात.

२.६.४फणिकुलरपॉलीगोन(Funicular Polygon)

हि आकृती आहे जी पोलरडायग्राममधुन प्राप्त होते. ज्यामध्ये रिझल्टन्ट प्राप्त करण्यासाठी पहिलाआणिशेवटचाबिंदूजोडलाजातो.

२.६.५काँकरण्ट आणि समांतर को-प्लॅनर बल सिस्टीमसाठी रिझल्टन्ट ठरवण्याची भौमितीय पद्धत.

काँकरण्ट आणि समांतर को-प्लॅनर बल सिस्टीमचारिझल्टन्टखालील चरणांद्वारे सहजपणे शोधला जाऊ शकतो.

स्टेप1:आधी बाउज नोटेशन सह स्पेस डायग्राम काढा.

स्टेप2:दिलेल्या योग्य स्केल सह व्हेक्टर डायग्राम काढा.

स्टेप3:रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडमिळवण्यासाठी प्रारंभ आणि शेवटचे बिंदू बंद करा.

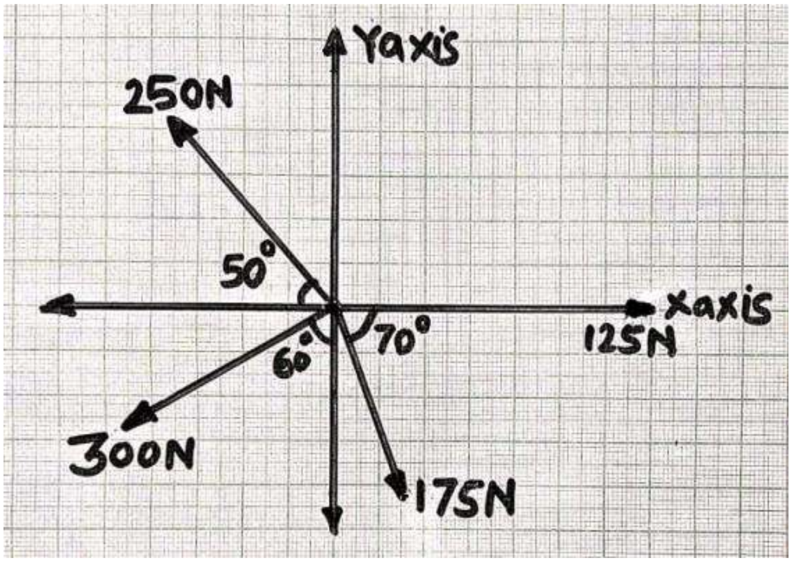
स्टेप4: घेतलेल्या स्केलच्या मदतीने रिझल्टन्ट मोजा.

स्टेप5:रिझल्टन्टचीदिशा मिळवण्यासाठी आडव्या पृष्ठभागासह (Horizontal Surface) मोजा.

उदाहरणे:कॉंकरण्ट आणि समांतर को-प्लेनर बल सिस्टीमसाठी रिझल्टन्ट ठरवण्याची भौमितीयपद्धत.

उदाहरणक्र.-01

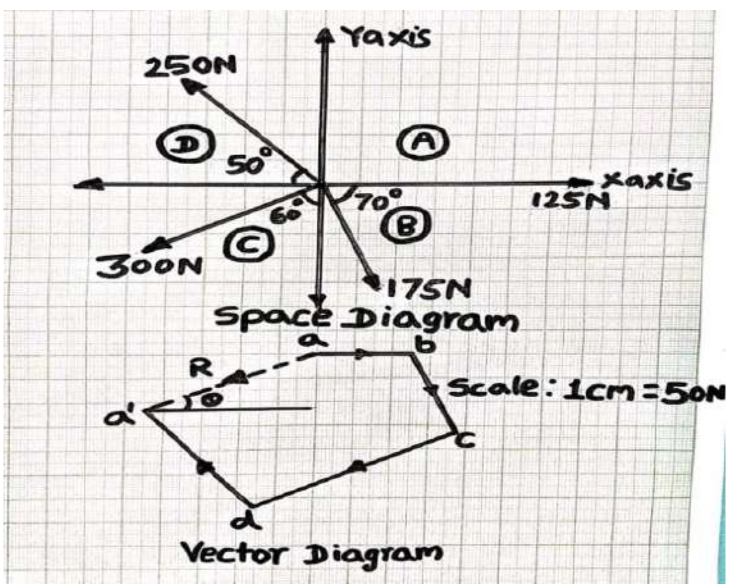
आकृती 2.42मध्ये दाखवल्याप्रमाणे भौमितीय पद्धत वापरुनरिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडआणिदिशाशोधा.



आकृती २.४२: बल सिस्टिम

उत्तर :परिमाण आणि दिशानिर्देशात वरील बल प्रणालीचा रिझल्टन्ट खालील चरणांद्वारे मोजला जाऊ शकतो;

स्टेप **1:**आधी बाउज नोटेशन सह स्पेस डायग्राम काढा.दिलेल्या सुटेबल स्केल सह व्हेक्टर डायग्राम काढा.



आकृती२.४३: स्पेस आणि व्हेक्टर डायग्राम

स्टेप2:रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडमिळवण्यासाठी प्रारंभ आणि शेवटचे बिंदू बंद करा.

स्टेप3:घेतलेल्या स्केलच्या मदतीने रिझल्टन्टमोजा. येथे आपण 1cm = 50N घेतले होते आणि गणना करून a-a = 5cm मिळाले. येथे $5 \times 50 = 250$ N म्हणून रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड 250N आहे..

स्टेप 4:रिझल्टन्टचीदिशा मिळवण्यासाठी आडव्या पृष्ठभागासह (Horizontal Surface) मोजा,जी मोजून 30^0 मिळाली आहे.

स्व:अध्ययन (Self-Learning):

1. व्याख्या लिहा:
2. (i) स्थिरता (ii) गतिशीलता.
3. कायनेमॅटिक्स आणि कायनेटिक्समध्ये फरक लिहा.
4. व्याख्या लिहा: i) बल ii) वस्तुमान iii) वजन iv) रिजिड वस्तू
5. वस्तुमान आणि वजनमध्ये फरक लिहा.
6. स्केलर आणि वेक्टरप्रमाणाची व्याख्यालिहा.
7. खालीलपैकी कोणते प्रमाण स्केलर आहेत? वस्तुमान, बल, आकारमान,वेग, वेळ, प्रवेग.
8. युनिट्सच्या विविध प्रणालींचे वर्णन करा. आजकाल कोणत्या युनिट्सची प्रणाली वापरात आहे.
9. बलाची व्याख्या करा. जेव्हा एखादा बल कार्य करते तेव्हा त्याचे काय परिणाम होऊ शकताततेसांगा.
10. बलाची वैशिष्ट्ये सांगा.
11. फोर्स सिस्टीमचीव्याख्या करा. वेगवेगळ्या बल प्रणालींची नावे द्या.
12. खालील गोष्टी स्पष्ट करा

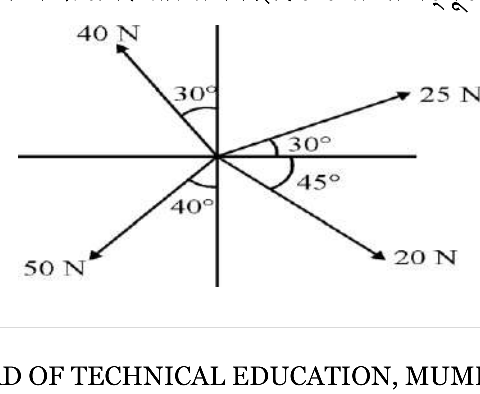
i. बलाचेरिझोल्युशन

ii. बलाचेकॉम्पोसिशनं

13. स्पेस डायग्राम, वेक्टर डायग्राम ची परीभाषा करा. ग्राफिक स्टॅटिक्समध्ये वेक्टरडायग्रामचा उपयोग सांगा.

14. बाउज नोटेशनडायग्राम शोधाते कुठे वापरले जाते?

15. खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.



16. खालील बल जर बिंदूवर कार्य करत असतील रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडआणिदिशाविश्लेषणात्मक पद्धतीने शोधा.

(A) 300Nजे 30^0ईशान्यदिशेने.

(B) 150N जे 45^0वायव्यदिशेने.

(C) 200N पश्चिम दिशेने.

(D) 400 Nजे आग्नेय दिशेने.

17. बलाचा समांतरभुजचा नियमउदाहरणा सह स्पष्ट करा.

18. व्हेरिग्ननचेप्रमेयउदाहरणासह स्पष्ट करा.

19. दोन्ही बाजूंच्या दोन दिशांना प्रत्येकी 30^0च्या कोनात क्षैतिज कार्य करणाऱ्या 60 N बलाचेघटक शोधा.

20. 100 N च्या बलाचे दोन बाजूंनी 40^0 आणि 50^0 मध्ये दोन्ही बाजूंनी रिझोल्युशनकरा.

संदर्भ (References)

Sr. no.	Author	Title	Publisher with ISBN Number
1	S. Ramamrutham	Engineering Mechanics	Dhanpat Rai Publishing Co. 2016 ISBN-13: 978-9352164271
2	R. S.Khurmi,N.Khurmi	Engineering Mechanics	S.Chand& Co. New Delhi 2018 ISBN: 978-9352833962
3	S. S. Bhavikatti	Engineering Mechanics	New Age International Private Limited ISBN: 978-9388818698
4	D. S. Bedi, M. P.Poonia	Engineering Mechanics	Khanna Publishing ISBN-13:978-9386173263
5	Dr. R. K. Bansal	Engineering Mechanics	Laxmi Publications ISBN 13: 9788131804094

घटक - 3

बलांचा समतोल

(Equilibrium of Forces)

विषय निष्पत्ती (Course Outcome): दिलेल्या परिस्थितीत लोड संयोगांचे अज्ञात बल निश्चित करा.

सिद्धांत शिक्षण परिणाम (Theory Learning Outcome):

१. दिलेल्या परिस्थितीत दिलेल्या लोडिंगसाठी फ्री बॉडी डायग्राम काढा.
२. दिलेल्या समवर्ती बल प्रणालीचे समतोल निश्चित करा.
३. लामीचासिद्धांत (Lami's Theorem) वापरुण दिलेल्या व्यावहारिक परिस्थितीसाठीसमतोल निर्माण करणारा अज्ञात बल निश्चित करा.
४. दिलेल्या संरचनेत बीमचा प्रकार ओळखा.
५. दिलेल्या बीम प्रकारातील प्रतिक्रिया विश्लेषणात्मकपणे निश्चित करा.

3.1 समतोल आणि त्याच्या अटी

समतोल ही बॉडीची स्थिती किंवा अवस्था आहे जी बॉडीवर बलांच्या संख्येने कार्य करत असताना त्याला शिथरता देते.

येथे स्टॅटिक्सचा अभ्यास करताना, समतोल महत्त्वाची भूमिका बजावते. स्टॅटिक्स विश्रांतीच्या बॉडीवरील बलांच्याकृतीशी संबंधित आहे. जेव्हा बलांची प्रणाली एखाद्या बॉडीवर कार्य करते आणि त्यावर कोणताही प्रभाव पाडत नाही किंवा दुसऱ्या शब्दात सांगायचे तर जेव्हा सिस्टम फोर्सचा परिणाम शून्य असतो तेव्हा बॉडी समतोल स्थितीत असल्याचे म्हटले जाते.

समतोल बल म्हणजे बलांचा संच जो बॉडीचा समतोल राखतो.

3.2 समतोल

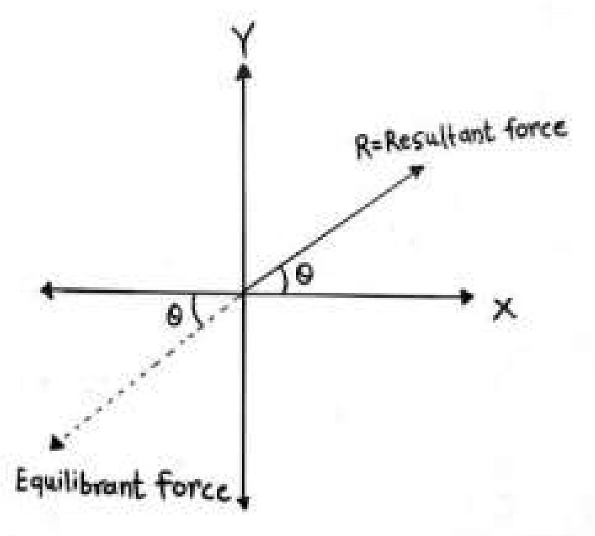
समतोल एक एकल बल आहे जी बॉडीवर कार्य करणाऱ्या बलांच्या संख्येचा प्रभाव कमी करते आणि बॉडीला रेस्ट करते. प्रणालीसह समतोल कृती.

मागील प्रकरणामध्ये आपण परिणामी बलाचा अभ्यास केला आहे. ही एकल बल आहे जी प्रणालीचे प्रतिनिधित्व करते.

3.2.1 परिणामकारक आणि समतोल यांच्यातील संबंध

परिणामी बल हे एकल बल असते जेव्हा प्रणालीऐवजी कार्य करते, बॉडीवर प्रणालीप्रमाणेच प्रभाव निर्माण करते. समतुल्य प्रणालीचा प्रभाव शून्य करते आणि ते एकल बल देखील आहे.

म्हणून या दोन बलांचा परिमाण समान, दिशा विरुद्ध आणि समरेख असणे आवश्यक आहे.



आकृती 3.1: परिणामकारक आणि समतोल यांच्यातील संबंध

समतुल्य प्रथम परिणाम प्राप्त करून आणि समतुल्य होण्यासाठी समरेख, समान परिमाण आणि विरुद्ध दिशा बल यांचा विचार करून समतुल्यता निर्धारित केली जाऊ शकते.

3.2.2 परिणामकारक आणि समतोल यांच्यातील फरक

परिणामकारक	समतोल
1. परिणामकारक एकल बल आहे जो बॉडीवर कार्य करणाऱ्या सर्व बलाद्वारे तयार केलेला	समतुल्य एकल बल आहे जी इतर बलांसह कार्य करते, तेव्हा बल आणि बॉडी समतोल आणते.

समान प्रभाव निर्माण करू शकतो.	
2. हे बलांच्या प्रणालीऐवजी कार्य करते.	हे बलांच्या प्रणालीसह कार्य करते.
3. त्यामुळे विस्थापन होते.	हे बॉडीला स्थिर ठेवते.
4. हे ‘R’ द्वारे दर्शविले जाते.	हे ‘E’ द्वारे दर्शविले जाते.
5. हेबॉडीचा समतोल राखत नाही.	हेबॉडीचा समतोल राखते.
समतोल हे परिमाणात समान आहे,परंतु परिणामाच्या दिशेने विरुद्ध आहे.	

3.2.3 फ्री बॉडी डायग्राम (Free Body Diagram)

फ्री बॉडी डायग्रॅम हि एक आकृती आहे ज्यामध्ये विचाराधीन वस्तू सर्व संपर्क पृष्ठभागापासून मुक्त असते आणि त्यावर कार्य करणाऱ्या सर्व बल दर्शविते. अज्ञात प्रतिक्रिया (Reaction), तणाव (Tension) FBD वरून सहज शोधता येतात. खाली दिलेल्या 3.2 आणि 3.3 आकृती मध्ये फ्री बॉडी डायग्राम दाखलेली आहे.

हि आकृती काढताना केवळ आवश्यक माहिती विचारात घेतली जाते जसे की बॉडीचे योजनाबद्ध रेखाटन.

3.2.4 समतोलबल प्रणालीच्या अटी (Analytical Condition of Equilibrium)

1. बलाच्या सर्व आडव्या (Horizontal) घटकांची बीजगणितीय बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

i.e. $\sum Fx = 0$.

2. बलाच्या सर्व उभ्या (Vertical) घटकांची बीजगणितीय बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

i.e. $\sum Fy = 0$

3. कुठल्याही एका पॉईंट भोवती मोमेन्ट हा शून्य असतो. i.e. $\sum M= 0$ वरील अटींपैकी. को-प्लेनर बल प्रणाली साठी - फक्त दोन अटी पूर्ण केल्या पाहिजेत. को-प्लेनरनॉन कॉकरण्ट बल प्रणाली साठी सर्व तीन अटी पूर्ण केल्या पाहिजेत.

i.e. $\sum Fx = 0.$

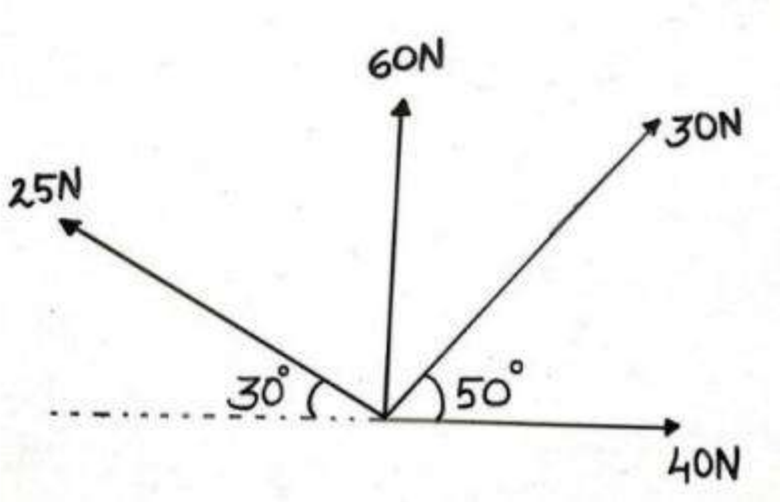
$\sum Fy = 0$

$\sum M= 0$

उदाहरणे: समतोल (Equilibrium)

उदाहरण क्र.- 01

खालील बल प्रणालीच्या रिझल्टन्टची परिमाण आणि दिशा शोधा.

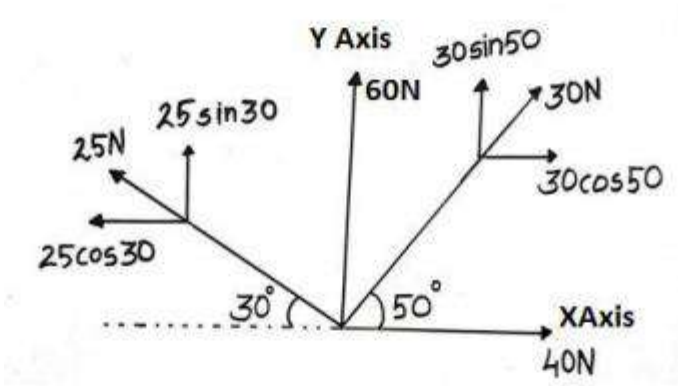


आकृती 3.2 : बल प्रणाली

दिलेली माहिती : तीन बल F_1= 30 N, F2= 60 N आणि F3 = 25 N आणि x-axis च्या संदर्भात त्यांचा कोन दिलेला आहे.

शोधा : रिझल्टन्टची मॅग्निट्यूड आणि दिशा.

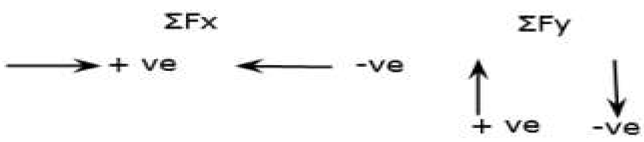
उत्तर : संख्यात्मक गुंतागुंतीची बल प्रणाली (The complex force system) खालील दृष्टिकोनाने सोडवता येते.



आकृती 3.3 : रिझोल्युशन चे ऑर्थोगोनल घटक

स्टेप 1: प्रथम आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे आडव्या आणि उभ्या घटकांकडे झुकलेल्या सर्व बलाचे निराकरण करा.

स्टेप 2: ΣFxआणि ΣFyशोधा, येथे एक अतिशय महत्वाच्या गोष्टी म्हणजे साइन कन्व्हेन्शन जे खालीलप्रमाणे आहे.



$\Sigma F_x = 40 + \cos 50 - 25\cos 30$

$\Sigma F_x = 40 + 19.28 - 21.65$

$\Sigma F_x = 37.63 kN$

त्याचप्रमाणे आपण ΣF_y शोधूया,

$\Sigma F_y = 60 + 30\sin 50 + 25\sin 30$

$\Sigma F_y = 60 + 22.98 + 12.5$

$\Sigma F_y = 95.49$ kN

स्टेप 3: E Fxआणि EFyच्या मदतीने, रिझल्टन्ट "R" ची मॅग्निट्यूड आणि दिशा शोधा.

स्टेप 4: गणना करण्याच्या हेतूने नेहमी काळजी घ्या की प्रत्येक झुकलेली बल एक्स-अक्षकडे झुकलेलीआहे आणि जर नसेल तर ती बनवा.

$R = \sqrt{(\Sigma Fx)^2 + (\Sigma Fy)^2}$

$R = \sqrt{(37.63)^2 + (95.48)^2}$

$R = \sqrt{10532.44}$

R = 102.63 N. ....**उत्तर**

$\theta = \tan^{-1}|\frac{\Sigma Fy}{\Sigma Fx}|$

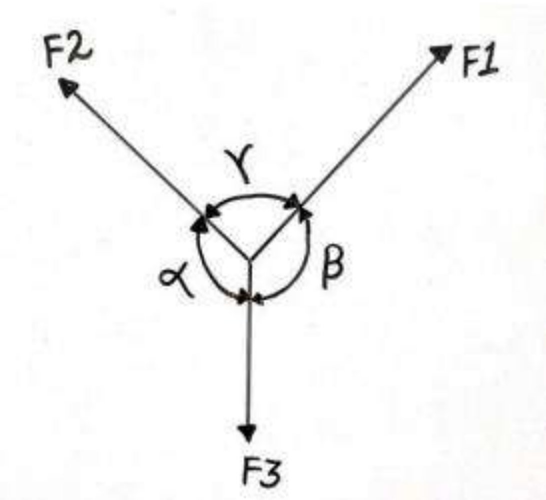
$\theta = \tan^{-1}|\frac{95.48}{37.63}|$

$\theta = \tan^{-1}[2.54|$

$\theta = \mathbf{68.51^0}$ ....**उत्तर**

3.3लामीचे प्रमेय (Lami's Theorem)

लामीचे प्रमेय त्यात असे म्हटले आहे की "जर तीन को-प्लेनर बल समतोल स्थितीत वस्तू (Body) वर लागु होत असतील तर, प्रत्येक बल इतर दोन बलामधील कोनाच्या साईनच्या प्रमाणात (Proportional to sin) असतो.



आकृती 3.4: लामीचे प्रमेय

वरील दिलेल्या आकृती 4.4 मध्ये लामीचे प्रमेय दाखवलेले आहे. वरील आकृती मध्ये F_1, F_2आणिF. बल आहेत आणि ०.३.४ त्या मधिल कोन आहेत. हा F_2आणिF: मधिल, ३ हा F, आणि F मधिल आणि Y हा F. आणि F, मधिल कोन आहे. लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{F1}{sin\alpha} = \frac{F2}{sin\beta} = \frac{F3}{sin\gamma}$$

3.3.1. लामीच्या प्रमेयाचे उपयोग

1. हे अज्ञात बल ची गणना करण्यासाठी वापरले जाते.

2. बीमसाठी संपर्क बिंदूवर (Contact Point) प्रतिक्रिया शोधण्यासाठी याचा वापर केला जातो.

3. वायर, रस्सी, केबल्स, मधील तणाव (Tension in Wires) शोधण्यासाठी याचा वापर केला जातो.

4. चॅनेलमध्ये विश्रांती घेतलेल्या गोलावरील समस्या (Reaction & Tension), जिब क्रेन आणि फोटो फ्रेमवर आधारित समस्या (Reaction) सोडवण्यासाठी देखील याचा वापर केला जातो.

3.3.2. लामीच्या प्रमेयाची मर्यादा

1. वस्तू (Body) समतोल मध्ये असावी.

2. हे फक्त तीन बल प्रणाली करीता लागू आहे, बल प्रणालीमध्ये जास्त किंवा कमी नाही. (Not more or less than three Forces).

3. हे समांतर आणि को-प्लेनर बल प्रणालीसाठी लागू नाही.

3.3.3. लामीच्या प्रमेयाच्या वापरासाठी आवश्यक अटी

1. तीन बल असणे आवश्यक आहे.

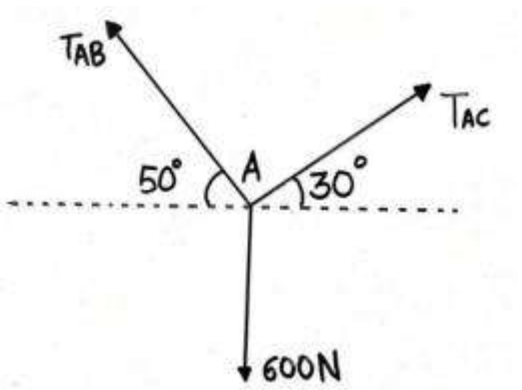
2. बल समतोल असणे आवश्यक आहे.

3. बल को-प्लेनर आणि कॉकरण्ट असणे आवश्यक आहे.

4. तीन बल आणि कोनांपैकी किमान एक बल आणि दोन कोन माहित असणे आवश्यक आहे.

उदाहरणे: लामीचं प्रमेय

1. **आकृती 4.5 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे "A" बिंदूसाठी, लागू बलाच्या कृती अंतर्गत समतोलमध्ये, AB आणि AC मधील तणावाचे (Tension) मूल्य (Magnitude) शोधा.**

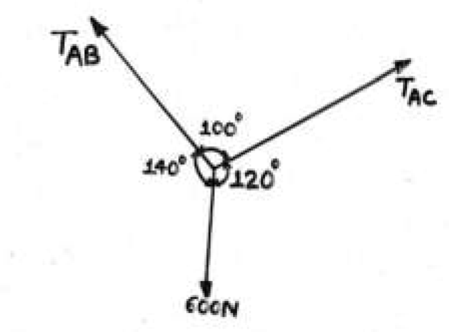


आकृती 3.5: को-प्लेनर आणि काँकरण्ट बल प्रणाली

दिलेली माहिती: एका बिंदूवर तीन कॉंकरण्ट बल कार्य करत आहेत. बल = 600 N. शोधा: AB आणिAC मधील तणावाचे मूल्य.

उत्तर: कॉप्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली लामीच्या प्रमेयाने सोडवता येते. लामीच्या प्रमेया नुसार

$$\frac{F1}{sin\alpha} = \frac{F2}{sin\beta} = \frac{F3}{sin\gamma}$$



आकृती 3.6: फ्री बॉडी डायग्राम

α= 140°, β= 120°, γ=100°

$$\frac{AC}{sin140} = \frac{AB}{sin120} = \frac{600}{sin100}$$

$$\frac{AB}{sin120} = \frac{600}{sin100}$$

AB मधील तणाव (Tension in AB), $\frac{AB}{sin120} = \frac{600}{sin100}$

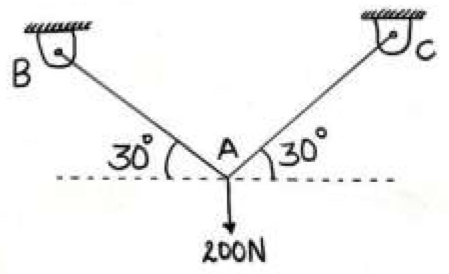
AB मधील तणाव (Tension in AB) = $\frac{600Xsin120}{sin100}$ = 527.63N……………………उत्तर

त्याचप्रमाणे,ACमधील तणाव (Tension in AC), $\frac{AC}{sin140} = \frac{600}{sin100}$

AC मधील तणाव (Tension in AC) = $\frac{600Xsin140}{sin100}$ = 391.62 N……………………उत्तर

उदाहरण क्र.-02

खालील को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली साठी, AB आणि AC मधील तणावाचे मूल्य शोधा.



आकृती 3.7: को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली

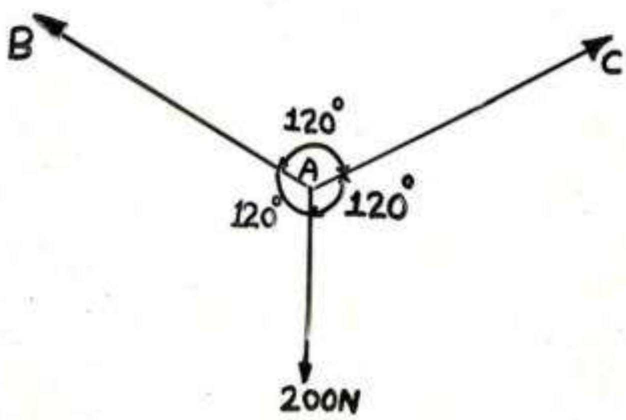
दिलेली माहिती: एका बिंदूवर तीन कॉंकरण्ट बल कार्य करत आहेत, बल - 200 N.

शोधा: AB आणि AC मधील तणावाचे मूल्य

उत्तर: को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली लामीच्या प्रमेयाने सोडवता येते.

लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{F1}{sin\alpha} = \frac{F2}{sin\beta} = \frac{F3}{sin\gamma}$$



आकृती 3.8: फ्री बॉडी डायग्राम

$\alpha = 120^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma = 120^0$

$$\frac{AB}{sin120} = \frac{AC}{sin120} = \frac{200}{sin120}$$

AB मधील तणाव (Tension in AB), $\frac{AB}{sin120} = \frac{200}{sin120}$

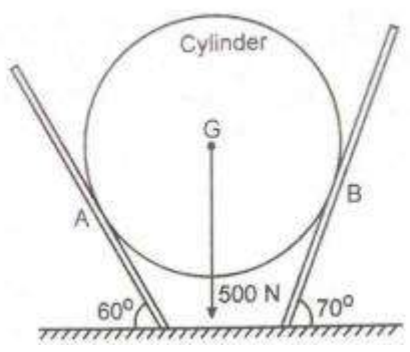
AB मधील तणाव (Tension in AB) = $\frac{200Xsin120}{sin120}$ = 200 N……………………उत्तर

त्याचप्रमाणे,ACमधील तणाव (Tension in AC), $\frac{AC}{sin120} = \frac{200}{sin120}$

AC मधील तणाव (Tension in AC) = $\frac{200Xsin120}{sin120}$ = 200 N……………………उत्तर

उदाहरण क्र.-03

खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे 500 N वजनाचा सिलेंडर गुळगुळीत चॅनेलच्या पृष्ठभागावर स्थिरावलेला आहे तर, त्या चॅनेलच्या पृष्ठभागाद्वारे देऊ केलेली रिऍक्शन शोधा.



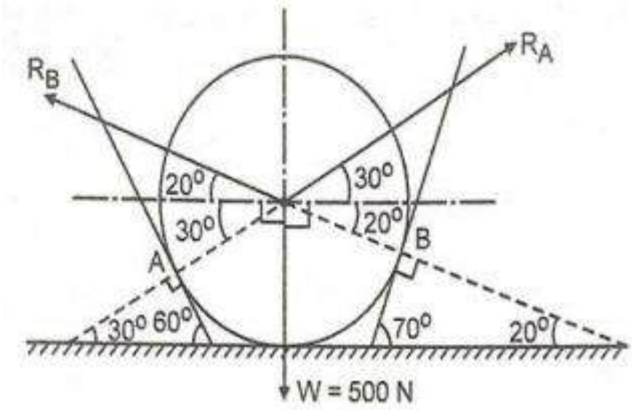
आकृती 3.9: चॅनेलच्या पृष्ठभागावर स्थिरावलेला सिलेंडर

दिलेली माहिती: सिलेंडरचे वजन, बल = 500 N

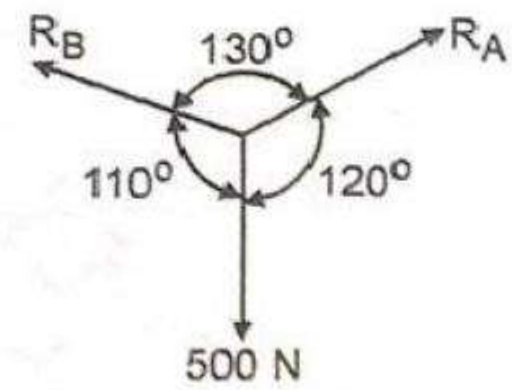
शोधा: चॅनेलच्या पृष्ठभागाद्वारे दिलेली रिऍक्शन.

उत्तर: को-प्लेनर आणि कॉंकरण्ट बल प्रणाली लामीच्या प्रमेयाने सोडवता येते.लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{F1}{sin\alpha} = \frac{F2}{sin\beta} = \frac{F3}{sin\gamma}$$



आकृती 3.10: चॅनेलच्या पृष्ठभागावर स्थिरावलेला सिलेंडर



आकृती 3.11: फ्री बॉडी डायग्राम

$\alpha = 110^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma = 130^0$

लामीच्या प्रमेया नुसार,

$$\frac{RA}{sin110} = \frac{RB}{sin120} = \frac{500}{sin130}$$

$$\frac{RA}{sin110} = \frac{500}{sin130}$$

$$\mathbf{RA} = \frac{500Xsin110}{sin130} = 613.340\ N$$ **........................उत्तर**

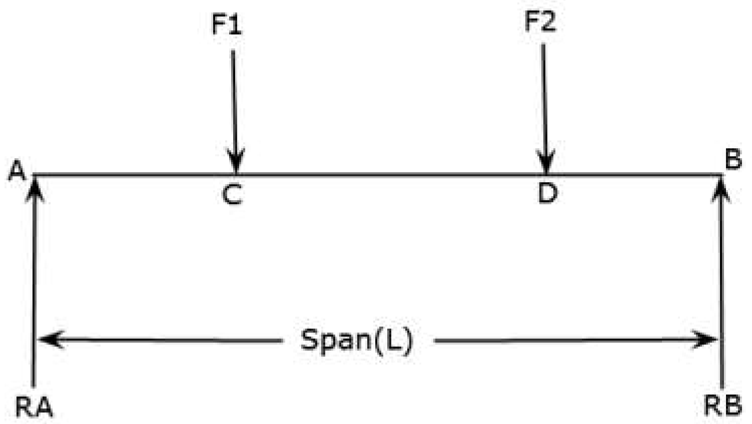
त्याचप्रमाणे, $\frac{RC}{sin120} = \frac{500}{sin130}$

$$\mathbf{RC} = \frac{500Xsin120}{sin130} = 565.25N$$ **........................उत्तर**

3.4 बीम (Beam)

बीम (Beam) हे स्ट्रक्चरल घटक म्हणून परिभाषित (Defined) केले गेले आहे ज्याचे एक परिमाण (Dimension) इतर दोन परिमाणांपेक्षा बरेच मोठे आहे आणि ते काही बिंदूंवर सपोर्टेड (Supported By loads) आहे. हा आडवा स्ट्रक्चरल मेंबर (Structural Member) आहे जो ट्रान्सव्हर्स लोडच्या अधीन आहे.

बिमचा स्पॅन (Span of Beam): हे बीमच्या सपोर्ट मधील अंतर असते.

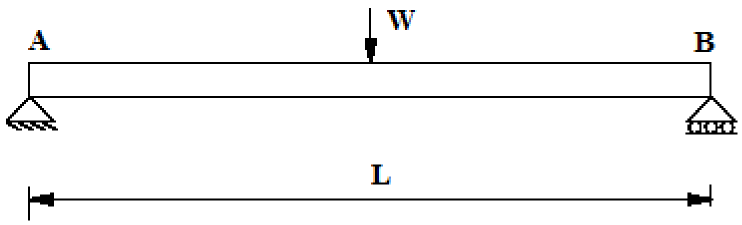


आकृती 3.12: बिमचा स्पॅन

3.4.1 सपोर्टचे प्रकार (Types of Support)

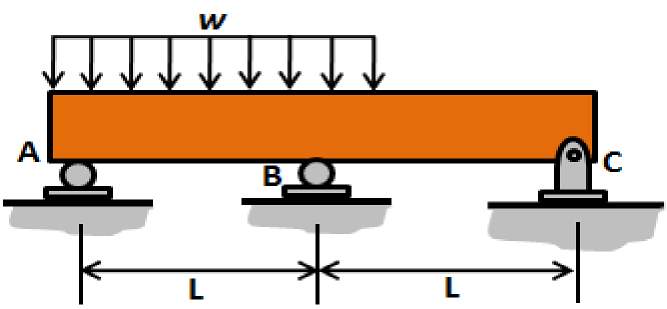
सपोर्टचे विविध प्रकार आहेत:

1. सिम्पल सपोर्ट: जर बीम फक्त एका सपोर्ट वर अवलंबून असेल तर त्याला सिम्पल सपोर्ट असे म्हणतात. अशा प्रकरणांसाठी सपोर्ट वरील प्रतिक्रिया (Reaction) सपोर्टला काटकोनात (Perpendicular) असते.



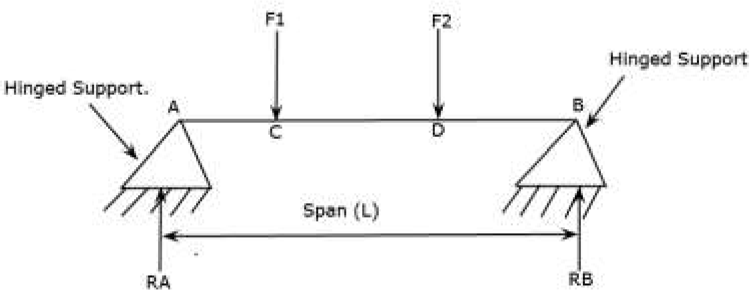
आकृती 3.13:सिम्पल सपोर्ट

2. **रोलर सपोर्ट:** या मध्ये बीमला रोलर च्या साहाय्याने सपोर्ट दिला जातो. या मध्ये रिऍक्शन हि बीमला काटकोनात असते.



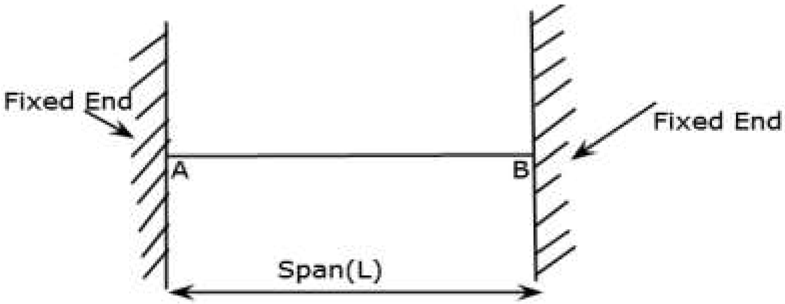
आकृती 3.14:रोलर सपोर्ट

3. **हिंज सपोर्ट :** या प्रकारच्या सपोर्ट मध्ये बीम कोणत्याही दिशेने जाऊ शकत नाही, तो सपोर्ट भोवती फिरू शकतो. विश्लेषणाच्या हेतूसाठी रिऍक्शन हि बीम ला आडवी तसेच उभी असते.



आकृती 3.15:हिंज सपोर्ट

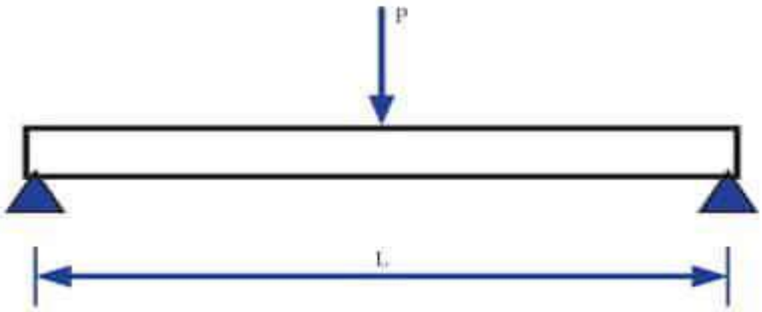
4. **फिक्स सपोर्ट :** या प्रकारच्या सपोर्ट मध्ये बीम फिक्स असतो.



आकृती 3.16:फिक्स सपोर्ट

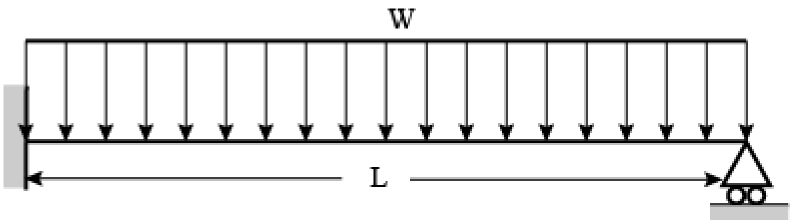
3.4.2 लोडिंगचे प्रकार (Types of Loading)

1. एकाग्र लोड (Concentrated load): हा लोड आहे जो खूप लहान लांबीवर (Length) कार्य करतो. याला पॉइंट लोड असेही म्हणतात.



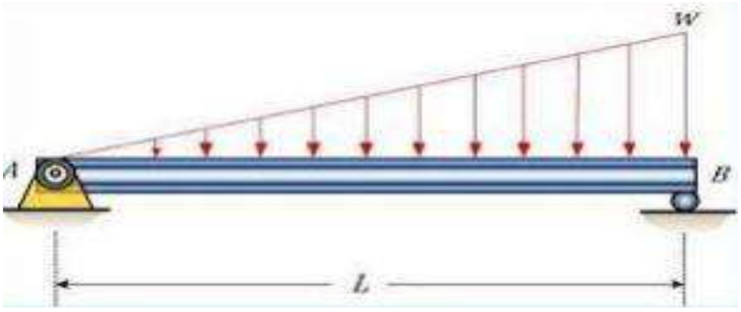
आकृती 3.17: एकाग्र लोड

2. एकसमान वितरित लोड (Uniformly Distributed Load):हा लोड (Load) आहे जो एकसमान तीव्रतेसह (Intensity) लक्षणीय लांब अंतरावर (At certain Distance) कार्य करतो.



आकृती 3.18:एकसमान वितरित लोड

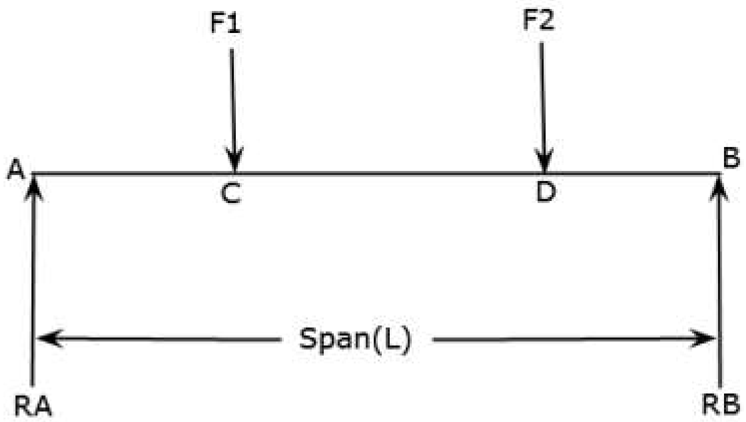
3. एकसारखे बदलणारे लोड (Uniformly varying load):हे असे लोड आहे ज्याचा परिमाण (Magnitude) विशिष्ट कालावधीत वाढतो किंवा कमी होतो, याला त्रिकोणी लोड असेही म्हणतात.



आकृती 3.19:एकसारखे बदलणारे लोड

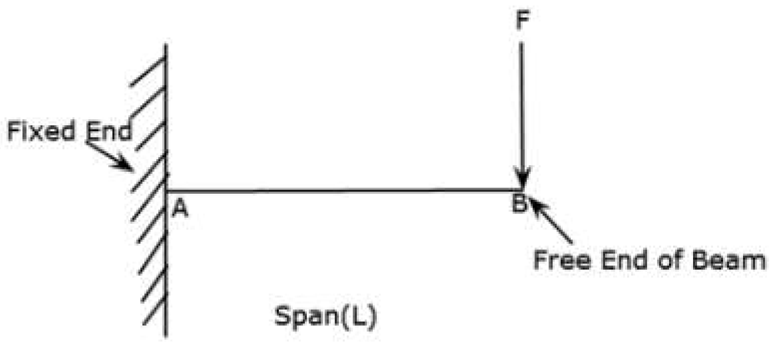
3.4.3 बीमचे प्रकार

1. सिम्पली सपोर्टेड बीम: जर बीम हा सपोर्ट वर नुसता (Simply) लागु होत असेल तर त्याला सिम्पली सपोर्टेड बीम म्हणतात.



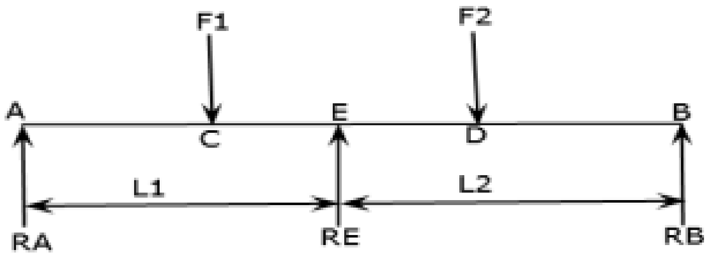
आकृती 3.20:सिम्पली सपोर्टेड बीम.

2. कॅन्टिलीव्हर बीम: जर बीम च्या एका टोकाला बल लागत असेल आणि दुसरं टोक मुक्त असेल तर, त्याला कॅन्टिलीव्हर बीम म्हणतात.



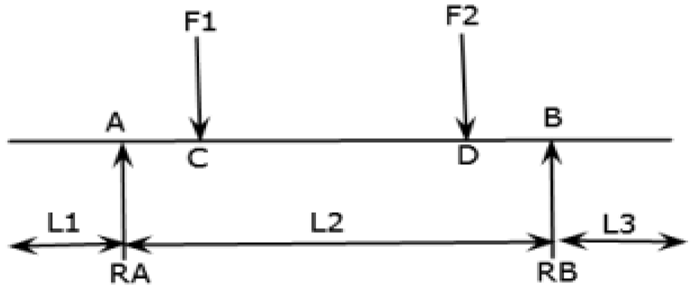
आकृती 3.21:कॅन्टिलीव्हर बीम

3. कन्टीन्यूअस बीम: जर बीम हि दोनपेक्षा जास्त बिंदूवर सपोर्टेड असेल तर, त्याला कन्टीन्यूअस बीम असे म्हणतात.



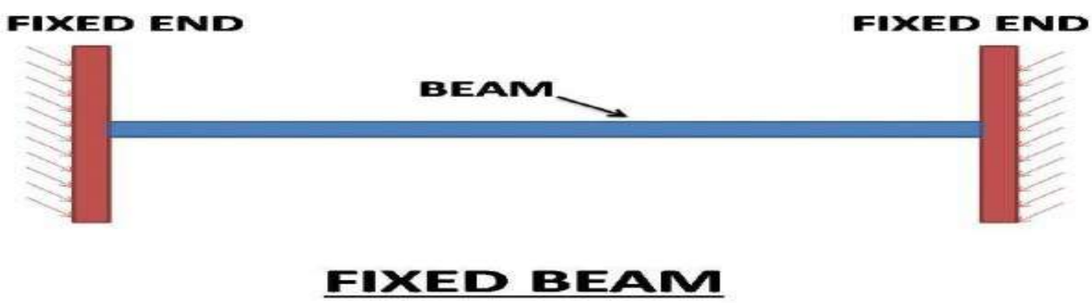
आकृती 3.22: कन्टीन्यूअस बीम

5. **ओव्हर हॅंग बीम:** जर बीम चा एन्ड पोरशन जर समोर वाढवला गेला असेल तर, त्याला ओव्हर हँग बीम असे म्हणतात.



आकृती 3.23: ओव्हर हॅंग बीम

6. **फिक्स्ड बीम**: जर बिमचे दोन्ही टोक भिंतीमध्ये निश्चित असतील तर त्याला फिक्स्ड किंवा कन्स्ट्रेन्ड किंवा बिम इन बिल्ट असे म्हणतात.

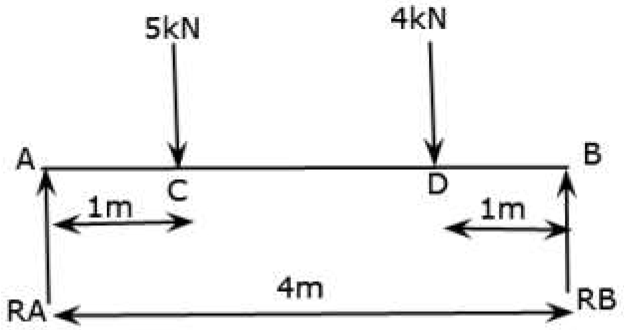


आकृती 3.24: फिक्स्ड बीम

उदाहरणे: वेगवेगळ्या बीमच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधणे.

उदाहरण क्र.-01

खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 4m आहे, त्यावर दोन पॉईंट लोड 5 kNआणि 4 kNअनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून 1m च्या अंतरावर लागु होत असतील, तर त्या साठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



आकृती 3.25: पॉइंट लोडसह सिम्पली सपोर्टेड बीम

उत्तर : दिलेली माहिती: $F_1 = 5kN$आणि $F_2 = 4kN$, स्पॅन = 4 m.

शोधाः सपोर्ट रिऍक्शन RA आणि RB

उत्तरः समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिऍक्शन शोधली जाऊ शकते.

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे. $\sum Fy = 0$

कोणत्याही बिंदू संबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे. $\sum M = 0$

(साइन कन्व्हेन्शन $\sum Fy = 0$ ↑ +ve, ↓ -ve आणि $\Sigma M_A=0$ ⊕ ⊖),

$R_A+R_B-5-4 = 0$

$R_A+R_B-9 = 0$ ....समीकरण (1)

$\sum M_A = 0$ ....A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने (Clockwise) मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट (Anticlockwise) मोमेंट नकारात्मक आहे.

$(5\times1)+(4\times3)-(R_B\times4)=0$

$5+12-4R_B=0$

$17-4R_B=0$

R_B= 4.25 KN…………………………… उत्तर

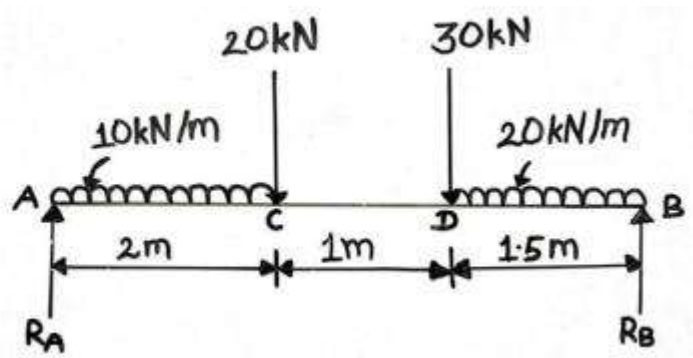
R_B = 4.25kNसमीकरण I मध्ये टाकून R, शोधले जाऊ शकते.

$R_A+4.25=9$

R_A= 4.25 KN…………………………… उत्तर

उदाहरण क्र.-02

खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 4.5m आहे, त्यावर दोन पॉईंट लोड एकसमान वितरित भारा सह अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून खालील अंतरावर लागु होत आहेत.तर त्या साठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



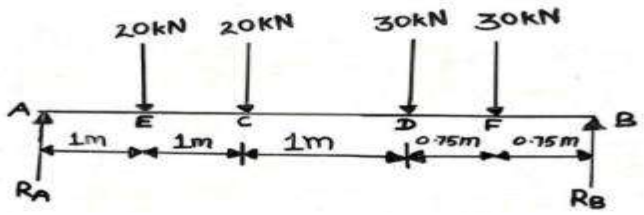
आकृती 3.26: पॉइंट लोड आणि एकसमान वितरित लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम,

उत्तर : दिलेली माहिती: F-20kN, F_2-30kN, 10 N/m चे UDL 2m च्या अंतरावर आहे त्याचप्रमाणे, 20 N/m चे UDL 1.5m च्या कालावधी वर आहे.

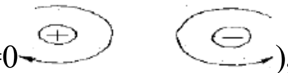
शोधा: सपोर्ट रिऍक्शन R_A, आणि R_B,

उत्तरः समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिऍक्शन शोधली जाऊ शकते बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\sum Fy = 0$. कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

दिलेल्या एकसमान वितरित भाराचं पॉइंट लोड मध्ये रुपांतर करुया. 10N/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे -10 × 2 = 20kNत्याचप्रमाणे, 20 N/m चे UDL 1.5 m च्या कालावधी वर आहे त्यामुळे ते होईल 20 × 1.5 - 30 KN



आकृती 3.27:एकसमान वितरित लोड पॉइंट लोड मध्ये रुपांतर

(साइन कन्व्हेन्शन $\sum Fy = 0$ $\uparrow$ +ve, $\downarrow$ -ve आणि $\Sigma M_A=0$ ),

$R_A+R_B-20-20-30-30 = 0$

$R_A+R_B-100 = 0$

$R_A+R_B=100$ ....समीकरण (1)

$\Sigma M_A=0$………………………………A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट मोमेंट नकारात्मक आहे.

(20x1)+(20×2)+(30×3)+(30×3.75)-(Ra×4.5)=0

$20+40+90+112.5-4.5R_B=0$

$262.5-4.5R_B=0$

R_B= 58.33kN ....उत्तर

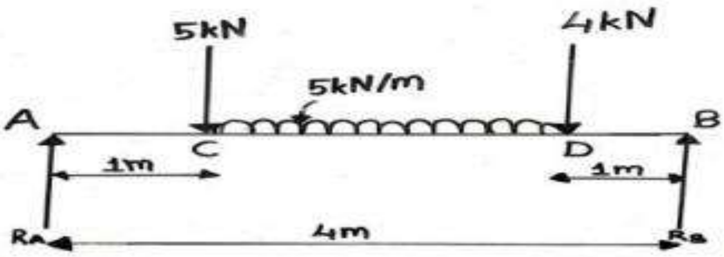
R_B = 58.33kNसमीकरण I मध्ये टाकून R_A, शोधले जाऊ शकते.

$R_A+58.33 = 100$

R_A = 41.67 kN ....उत्तर

उदाहरण क्र.-03

खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 4 m आहे, त्यावर दोन पॉईंट लोड एकसमान वितरित लोड सह अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून खालील कालावधीवर लागु होत आहेत.तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



आकृती 3.28:पॉइंट लोड आणि एकसमान वितरित लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम

उत्तर : दिलेली माहिती: F_1= 5kN,F2 = 4kN, 5kN/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे.

शोधाः सपोर्ट रिऍक्शन RA आणि RB

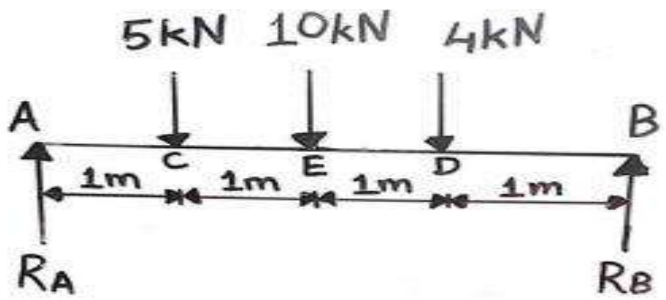
उत्तरः समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिऍक्शन शोधली जाऊ शकते.

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma Fy = 0$.

कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोर्मेटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$\Sigma M = 0$

2 m स्पॅनच्या मध्यभागी UDL ला समतुल्य बिंदू लोडमध्ये रूपांतरित करा, ते 10KN असेल.



आकृती 3.29:एकसमान वितरित लोड चे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर

(साइन कन्व्हेन्शन $\sum Fy = 0$ ↑ +ve, ↓ -ve आणि $\sum M_A=0$ ⊕ ⊖),

$R_A+R_B-5-10-4 = 0$

$R_A+R_B-19 = 0$

$R_A+R_B= 19$ kN ....समीकरण (1)

$\sum M_A = 0$ ....A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने (Clockwise) मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट (Anticlockwise) मोमेंट नकारात्मक आहे.

$(5\times1)+(10\times2)+(4\times3)-(R_B\times4)=0$

$5+20+12-4R_B=0$

$37-4R_B=0$

R_B= 9.25 KN................................ उत्तर

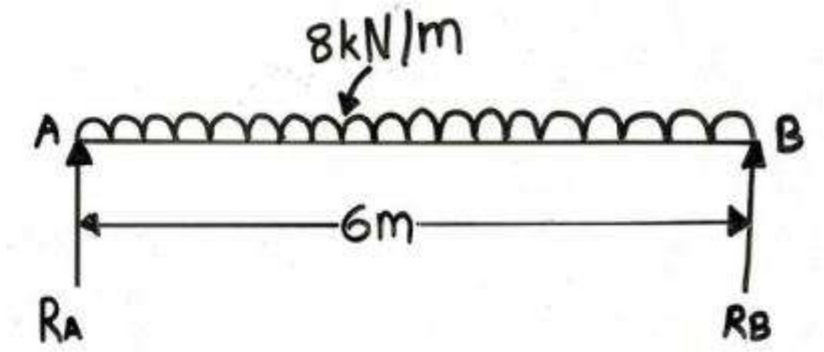
R_B = 4.25kNसमीकरण । मध्ये टाकून R, शोधले जाऊ शकते.

$R_A+9.25=19$

R_A= 9.25 KN................................ उत्तर

उदाहरण क्र.-04

खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 6m आहे त्यावर एकसमान वितरित लोड सर्व स्पॅन वर लागु होत आहे. तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिॲक्शन शोधा.



आकृती 3.30: एकसमान वितरित लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम.

उत्तर : दिलेलीमाहिती: 8 N/m चे UDL6m च्या अंतरावर आहे.

शोधाः सपोर्ट रिॲक्शन R, आणि RB

उत्तरः समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिॲक्शन शोधली जाऊ शकते.

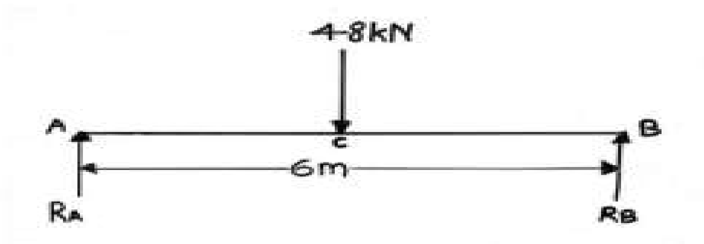
बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma Fy = 0$.

कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$\Sigma M = 0$

UDL ज्या स्पॅन वर आहे त्याचे पॉइंट लोड मध्ये रुपांतर करुया.

8 N/m चे UDL 6m च्या अंतरावर आहे 8 x 6 = 48 kN.



आकृती 3.31: एकसमान वितरित लोड चे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर

(साइन कन्व्हेन्शन $\sum Fy = 0$ ↑ +ve, ↓ -ve आणि $\Sigma M_A=0$ ⊕ ⊖),

$R_A+R_B-48= 0$

$R_A+R_B = 48$ kN.......................... समीकरण (1)

$\sum M_A = 0$ ....A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने (Clockwise) मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट (Anticlockwise) मोमेंट नकारात्मक आहे.

$(48\times3)-(R_B\times6) = 0$

$144-6R_B= 0$

$144 = 6R_B$

R_B= 24KN................................ उत्तर

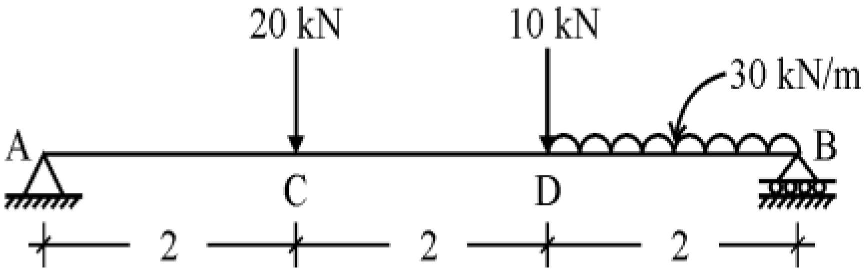
$R_B = 24$ kN समीकरण I मध्ये टाकून R, शोधले जाऊ शकते.

$R_A-24 = 48$

R_A= 24KN................................ उत्तर

उदाहरण क्र.-04

खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 6m आहे, त्यावर दोन पॉईंट लोड 20kNआणि 10kNसह अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून (End) 2m च्या अंतरावर पॉइंट लोड ऍक्ट होत आहेत तसेच 30kN/m चे UDL 2m च्या अंतरावर आहे .तर त्यासाठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



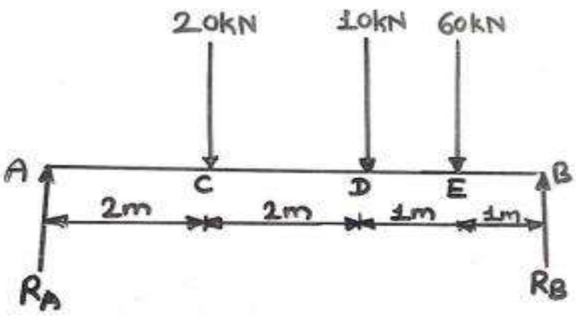
आकृती 3.32:पॉइंट लोड आणि एकसमान वितरित लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम.

उत्तर : दिलेली माहिती: दोन पॉईंट लोड 20kNआणि 10kNसह 30kN/m चे UDL 2 m च्या अंतरावर आहे.

शोधाः सपोर्ट रिऍक्शन RA आणि RB उत्तरः समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिऍक्शन शोधली जाऊ शकते बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\sum Fy = 0$. कोणत्याही बिंदूसंबंधी सर्व बलाच्या सर्व मोमेंटची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे.

$\Sigma M = 0$

UDL ज्या स्पॅन वर आहे त्याचे पॉइंट लोड मध्ये रुपांतर करुया. 30 kN/m चे UDL 2m च्या अंतरावर आहे. 30x2 = 60 kN



आकृती 3.33:एकसमान वितरित लोड चे पॉइंट लोड मध्ये रूपांतर

(साइन कन्व्हेन्शन $\sum Fy = 0$ ↑ +ve, ↓ -ve आणि $\sum M_A = 0$ ⊕ ⊖,

$R_A + R_B - 20 - 10 - 60 = 0$

$R_A + R_B - 90 = 0$

$R_A + R_B = 90$ ....समीकरण (1)

$\sum M_A = 0$ ....A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने (Clockwise) मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट (Anticlockwise) मोमेंट नकारात्मक आहे.

$(20\times2) + (10\times4) + (60\times5) - (R_B\times6) = 0$

$40 + 40 + 300 - 6R_B = 0$

$380 - 6R_B = 0$

$R_B = 63.33$ kN................................ उत्तर

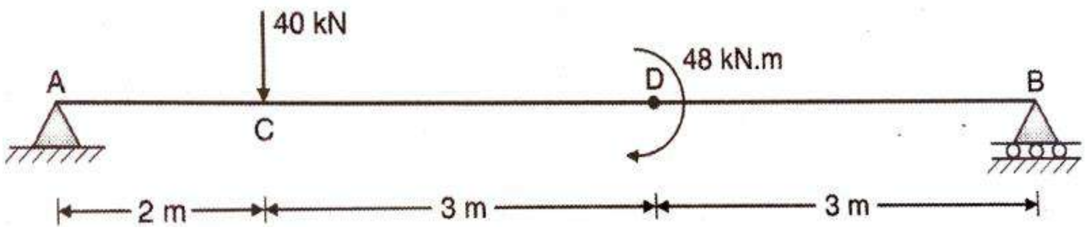
$R_B = 63.33$kNसमीकरण I मध्ये टाकून R, शोधले जाऊ शकते.

$R_A + 63.33 = 90$

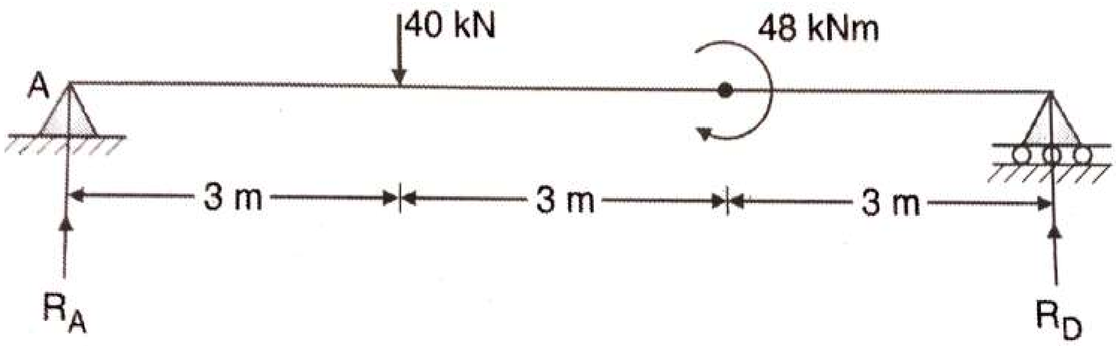
$R_A = 26.67$ kN................................ उत्तर

उदाहरण क्र.-05

खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 8 m आहे, त्यावर एक पॉईंट लोड 40kNआणि मोमेंट 48kNmअनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून 2m आणि 3mअंतरावर लागु होत असतील, तर त्या साठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.

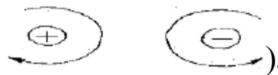


आकृती 3.34: पॉइंट लोड आणि मोमेंट लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम.



आकृती 3.35 : फ्री बॉडी डिग्राम

उत्तर : (साइन कन्व्हेन्शन $\sum Fy = 0$ ↑ +ve, ↓ -ve आणि $\Sigma M_A=0$


),

$\sum Fy = 0$

$R_A+R_B-40= 0$

$R_A+R_B = 40$ kN.......................... समीकरण (1)

$\sum M_A = 0$ ....A बिंदू भोवती मोमेंट घेतल्यानंतर,

घड्याळाच्या दिशेने (Clockwise) मोमेंट लागू करणे सकारात्मक आहे आणि घड्याळाच्या उलट (Anticlockwise) मोमेंट नकारात्मक आहे.

$(40\times2) + 48 -(R_B\times8)=0$

$128-8R_B=0$

$128 = 8R_B$

R_B= 16KN................................ उत्तर

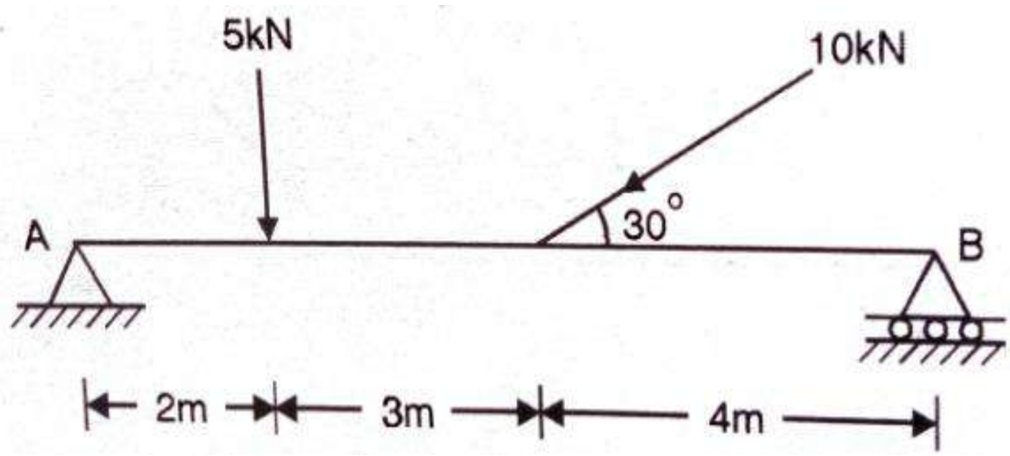
$R_B = 16$ kNसमीकरण । मध्ये टाकून R, शोधले जाऊ शकते.

$R_A+ 16= 40$

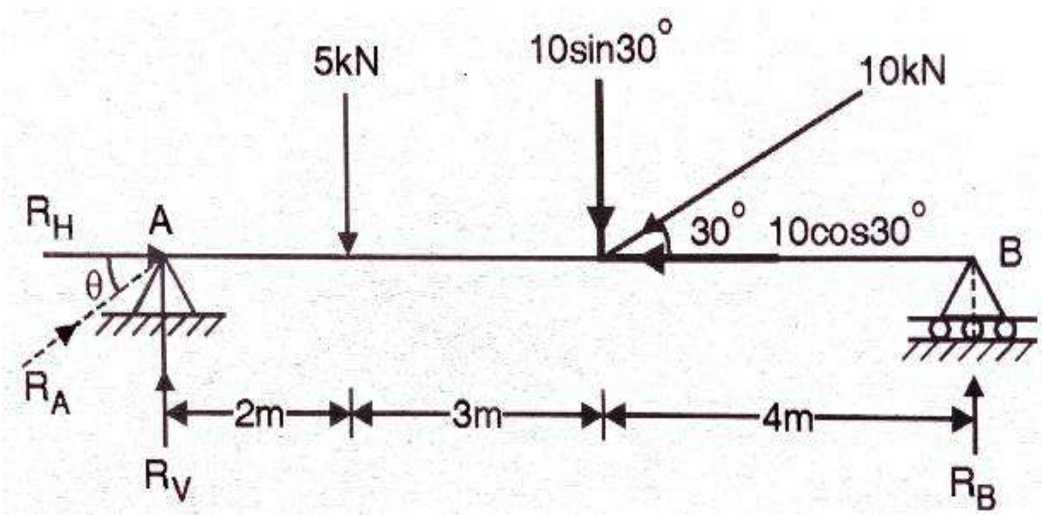
R_A= 24KN................................ उत्तर

उदाहरण क्र.-06

खालील आकृती मध्ये सिम्पली सपोर्टेड बीम ज्याचा स्पॅन 9m आहे, त्यावर एक पॉईंट लोड 5kNआणि दूसरा लोड10kN हा 30^0मध्ये अनुक्रमे डाव्या आणि उजव्या एंडपासून 2m आणि 4mअंतरावर लागु होत असतील, तर त्या साठीच्या सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.

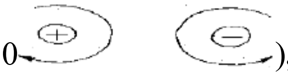


आकृती 3.36:पॉइंट लोड सह सिम्पली सपोर्टेड बीम.



आकृती 3.37:फ्री बॉडीडायग्राम

उत्तर : (साइन कन्व्हेन्शन $\sum Fy = 0$ ↑ +ve, ↓ -ve, $\sum Fx = 0$ → +ve, ← -veआणि $\Sigma M_B=0$ ⊕ ⊖),

$\Sigma M_A = 0$ ($\Sigma M_B = 0$ ),

$5X2 + 10 \sin 30^0 \times 5 + 10 \cos 30^0 \times 0 - R_B X 9 = 0$

$35 - 9R_B = 0$

$35 = 9R_B$

$R_B = 3.90$ kN................................. उत्तर

($\sum Fx = 0 \rightarrow$ +ve, $\leftarrow$ -ve)

$R_H - 10\cos 30^0 = 0$

$R_H - 8.66 = 0$

$R_H = 8.66$ kN................................. उत्तर

($\sum Fy = 0$ $\uparrow$ +ve, $\downarrow$ -ve)

$Rv - 5 - 10 \sin 30^0 + R_B$

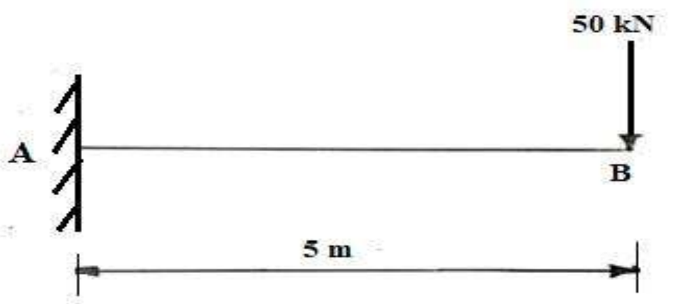
$Rv - 5 - 5 + 3.90$

Rv = 6.10 kN................................. उत्तर

उदाहरणे: कॅन्टिलीव्हर बीम

उदाहरण क्र.- 01

5 m स्पॅनच्याखालीलकॅन्टिलीव्हरबीमसाठी, सपोर्ट रिऍक्शन शोधा .



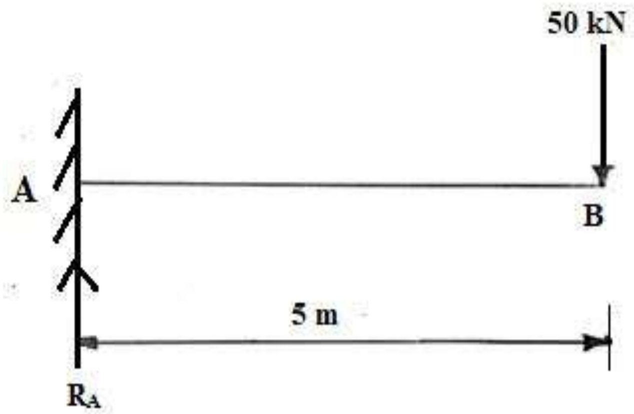
आकृती 3.38: कॅन्टिलीव्हर बीम

उत्तर : दिलेली माहिती : 50 kNचेपॉइंटलोड 5 m बीमवरलागुहोतआहे.

शोधा : सपोर्ट रिऍक्शन RA

उत्तर: समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिऍक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\sum Fy = 0$.



आकृती 3.39: फ्री बॉडी डायग्राम

आता $\Sigma Fy = 0$ (साइन कन्व्हेन्शन Σ Fy = 0 ↑ +ve, ↓ -ve आणि

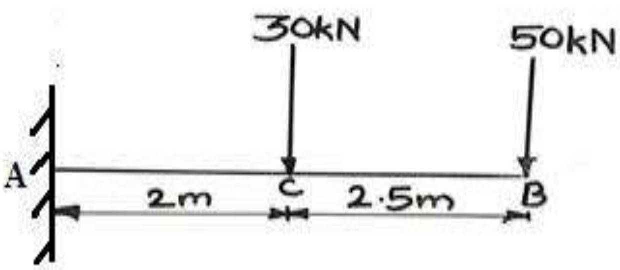
$\Sigma M_A = 0$ ⊕ ⊖)

RA − 50 = 0 ....समीकरण (1)

RA = 50 kN.............................. .....उत्तर

उदाहरण क्र.- 02

5.5 m स्पॅनच्याखालीलकॅन्टिलीव्हरबीमसाठी, सपोर्टरिऍक्शन शोधा.



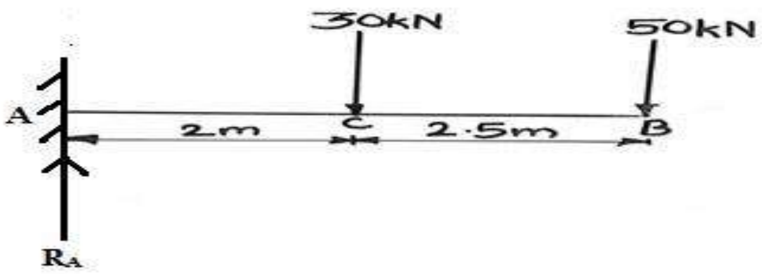
आकृती 3.40: कॅन्टिलीव्हर बीम

दिलेली माहिती : 50 kNआणि 30 kNचेपॉइंटलोड 5.5m च्याबीमवरलागुहोतआहे.

शोधा : सपोर्ट रिऍक्शन RA.

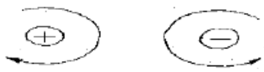
उत्तर : समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिऍक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे ΣFy = **0.**



आकृती 3.41: फ्री बॉडी डायग्राम

(साइन कन्व्हेन्शन ΣFy = 0 ↑ +ve, ↓ -ve आणि ΣM_A =0

**),**

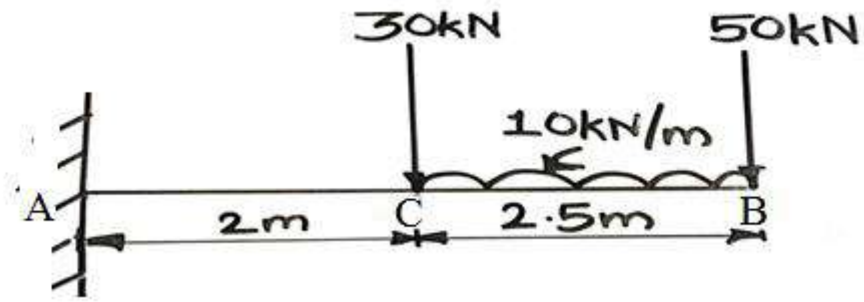
आता **ΣFy = 0**

RA = **30-50 = 0** **.........समीकरण (1)**

RA = 80 kN. (उत्तर)

उदाहरण क्र.- 03

4.5 m स्पॅनच्या खालील कॅन्टिलीव्हर बीमसाठी, सपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



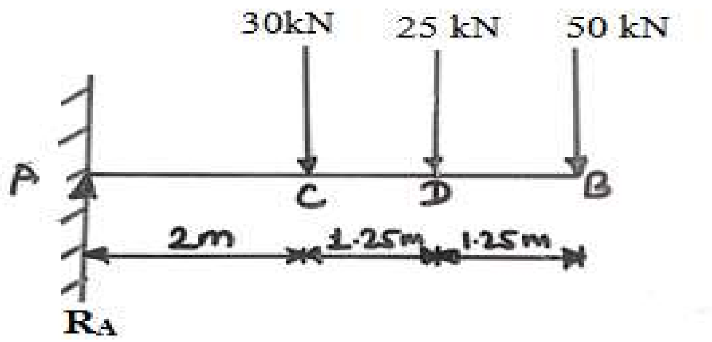
आकृती 3.42: कॅन्टिलीव्हर बीम

दिलेली माहिती : 50 kN,30 kNचेपॉइंटलोडआणि 10 kN/m आणिudl 4.5 m च्याबीमवरलागुहोतआहे.

शोधा : सपोर्ट रिऍक्शन RA

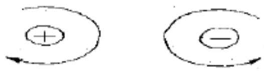
उत्तर : समतोल अटी लागू करून सपोर्ट रिऍक्शन शोधली जाऊ शकते

बलाच्या सर्व उभ्या घटकाची बीजगणित बेरीज शून्याइतकी असणे आवश्यक आहे $\Sigma Fy = 0$.



आकृती 3.43: फ्री बॉडी डायग्राम

(साइन कन्व्हेन्शन $\Sigma Fy = 0$ ↑ +ve, ↓ -ve आणि $\Sigma M_A = 0$


),

आता **$\Sigma Fy = 0$**

R_A - 30 – 50 -25 = 0 ………समीकरण (1)

R_A = 105 kN………………………….. उत्तर

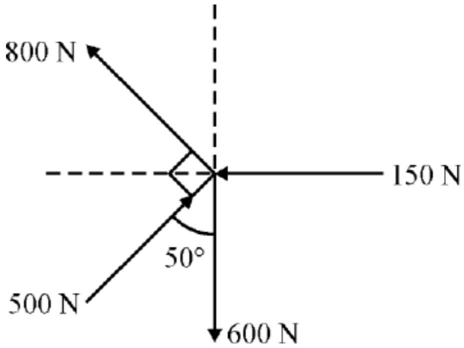
बीमसाठी प्रतिक्रिया सोडविण्यासाठी भौमितीय पद्धत (Beam Reaction Graphically For Simply Supported Beam Subjected To Vertical Load)

बीम करित्या बीम प्रतिक्रिया भौमितीय पध्दतीने सोडविण्या साठी स्टेप्स खालीलप्र माणे आहे.

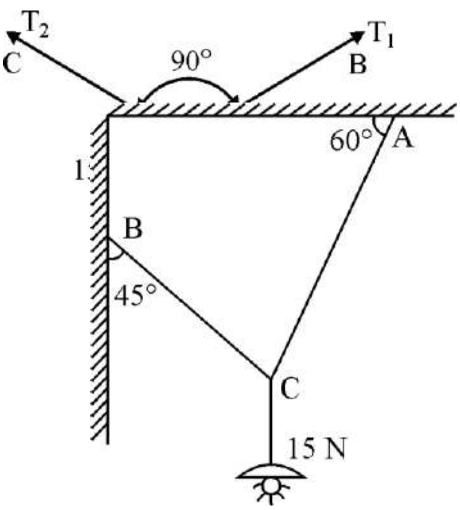
1. स्पेस आणि व्हेक्टर डायग्राम काढा.
2. पोलर डायग्रामकाढा: हि आकृती वेक्टर आकृतीतून प्राप्त होते, ज्यामध्ये बिंदू “O” ध्रुव वेक्टर आकृतीच्या जवळ घेतला जातो आणि वेक्टर आकृतीचे सर्व बिंदू “O” ध्रुवाशी जोडलेले असतात.
3. फणिकुलर पॉलीगोन काढा.
4. हि आकृती पोलर डायग्राम मधुन प्राप्त होते. यामध्ये रिझल्टन्ट प्राप्त करण्यासाठी पहिला आणि शेवटचा बिंदू जोडा.

स्व: अध्ययन (Self-Learning):

1. बॉडी डायग्रामची परिभाषा करा.
2. लामीचे प्रमेयउदाहरणा सह स्पष्ट करा.
3. लामीच्या प्रमेयाचे उपयोग तसेच लामीच्या प्रमेयाची मर्यादास्पष्ट करा.
4. संतुलन(Equlilibrium)आणिरिझल्टन्टउदाहरणा सह स्पष्ट करा.
5. विश्लेषणात्मकदृष्ट्या बल सिस्टमचा समतोलस्थिती सांगा.
6. खालील आकृतीमध्ये दाखवल्याप्रमाणे रिझल्टन्टचीमॅग्निट्यूडआणिदिशाशोधा.

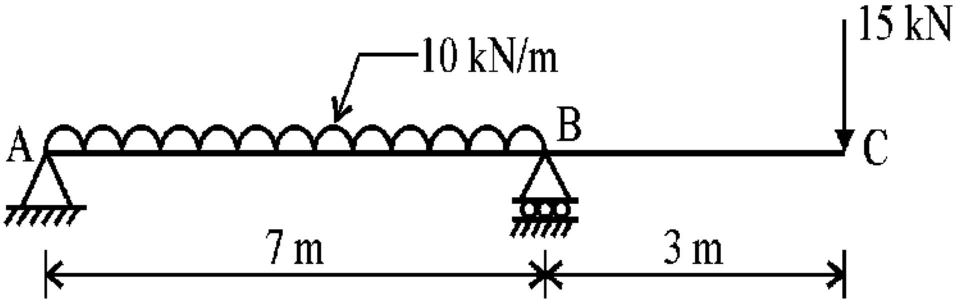


7. खालील को-प्लेनर आणि काँकरण्ट बल प्रणाली साठीतणावाचेमूल्यशोधा.

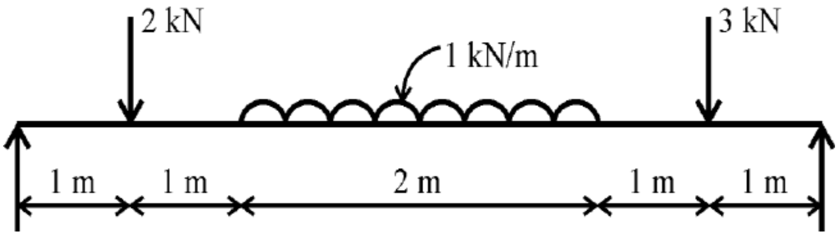


8. खालील को-प्लेनर आणि काँकरण्ट बल प्रणाली साठीतणावाचेमूल्यशोधा.
9. सपोर्टचे विविध प्रकारआकृती सह स्पष्ट करा.
10. बिमचे विविध प्रकारआकृती सह स्पष्ट करा.

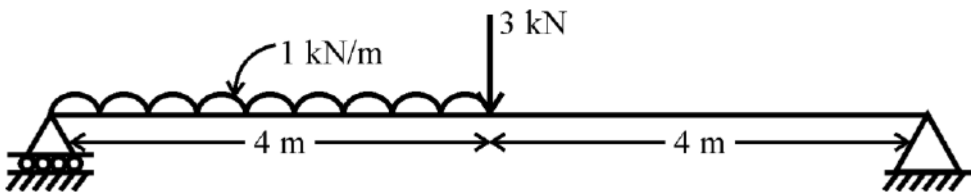
11. खालीलआकृतीमध्येसिम्पलीसपोर्टेडबीमज्याचास्पॅन 10 m आहे ,त्यावरदोनलोड 15 kNआणि 10 kN/m चे UDL 7 m सह अनुक्रमेडाव्याआणिउजव्याएंडपासून 3 mअंतरावरच्यापॉइंट ऍक्टहोतआहेत.तरत्यासाठीच्यासपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



12. खालीलआकृतीमध्येसिम्पलीसपोर्टेडबीमज्याचास्पॅन 6 m आहे ,त्यावरदोनलोड 2 kNआणि 1 kN, 1 kN/m चे UDL 2 m सह पॉइंट ऍक्टहोतआहेत.तरत्यासाठीच्यासपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



13. खालील आकृतीमध्येसिम्पलीसपोर्टेडबीमज्याचास्पॅन 8 m आहे,त्यावरपॉईंटलोड 3 kN डाव्याएंडपासून 4 m अंतरावरच्यापॉइंटऍक्टहोतआहेततसेच 1 kN/m चे UDL 4m च्या अंतरावर आहे.तरत्यासाठीच्यासपोर्ट रिऍक्शन शोधा.



संदर्भ (Reference)

Sr no	Author	Title	Publisher with ISBN Number
1	S. Ramamrutham	Engineering Mechanics	Dhanpat Rai Publishing Co. 2016 ISBN-13: 978-9352164271
2	R. S. Khurmi, N.Khurmi	Engineering Mechanics	S.Chand& Co. New Delhi 2018 ISBN: 978-9352833962
3	S. S. Bhavikatti	Engineering Mechanics	New Age International Private Limited ISBN: 978-9388818698
4	D. S. Bedi, M. P.Poonia	Engineering Mechanics	Khanna Publishing ISBN-13:978-9386173263
5	Dr. R. K. Bansal	Engineering Mechanics	Laxmi Publications ISBN 13: 9788131804094

घटक 4

बलांचे घर्षण

(Friction of forces)

विषय निष्पत्ती (Course outcomes): उपयुक्त हेतूसाठी विविध परिस्थितींमध्ये (Situation) घर्षण (Friction) तत्त्व (Principles) लागू करा

घटक निष्पत्ती (Unit Outcomes):

1. दिलेल्या स्थितीसाठी (Situation) घर्षण बल (Friction force) आणि घर्षण गुणांक (Coefficient of Friction) निश्चित करा.
2. दिलेल्या परिस्थितीसाठी (Condition) घर्षण स्थितीचे वर्णन करा.
3. दिलेल्या स्थितीत घर्षण बल निश्चित करा.
4. फ्री बॉडी डायग्राम (Free body diagram) वापरून दिलेल्या स्थितीसाठी शिडीवर (ladder) काम करणारे विविध बल ओळखा.

4.1 घर्षण (Force):

घर्षणाची व्याख्या **(Force definition)** : एका वस्तूच्या हालचालीचा (Movement) प्रतिकार (Resistance) दुसऱ्याच्या सापेक्ष (Relative) हालचालीला होतो, त्याला घर्षण म्हणतात. दोन पृष्ठभागावर (Surface) असणाऱ्या अनियमिततामुळे (Irregularities) घर्षण निर्माण होते. जेव्हा एखादी वस्तू (Body) दुसरीकडे सरकते (Slide) तेव्हा या अनियमिततेमुळे घर्षणा मध्ये वाढ होते. जर अनियमितता किंवा पृष्ठभागाचा खडबडीतपणा (Surface roughness) वाढला तर घर्षण देखील वाढेल.

आपल्या दैनंदिन कामकाजात घर्षणाची भूमिका (Role) अत्यंत महत्वाची आहे जसे रस्त्याच्या पृष्ठभागावर शूज घालून चालणे, सायकलचे टायर रस्त्याच्या पृष्ठभागावर फिरणे, पेनने पृष्ठावर लिहिणे इत्यादी. घर्षणाच्या अनुपस्थितीत पृष्ठभागावर चालणे खूप कठीण होते ते पृष्ठभागाच्या गुळगुळीतपणामुळे (Smoothness).

4.1.1 घर्षणाचे प्रकार

घर्षणाचे दोन प्रकार आहेत

- स्थिर घर्षण (Static friction)
- गतिशील घर्षण (Rolling friction)

स्थिर घर्षण:

स्थिर घर्षणाची व्याख्या (Definition)**:** जेव्हा स्थिर (Rest) स्थितीत (Condition) असताना वस्तूद्वारे अनुभवलेल्या घर्षणाला स्थिर घर्षण म्हणतात.

गतिशील घर्षण:

गतिशील घर्षणाची व्याख्या (Definition)**:** जेव्हा वस्तू हालचालीच्या (Moving) अवस्थेत असते तेव्हा वस्तूद्वारे अनुभवलेले (Experienced) घर्षणाला गतिशील घर्षण म्हणतात.

गतिशील घर्षण हे दोन प्रकारांमध्ये विभागलेले आहे

- सरकते घर्षण (Sliding friction)
- रोलिंग घर्षण (Rolling friction)

सरकते घर्षण (Sliding friction)

सरकते घर्षणाची व्याख्या (Definition): जेव्हा एक वस्तू दुसऱ्या वस्तूवर सरकते तेव्हा वस्तूद्वारे अनुभवलेले घर्षणाला सरकते घर्षण म्हणतात.

रोलिंग घर्षण (Rolling friction)

रोलिंग घर्षणाची व्याख्या (Definition): एखाद्या वस्तूला दुसऱ्या वस्तूवर रोलिंग होत असतांना जे घर्षण जाणवते त्याला रोलिंग घर्षण म्हणतात.

घर्षणाचे फायदे (Advantages of friction):

- आपण पृष्ठभागावर मुक्तपणे (Freely) फिरू शकतो.
- आपण पेन सहज पकडून पानावर लिहू शकतो.
- ऑटोमोबाईल ब्रेकिंग सिस्टम घर्षण तत्त्वानुसार कार्य करते.
- रस्त्याच्या पृष्ठभागावर (Surface) टायरच्या मदतीने वाहनाची हालचाल होते.
- आपण वस्तू (Body) हातात धरून ठेवू शकतो.

घर्षणांचे तोटे (Disadvantages of friction):

- मशीनमध्ये हलणारे (Moving) भागांचे Wear आणि Tear होते.
- मशीन ची शक्ती (Power) कमी होते.
- मशीन चालवण्यासाठी जास्त शक्ती (Power) लागते.
- मशीनची कार्यक्षमता (Efficiency) कमी होते.
- यामुळे मशीनची देखभाल (Maintenance) वाढेल.
- उर्जा (Energy) निर्मितीसाठी ऑटोमोबाईलला अधिक इंधनाची (Fuel) आवश्यकता लागेल.

स्थिर घर्षणांचे नियम (Laws of static friction)

स्थिर घर्षणाचे नियम खालीलप्रमाणे आहेत

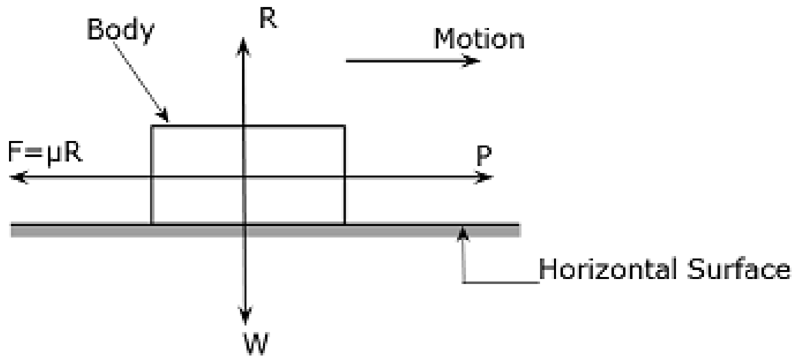
- घर्षण बल (Friction force) नेहमी संपर्काच्या पृष्ठभागावर टँजेन्शिअल (Tangential) कार्य करते.
- घर्षण बल वस्तूच्या (Body) गतीच्या (Motion) दिशेच्या (Direction) विरुद्ध (Opposite) कार्य (Act) करते.
- संपर्कात असलेल्या पृष्ठभागाच्या क्षेत्रावर (Surface area) घर्षण बल स्वतंत्र (Independent) असते
- घर्षण बल पृष्ठभागाच्या खडबडीवर (Roughness) अवलंबून असते.
- घर्षण बलाचे (Friction force) सामान्य प्रतिक्रियेचे (Normal Reaction) गुणोत्तर स्थिर राहते.
- स्थिर घर्षण (Static friction) नेहमी गतिशील घर्षणापेक्षा (Dynamic friction) जास्त असते.

गतिशील घर्षणाचे नियम (Laws of dynamic friction)

- घर्षण बल (Friction force) नेहमी एका दिशेने कार्य करते, ज्याच्या विरुद्ध (Opposite) वस्तू हलते.
- गतिज घर्षणांची परिमाण (Magnitude) दोन पृष्ठभागांमधील सामान्य प्रतिक्रियेचे स्थिर गुणोत्तर (Ratio) धारण (Bears) करते. परंतु घर्षण (Friction) मर्यादित करण्याच्या बाबतीत हे प्रमाण त्यापेक्षा किंचित कमी आहे.
- मध्यम गतीसाठी, घर्षण बल स्थिर (Constant) राहते. पण वेग (Speed) वाढल्याने तो किंचित कमी होतो.

4.1.2: समतोल मर्यादित करणे (Limiting Equilibrium):

आकृती 4.1 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे (W) वजनाची वस्तू खडबडीत (Rough) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) ठेवलेली दर्शवत (Represent) आहे.वस्तूचे वजन (W) नेहमी अनुलंब (Vertically) खालच्या दिशेने कार्य (Act) करते आणि सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction) (R) नेहमी अनुलंब वरच्या दिशेने कार्य करते.जर आपण थोडे आडवे बल (Horizontal force) 'P' लावले तर घर्षण बला (Friction force) मुळे (F) वस्तू पुढच्या दिशेने जात नाही, बलाच्या दिशेने पुढे जाणे या टप्प्यावर घर्षण बल जास्तीत जास्त (Maximum) आहे आणि ती आडव्या बलाच्या (P) बरोबरीची (Equal) आहे आणि वस्तूच्या या अवस्थेला (Situation) मर्यादित समतोल (Limiting Equilibrium) म्हणून ओळखले जाते. जर आपण आडवे बल (P) आणखी वाढवले तर घर्षण बलापेक्षा (F), आडवे बल (P) चा परिमाण वाढल्यामुळे वस्तू बलाच्या दिशेने जाईल.



आकृती -4.1 मर्यादित समतोल

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

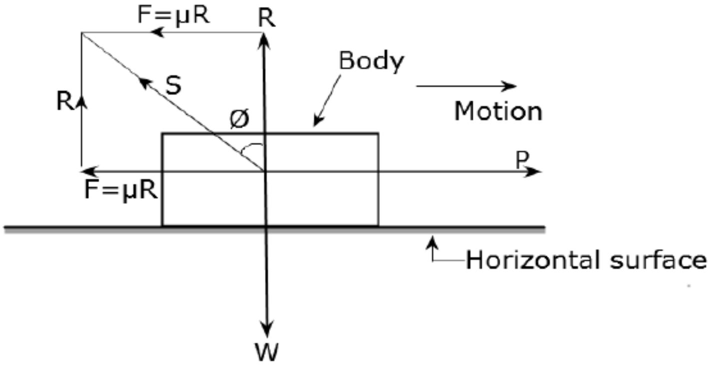
S = परिणामी प्रतिक्रिया (Reaction force) N मध्ये

समतोल मर्यादित करण्याची अटी (Condition for Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$	→	+ve चिन्ह (आडवे बल उजवीकडे जात आहे)
	←	–ve चिन्ह (आडवे बल डाव्या बाजूला जात आहे)
$\sum Fy = 0$	↑	+ve चिन्ह (उभ्या बलाला वरची दिशा आहे)
	↓	–ve चिन्ह (उभ्या बलाला खालची दिशा आहे)

4.1.3 घर्षण मर्यादित करणे किंवा घर्षण मूल्य मर्यादित करणे (Limiting friction or limiting value of friction)

हे घर्षण बलाचे जास्तीत जास्त मूल्य (Value) आहे,जेव्हा एखादी वस्तू दुसऱ्या वस्तूच्या पृष्ठभागावर (Surface) सरकण्यास (Slide) सुरुवात करते.जेव्हा बल (Force) मर्यादित घर्षणापेक्षा (Limiting fricton) कमी असते, तेव्हा वस्तू विश्रांती मध्ये (Rest) राहते.जेव्हा बल मर्यादित घर्षणापेक्षा जास्त असते, तेव्हा वस्तू हलू (Move) लागते.



आकृती 4.2: मर्यादित घर्षण (Limiting friction)

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

S = परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant reaction) N मध्ये

4.1.4 घर्षण गुणांक (Coefficient of friction):

घर्षण बल (Friction force) व सामान्य प्रतिक्रियेच्या (Normal reaction) गुणोत्तराला (Ratio) घर्षण गुणांक असे म्हणतात. घर्षण गुणांक हे μ ह्या चिन्हाद्वारे दर्शविले जाते.

$$\text{घर्षण गुणांक } (\mu) = \frac{\text{घर्षण बल (F)}}{\text{सामान्य प्रतिक्रिया (R)}}$$

$$\mu = \frac{F}{R}$$

घर्षण गुणांक (μ) ला एकक (Unit) नाही.

4.1.5 घर्षण कोन (Angle of friction) आणि परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant Reaction)

सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction) आणि परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant reaction) यांच्यातील कोनाला (Angle) घर्षण कोन म्हणतात. घर्षण कोन हे $'\emptyset'$ ह्या चिन्हाद्वारे दर्शविले जाते.

आकृती 4.2 पासून,

$$\tan\emptyset = \frac{F}{R}$$

But $\mu = \frac{F}{R}$

$\tan\emptyset = \mu$ ...... घर्षण कोन ($\emptyset$) आणि घर्षण गुणांक (μ) यांच्यातील संबंध.

परिणामी प्रतिक्रिया (S)

$S = \sqrt{F^2 + R^2}$

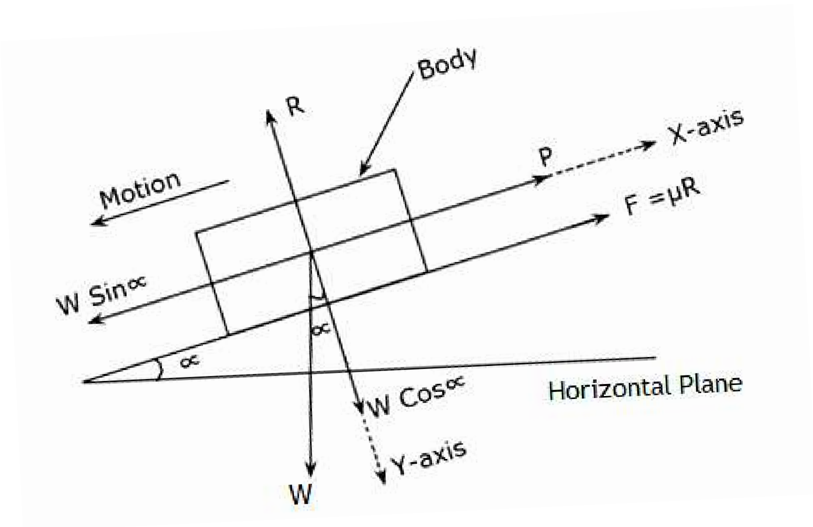
येथे,

R = सामान्य प्रतिक्रिया हे N मध्ये

F = घर्षण बल हे N मध्ये

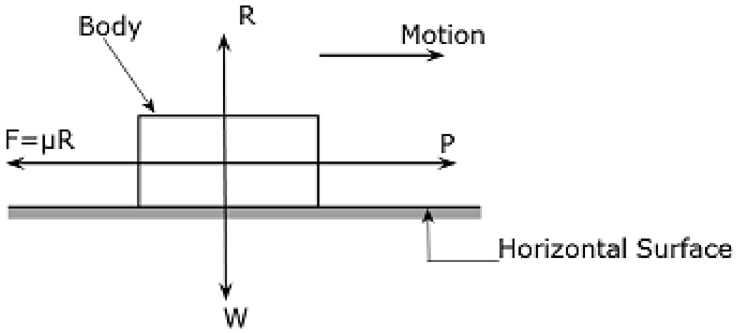
4.1.6 रिपोज कोन (Angle of repose) $(\propto)$

जेव्हा वस्तू एखाद्या झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Incline surface) ठेवली जाते आणि वस्तूवर कोणत्याही प्रकारच्या बाह्य बलाचा (External force) प्रभाव न घेता स्वतःच्या वजनामुळे (Own weight) खाली सरकण्यास सुरुवात होते तेव्हा आडव्या पृष्ठभागाचा (Horizontal surface) झुकलेल्या पृष्ठभागाशी (Incline surface) झालेल्या कोनाला रिपोज कोन **(Angle of repose)** असे म्हणतात.



आकृती -4.3:रिपोज कोन

4.2 जेव्हा वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) ठेवली जाते आणि बल (Force) समतोल स्थितीत (Equilibrium condition) आडव्या पृष्ठभागाला (Horizontal surface) समांतर (Parallel) लागू होतो.



आकृती -4.4

आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) (W) एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर आडवे बल (Horizontal force) (P) लावलेला आहे असा विचार करू. बलामुळे (P) वस्तू पुढच्या दिशेने जाईल आणि या दिशेच्या विरुद्ध घर्षण बल (Frictional force) (F), आकृती 4.4 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कार्य करेल.

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ $\longrightarrow$ +ve चिन्ह (आडवे बल उजवीकडे जात आहे)

← –ve चिन्ह (आडवे बल डाव्या बाजूला जात आहे)

$\therefore + P - F = 0$

परंतु $F = \mu R$,

$\therefore + P - \mu R = 0$

$\therefore + P = \mu R = F$ .... (i)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑ +ve चिन्ह (उभ्या बलाला वरची दिशा आहे)

↓ –ve चिन्ह (उभ्या बलाला खालची दिशा आहे)

$\therefore + R - W = 0$

$\therefore + R = W$ .... (ii)

जेव्हा वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) ठेवली जाते आणि बल (Force) समतोल स्थितीत (Equilibrium condition) आडव्या पृष्ठभागाला (Horizontal surface) समांतर (Parallel) लागू होतो, या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे.

उदाहरण क्र -01

3000 N वजनाची वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) ठेवलेली आहे आणि जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.3 असेल तर वस्तू हलविण्यासाठी आवश्यक आडवे बल (Horizontal force) शोधा.

उत्तर:

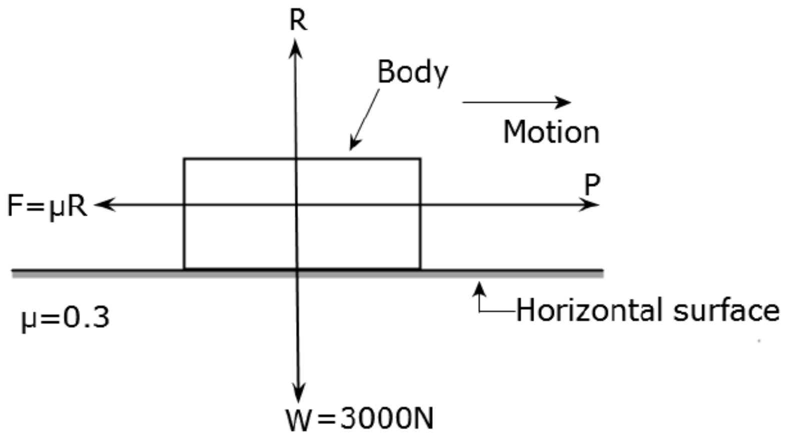
दिलेली माहिती (Given data):

वस्तूचे वजन (W) = 3000 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.3

आडवे बल (P) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आणि आडवे बल (Horizontal force) वस्तूवर लागू केले आहे.



आकृती-4.5

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → + ve ← – ve

$\therefore + P - F = 0$

$\therefore + P - \mu R = 0$

$\therefore + P - 0.3R = 0$

$\therefore + P = 0.3R$ ....(i)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium) :

$\sum Fy = 0$ ↑ + ve ↓ –ve

$\therefore + R - W = 0$

$\therefore + R - 3000 = 0$

$\therefore R = 3000$ N

R = 3000 N समीकरण (i) मध्ये टाकल्यास, आपल्याला मिळते

$+ P = 0.3R$

$\therefore + P = 0.3(3000)$

$\therefore$ **P = 900 N**.................. आडवे बल

उदाहरण क्र.- 02

300 N वजनाची वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि वस्तू हलविण्यासाठी आवश्यक असलेले आडवे बल (Horizontal force) 85 N आहे. तर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) आणि घर्षण बल (Frictional force) किती असेल.

उत्तर:

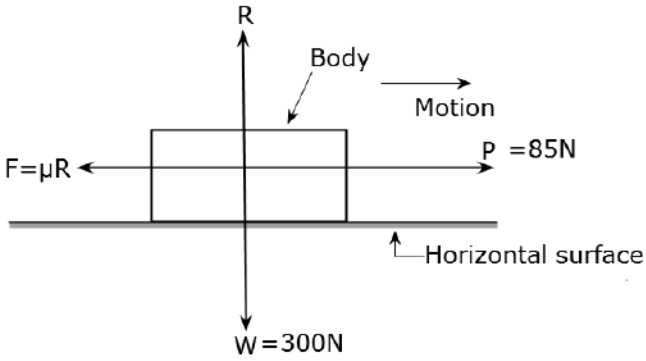
दिलेली माहिती (Given data):

वस्तूचे वजन (W) = 300 N

आडवे बल (P) = 85 N

घर्षण गुणांक (μ) =?

घर्षण बल (F) =?



आकृती-4.6

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आणि आडवे बल (Horizontal force) वस्तूवर लागू केले आहे.

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium) :

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

$\therefore + P – F = 0$

$\therefore 85 – F = 0$

$\therefore$ **F = 85 N**.............................. घर्षण बल (Frictional force)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑ +ve ↓ –ve

$\therefore +R – W = 0$

$\therefore +R – 300 = 0$

$\therefore$ **R = 300 N** .... सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant Reaction)

आपल्याला माहित आहे की, $\mu = \frac{F}{R}$

$\therefore \mu = \frac{85}{300}$

$\therefore \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0.2833}$ .... घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

उदाहरण क्र. -03

25 kN वजनाची वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि आडवे बल P वस्तूवर लावलेले आहे, जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.7 आहे .तर सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction),घर्षण बल (Frictional force) आणि घर्षण कोन (Angle of friction) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

वस्तूचे वजन (W) = 25 kN = 25 × 1000 = 25000 N............... (1 kN = 1000 N)

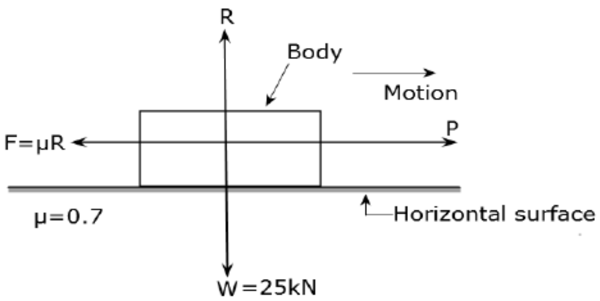
घर्षण गुणांक (μ) = 0.7

सामान्य प्रतिक्रिया (R) =?

घर्षण बल (F) =?

घर्षण कोन ($\emptyset$) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आणि आडवे बल (Horizontal force) वस्तूवर लागू केली आहे.



आकृती-4.7

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

$\therefore + P - F = 0$

$\therefore + P - \mu R = 0$

$\therefore + P - 0.7R = 0$

$\therefore + P = 0.7R$ .... (i)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑ +ve ↓ –ve

$\therefore + R - W = 0$

$\therefore + R - 25000 = 0$

$\therefore$ **R = 25000 N**................................. सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction)

R = 25000 N समीकरण (i) मध्ये टाकल्यास, आपल्याला मिळते

$+ P = 0.7R$

$\therefore + P = 0.7 \times 25000$

$\therefore$ **P =17500 N** ....आडवे बल (Horizontal force)

तसेच,

$\tan\emptyset = \mu$

$\therefore \emptyset = \tan^{-1}(\mu)$

$\therefore \emptyset = \tan^{-1}(0.7)$

$\therefore \emptyset =$ **34.99°**.................................... घर्षण कोन (Angle of friction)

तसेच,

$\therefore F = \mu R$

$\therefore F = 0.7 \times 25000$

$\therefore$ **F =17500 N**.. घर्षण बल (Friction force)

उदाहरण क्र. -04

आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली 60 N वजन असलेली वस्तू (Body) ओढण्यासाठी 30 N आडवे बल (Horizontal force) आवश्यक आहे. तर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) आणि परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant reaction) किती असेल?

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

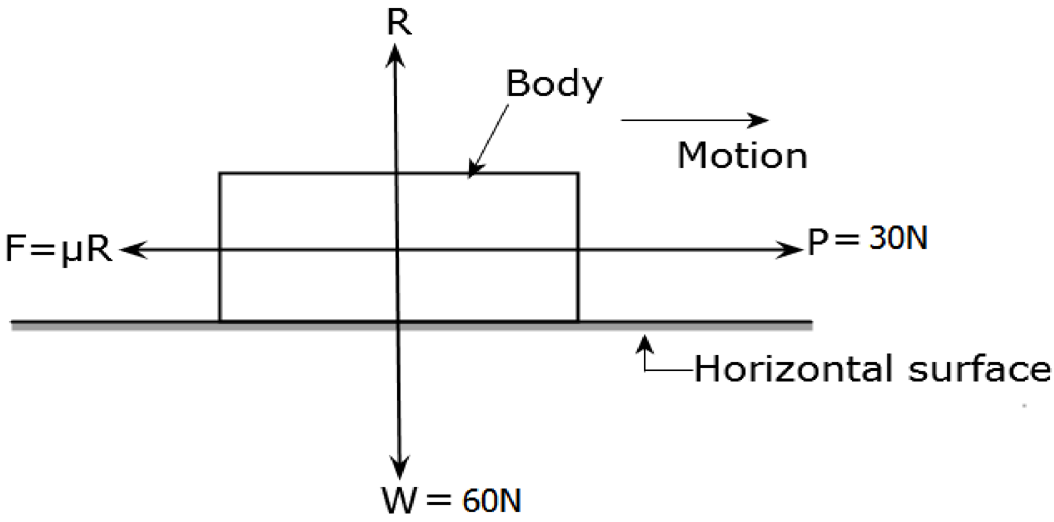
वस्तूचे वजन (W) = 60 N

आडवे बल (P) = 30 N

घर्षण गुणांक (μ) =?

परिणामी प्रतिक्रिया (S) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आणि आडवे बल (Horizontal force) वस्तूवर लागू केली आहे.



आकृती-4.8

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

$\therefore + P - F = 0$

$\therefore 30 - F = 0$

$\therefore$ **F = 30 N** .... घर्षण बल (Friction force)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑ +ve ↓ –ve

$\therefore + R - W = 0$

$\therefore + R - 60 = 0$

$\therefore$ **R = 60 N**...................................... सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction)

आपल्याला माहित आहे की,

$\mu = \frac{F}{R}$

$\therefore \mu = \frac{30}{60}$

$\therefore$ **μ = 0.5**.. घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

परिणामी प्रतिक्रिया (S)

$S = \sqrt{F^2 + R^2}$

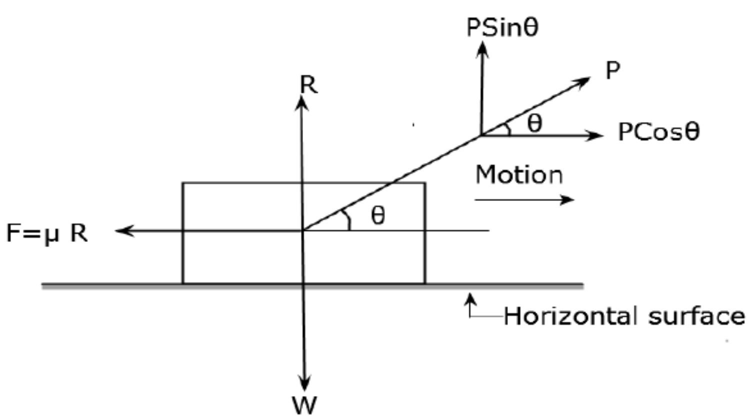
$\therefore \quad S = \sqrt{30^2 + 60^2}$

$\therefore \quad S = \sqrt{4500}$

$\therefore$ **S = 67.08 N** .... परिणामी प्रतिक्रिया (Resultant reaction)

4.2.1 जेव्हा वस्तू (Body) ही आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर झुकलेले बल (Inclined force) हे लागलेले असतांना.

आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal surface) W एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर झुकलेले बल (Inclined force) P हे आडव्या पृष्ठभागाशी (θ) एवढा कोन करत आहे असा विचार करू. झुकलेलेल्या बलामुळे (P) वस्तू पुढच्या दिशेने जाईल आणि या दिशेच्या विरुद्ध घर्षण बल (Friction force) F .आकृती 4.9 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कार्य करेल.



आकृती-4.9

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Inclined force) N मध्ये

θ = आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) झुकलेल्या बलाने (Inclined force) P केलेला कोन degree मध्ये

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ $\longrightarrow$ +ve $\longleftarrow$ –ve

$\therefore + P\cos\theta - F = 0$

$\therefore F = P\cos\theta$ .... (i)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ $\uparrow$ +ve $\downarrow$ –ve

$\therefore P\sin\theta + R - W = 0$

$\therefore W = P\sin\theta + R$ .... (ii)

जेव्हा वस्तू (Body) ही आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) आणि वस्तूवर झुकलेले बल (Inclined force) हे लागलेले असतांना, या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे.

उदाहरण क्र.- 01

आडव्या खडबडीत पृष्ठभागावर (Rough horizontal Surface) 500 N एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर झुकलेले बल (Inclined force) 140 N हे आडव्या पृष्ठभागाशी 30° एवढा कोन करत आहे. तर सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction) आणि घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती: (Given data)

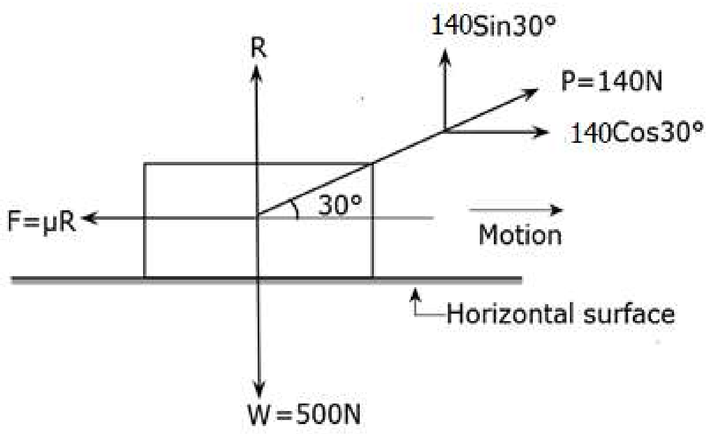
वस्तूचे वजन (W) = 500 N

झुकलेले बल (P) = 140 N

घर्षण गुणांक (μ) =?

सामान्य प्रतिक्रिया (R) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि झुकलेले बल (Inclined force) हे आडव्या पृष्ठभागाशी (θ =30°) एवढा कोन करत आहे.



आकृती-4.10

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

∴ +140cos30° – F = 0

∴ 121.24 – F = 0

∴ **F = 121.24 N** .... घर्षण बल (Friction force)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑ +ve ↓ –ve

∴ 140sin30° + R – W = 0

∴ 70 + R – 500 = 0

∴ R – 430 = 0

∴ **R = 430 N**.............................. सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction)

आपल्याला माहित आहे की,

$$\mu = \frac{F}{R}$$

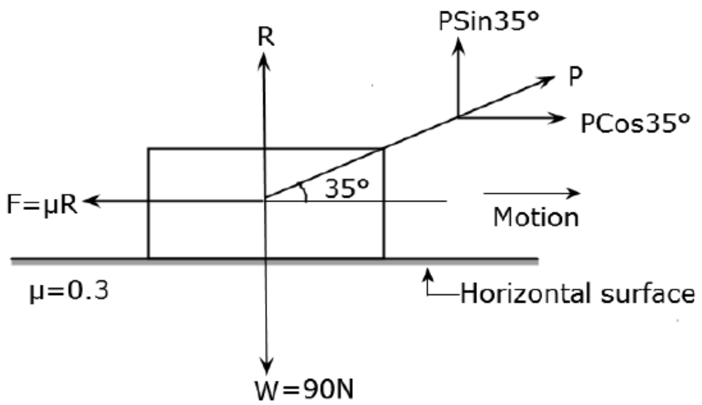
$$\therefore \mu = \frac{121.24}{430}$$

∴ **μ = 0.28**................................ घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

उदाहरण क्र. - 02

90 N वजनाची (Weight) वस्तू खडबडीत आडव्या पृष्ठभागावर (Rough horizontal Surface) ठेवून बलाने (Force) खेचली जात आहे, जर झुकलेले बल (Inclined force) हे आडव्या पृष्ठभागाशी 35° एवढा कोन करत आहे आणि घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) हा 0.3 असेल तर झुकलेले बल शोधा.

उत्तर:



आकृती-4.11

दिलेली माहिती (Given data):

वस्तूचे वजन (W) = 90 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.3

झुकलेले बल (P) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि झुकलेले बल (Inclined force) हे आडव्या पृष्ठभागाशी (θ =35°) एवढा कोन करत आहे.

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

$\therefore + P \cos 35° - F = 0$

$\therefore P\,(0.819) - \mu R = 0$

$\therefore P\,(0.819) = 0.3R$

$$\therefore \quad R = \frac{0.819P}{0.3}$$

$\therefore \quad R = 2.73P$ .... (i)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑+ve ↓ –ve

$\therefore P \sin 35° + R - W = 0$

$\therefore 0.573P + R - 90 = 0$

$\therefore R = 90 - 0.573P$ .... (ii)

समीकरण (i) आणि (ii) पासून, असे लिहू शकतो की

$2.73P = 90 - 0.573P$

$\therefore \quad 2.73P + 0.573P = 90$

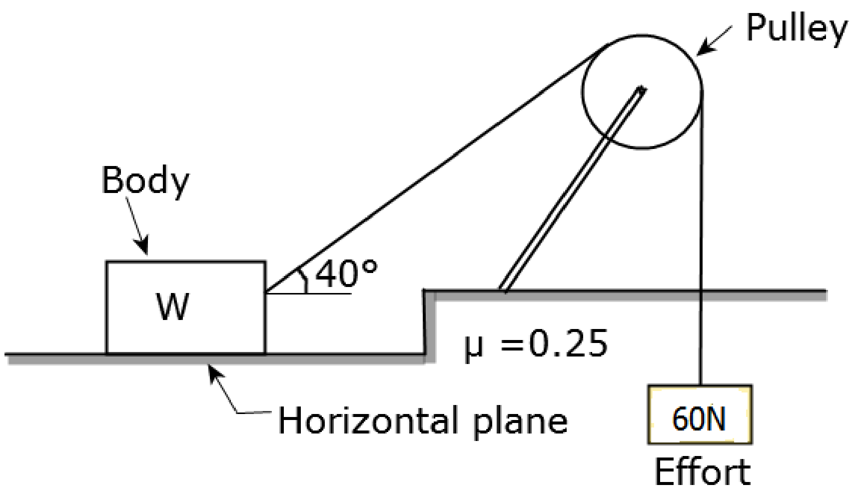
$\therefore \quad 3.303P = 90$

$$\therefore \quad P = \frac{90}{3.303}$$

$\therefore$ **P = 27.24 N** .... झुकलेले बल (Inclined force)

उदाहरण क्र.- 03

खालील आकृती 4.12 मध्ये, W वजनाची एक वस्तू आडवी (Horizontal) हलवण्याची व्यवस्था दर्शवते. वस्तूला हलवण्यासाठी 60 N एवढे बल (Force) लावलेले आहे. जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.25 असेल, तर वस्तूचे वजन (Weight) शोधा.



आकृती-4.12

उत्तर:

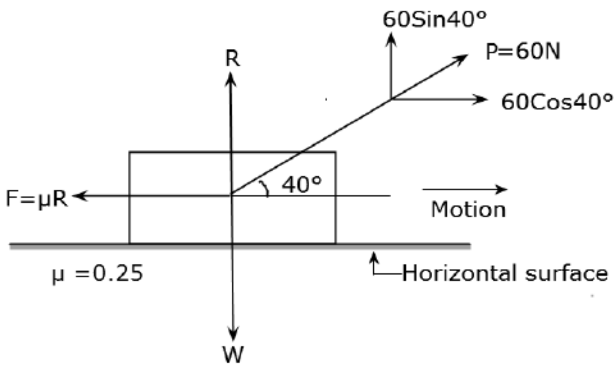
दिलेली माहिती (Given data):

घर्षण गुणांक (μ) = 0.25

लावलेले बल (P) = 60 N

वस्तूचे वजन (W) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि झुकलेले बल (Inclined force) हे आडव्या पृष्ठभागाशी (θ = 40°) एवढा कोन करत आहे.



आकृती-4.13

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

$\therefore + 60\cos40° - F = 0$

$\therefore 45.96 - \mu R = 0$

$\therefore 45.96 - 0.25R = 0$

$\therefore 0.25R = 45.96$

$\therefore R = \frac{45.96}{0.25}$

$\therefore$ **R = 183.84 N** .... सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑ +ve ↓ –ve

$\therefore 60\sin40° + R - W = 0$

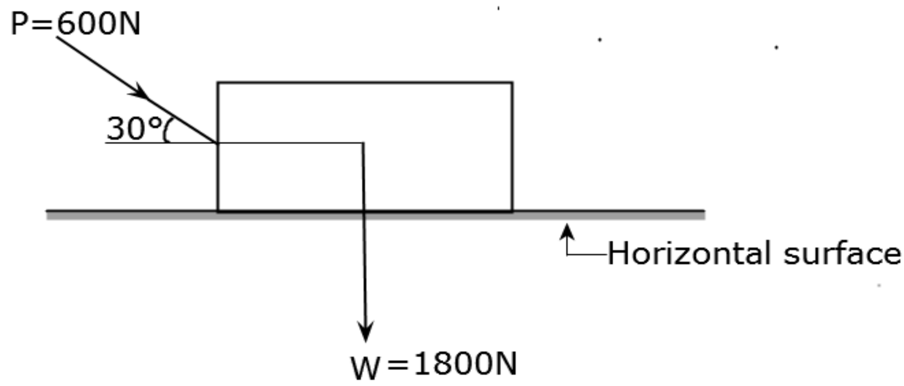
$\therefore 38.56 + 183.84 - W = 0$

$\therefore 222.4 - W = 0$

$\therefore$ **W = 222.4 N** .... वस्तूचे वजन (Weight)

उदाहरण क्र.- 04

खालील आकृती 4.14 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे वस्तू समतोल स्थितीत (Equilibrium condition) असल्यास घर्षण गुणांकचे (Coefficient of friction) मूल्य (Value) शोधा.



आकृती -4.14

उत्तर:

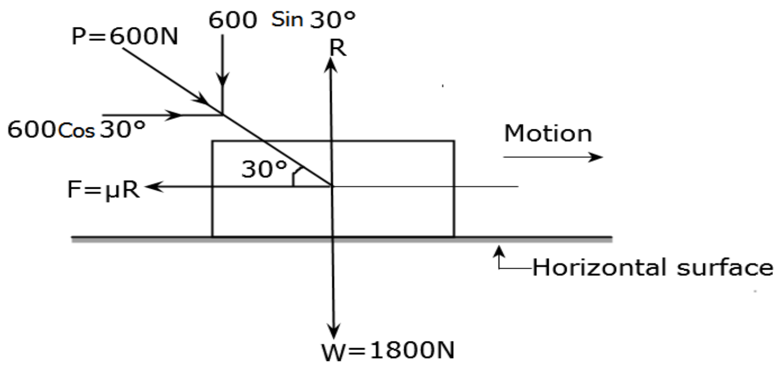
दिलेली माहिती (Given data):

लावलेले बल (P) = 600 N

वस्तूचे वजन (W) = 1800 N

घर्षण गुणांक (μ) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि झुकलेले बल हे आडव्या पृष्ठभागाशी (θ = 30°) एवढा कोन करत आहे



आकृती -4.15

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

∴ + 600cos30° – F = 0

∴ 519.61 – F = 0

∴ **F = 519.61 N** .... घर्षण बल (Friction force)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑ +ve ↓ –ve

∴ – 600 sin30° + R – W = 0

∴ – 300 + R – 1800 = 0

∴ R – 2100 = 0

∴ **R = 2100 N** .... सामान्य प्रतिक्रिया (Normal reaction)

आपल्याला माहित आहे की,

$\mu = \frac{F}{R}$

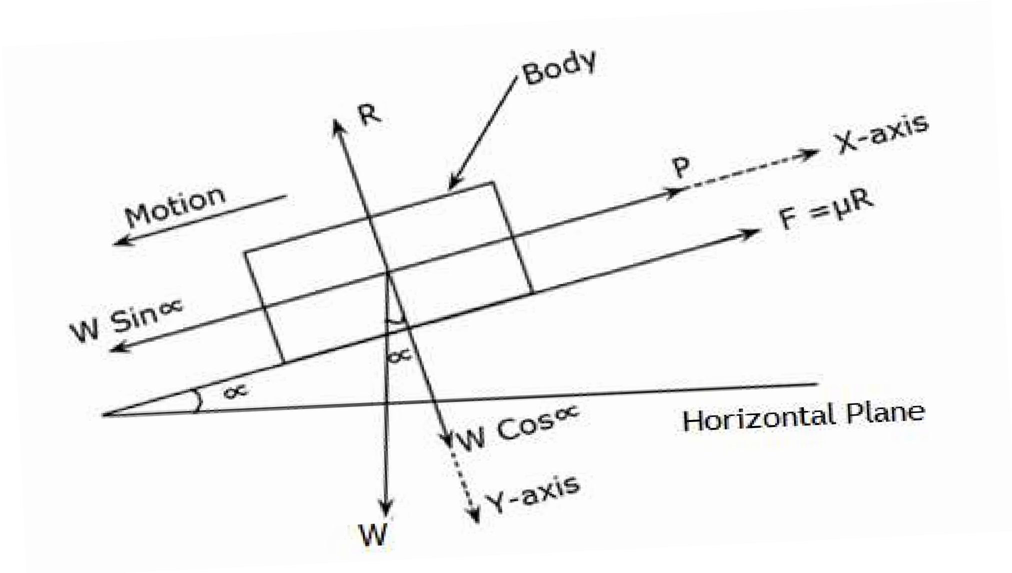
∴ $\mu = \frac{519.61}{2100}$

∴ **μ = 0.247** .... घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

4.3 जेव्हा वस्तू (Body) झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) असते आणि बल (Force) झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागू होते.

Case: 1 वस्तू पृष्ठभागावरून (Surface) खाली (Down) सरकतांना.

झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) 'W' एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि झुकलेला पृष्ठभाग हा आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) ∝ एवढा कोन (Angle) करत आहे, तसेच लावलेले बल (Force) हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागलेले आहे असा विचार करू. आकृती 4.16 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे स्वतःच्या वजनामुळे वस्तू झुकलेल्या पृष्ठभागावरून खाली (Down) सरकेल.



आकृती-4.16

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of Body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

$\propto$ = झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined Surface) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal Surface) केलेला कोन Degree मध्ये

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

$\therefore -W\sin\propto + F + P = 0$

$\therefore F = W\sin\propto - P$............ (i)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

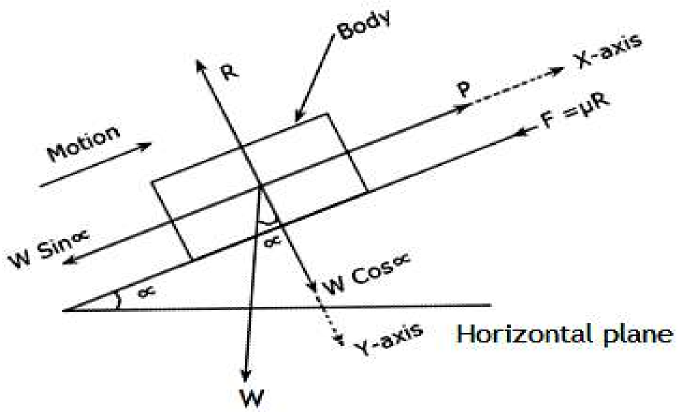
$\sum Fy = 0$ ↑+ve ↓–ve

$\therefore -W\cos\propto + R = 0$

$\therefore R = W\cos\propto$..................... (ii)

Case: 2 वस्तू पृष्ठभागावरून (Surface) वरती (Up) सरकतांना

झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) W एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि झुकलेला पृष्ठभाग हा आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) $\propto$ एवढा कोन (Angle) करत आहे, तसेच लावलेले बल (Force) हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागलेले आहे असा विचार करू. आकृती 4.17 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे लावलेल्या बलामुळे वस्तू झुकलेल्या पृष्ठभागावरून वरती सरकेल.



आकृती - 4.17

येथे,

W = वस्तूचे वजन (Weight of Body) N मध्ये

R = सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction) N मध्ये

μ = घर्षण गुणांक (Coefficient of friction)

P = बल (Force) N मध्ये

F = घर्षण बल (Friction force) N मध्ये

$\propto$ = झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined Surface) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal Surface) केलेला कोन Degree मध्ये.

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

$\therefore -W\sin\propto - F + P = 0$

$\therefore F = -W\sin\propto + P$ .... (i)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑ +ve ↓ –ve

$\therefore -W\cos\propto + R = 0$

$\therefore R = W\cos\propto$..................... (ii)

जेव्हा वस्तू (Body) झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) ठेवले जाते आणि बल (Force) झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागलेले असतांना, या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे.

उदाहरण क्र.- 01

700 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Rough inclined surface) ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined surface) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) केलेला कोन 30° आहे. जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.6 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून खाली (Down) येण्यापासून रोखण्यासाठी किती बलाची (Force) आवश्यकता आहे.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

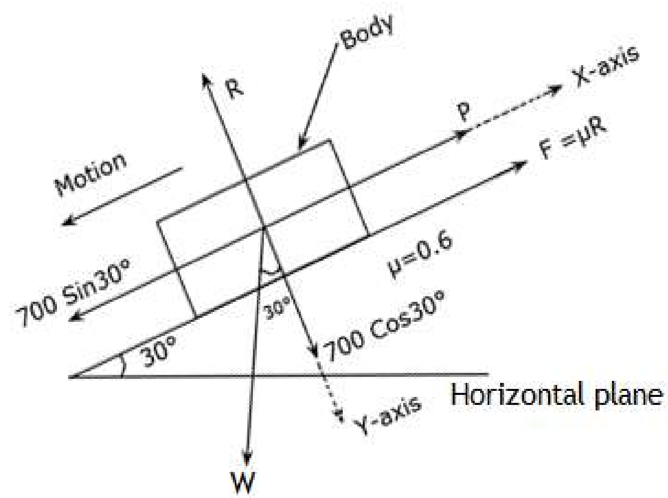
वस्तूचे वजन (W) = 700 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.6

झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन ($\propto$) $= 30°$

लागणारे बल (P) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू ही झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली आहे आणि बल हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर लागू झालेले आहे.



आकृती -4.18

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑+ ve ↓ –ve

$\therefore -700\cos30° + R = 0$

$\therefore -606.2 + R = 0$

$\therefore$ **R = 606.2 N** .... सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction)

आपल्याला माहित आहे की,

$\therefore F = \mu R$

$\therefore F = 0.6 \times 606.2$

$\therefore$ **F = 363.72 N** .... घर्षण बल (Friction force)

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ →+ve ← –ve

$\therefore -700\sin30° + F + P = 0$

$\therefore -350 + 363.72 + P = 0$

$\therefore -13.72 + P = 0$

$\therefore$ **P = 13.72 N** .... वस्तूला खाली येण्यापासून रोखण्यासाठी लागणारे बल (Force).

उदाहरण क्र.-02

500 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Rough horizontal surface) ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined surface) आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन 20° आहे.जर घर्षण

गुणांक (Coefficient of friction) 0.3 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून वरती (Up) ओढण्यासाठी किती बलाची (Force) आवश्यकता आहे.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

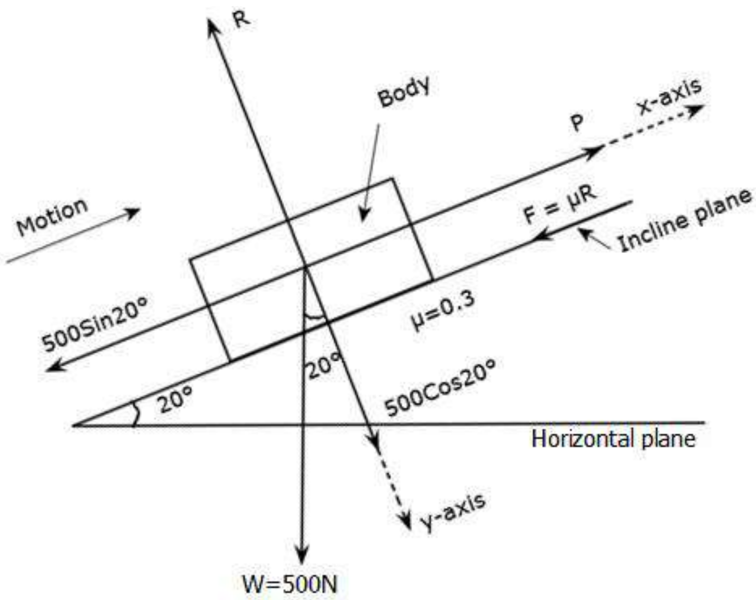
वस्तूचे वजन (W) = 500 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.3

झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन ($\propto$) $= 20°$

लागणारे बल (P) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू ही झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Inclined surface) ठेवली आहे आणि बल (force) हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर (Parallel) लागू झालेले आहे.



आकृती -4.19

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑+ve ↓ –ve

∴ –500 cos20° + R = 0

∴ – 469.84 + R = 0

∴ **R = 469.84 N** .... सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction)

आपल्याला माहित आहे की,

∴ F = μR

∴ F = 0.3 × 469.84

∴ **F = 140.95 N** .... घर्षण बल

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ →+ve ← –ve

∴ –500 sin20°– F + P = 0

∴ –171.01 – 140.95 + P = 0

∴ – 311.96 + P = 0

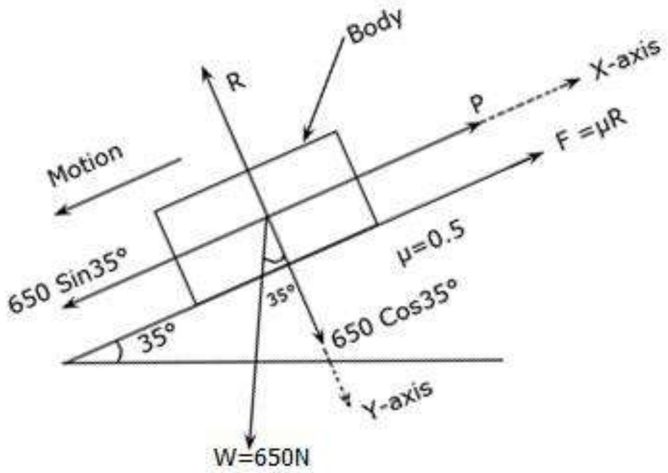
∴ **P = 311.96 N** ...वस्तूला पृष्ठभागावरून वरती (Up) ओढण्यासाठी लागणारे बल.

उदाहरण क्र. - 03

650 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर (Rough horizontal surface) ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने (Inclined surface) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) केलेला कोन

35° आहे. जर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.5 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून खाली येण्यापासून रोखण्यासाठी किती बलाची (Force) आवश्यकता आहे.

उत्तर:



आकृती -4.20

दिलेली माहिती (Given data) **:**

वस्तूचे वजन (W) = 650 N

घर्षण गुणांक (μ) = 0.5

झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन $(\propto) = 35°$

लागणारे बल (P) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू ही झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली आहे आणि बल हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर लागू झालेले आहे.

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑+ ve ↓–ve

$\therefore -650 \cos 35° + R = 0$

$\therefore -532.44 + R = 0$

$\therefore$ **R = 532.44 N** .... सामान्य प्रतिक्रिया

आपल्याला माहित आहे की,

$\therefore F = \mu R$

$\therefore F = 0.5 \times 532.44$

$\therefore$ **F = 266.22 N** .... घर्षण बल

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← –ve

$\therefore -650 \sin 35° + F + P = 0$

$\therefore -372.82 + 266.22 + P = 0$

$\therefore -106.62 + P = 0$

$\therefore$ **P = 106.62 N** .....वस्तूला खाली (Down) येण्यापासून रोखण्यासाठी (Resist) लागणारे बल.

उदाहरण क्र.- 04

1000 N वजनाचा एक दगड (Stone) 40° डोंगराच्या (Hill) उतारावर (Incline) आहे. जर जमीन आणि दगड यांच्यातील घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) 0.4 असेल, तर दगड डोंगरावर ओढण्यासाठी डोंगराच्या पृष्ठभागाला लागणारे समांतर बल (Parallel force) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data)**:**

दगडाचे वजन (Weight of stone) = W = 1000 N

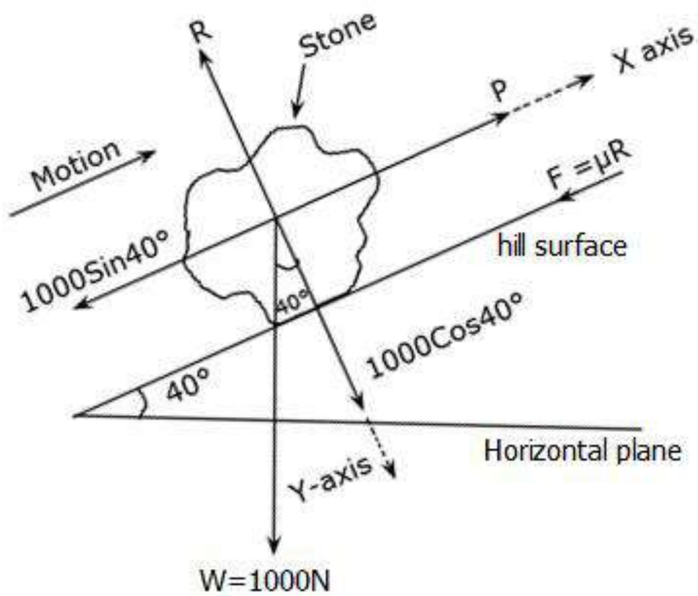
घर्षण गुणांक (μ) = 0.4

डोंगराच्या पृष्ठभागाने (Surface of hill) आडव्या पृष्ठभागाशी (Horizontal surface) केलेला कोन

$(\propto) = 40°$

लागणारे बल (Force) (P) =?

दिलेली स्थिती: वस्तू (दगड) झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली आहे आणि बल हे झुकलेल्या पृष्ठभागाला समांतर लागू झालेले आहे.



आकृती - 4.21

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fy = 0$ ↑+ve ↓–ve

$\therefore -1000 \cos 40° + R = 0$

$\therefore -766.04 + R = 0$

$\therefore$ **R = 766.04 N**........................... सामान्य प्रतिक्रिया (Resultant reaction)

आपल्याला माहित आहे की,

$\therefore F = \mu R$

$\therefore F = 0.4 \times 766.04$ .... घर्षण बल (Friction force)

$\therefore$ **F = 306.45 N**

वस्तू समतोल स्थितीत असताना (For Limiting Equilibrium):

$\sum Fx = 0$ → +ve ← −ve

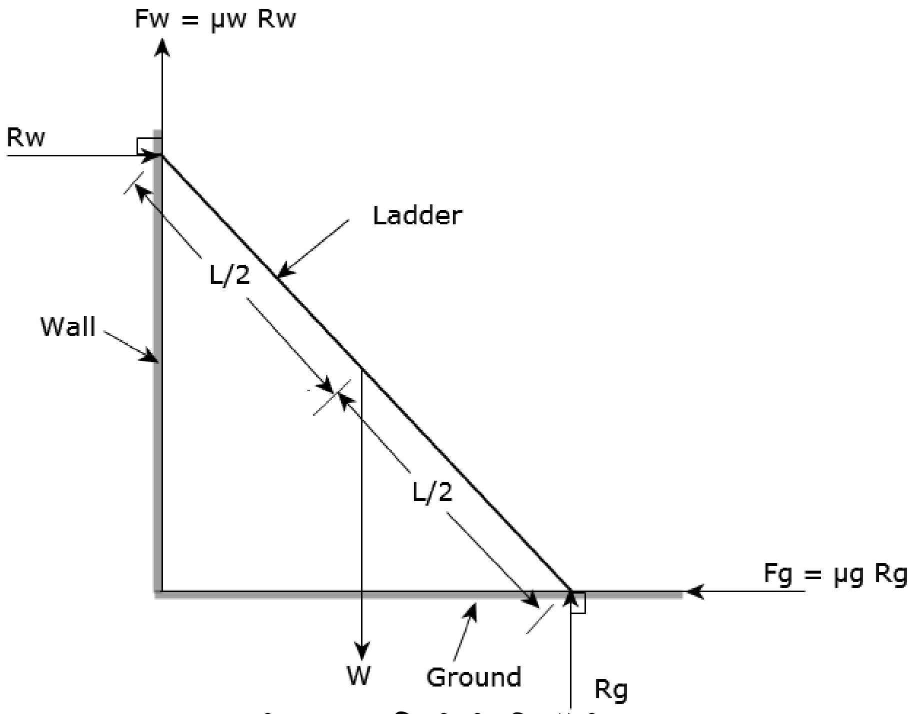
$\therefore -1000 \sin 40° - F + P = 0$

$\therefore -642.78 - 306.45 + P = 0$

$\therefore -949.23 + P = 0$

$\therefore$ **P = 949.23 N** .... दगडाला पृष्ठभागावरून वरती ओढण्यासाठी लागणारे बल.

4.4 शिडी (Ladder) .



आकृती - 4.22 : शिडीची फ्री बॉडी डायग्राम

आपण उंचीवर (Height) जाण्यासाठी शिडीचा वापर करतो, शिडीचा वापर खूप ठिकाणी होत असतो जसे काही भिंत (Wall) रंगविण्यासाठी (Painting) चित्रकार (Painter) शिडीचा वापर करतो, तसेच सुतार (Carpenter) देखील शिडीचा वापर करुन चौकट (Frame) ही भिंतीमध्ये खिळांच्या सहाय्याने बसवतो.अशा अनुप्रयोगासाठी (Application) शिडीचा वापर करताना घर्षणाचा (Friction) उपयोग होतो आणि शिडीचा सुरक्षित (Safe) उपयोग करण्यासाठी जमिनीवर आणि भिंतीच्या संदर्भात योग्य कोनात शिडी समायोजित करावी लागेल.

आकृती 4.22 ही, एका शिडीची फ्री बॉडी डायग्राम (FBD) दाखवते. शिडी समतोल स्थितीत (Limiting Equilibrium) असतांना, शिडीचे वजन W व शिडीची लांबी L असून,शिडी एका भिंतीला कलती (Incline) आहे.

शिडीवर लागणारे बल (Forces) खालील प्रमाणे आहेत

1. वजन W हे शिडीच्या वस्तुमान केंद्रावर (Centre of mass) कार्य (Acting) करते,
2. सामान्य प्रतिक्रिया बल (Normal Reaction force) R_w भिंतीच्या संपर्क बिंदूवर कार्य करते
3. सामान्य प्रतिक्रिया बल (Normal Reaction force) R_g जमिनीच्या संपर्क (Contact) बिंदूवर कार्य करते.
4. शिडी आणि जमिनी यांच्यातील घर्षण बल $(F_g) = \mu_g R_g$
5. शिडी आणि भिंत यांच्यातील घर्षण बल $(F_w) = \mu_w R_w$
6. शिडी आणि जमिनी दरम्यान असलेला घर्षण गुणांक (μ_g)
7. शिडी आणि भिंत यांच्यातील असलेला घर्षण गुणांक (μ_w)

शिडी समतोल स्थितीत असताना:

$\sum Fx = 0$ +ve $\longrightarrow$ –ve $\longleftarrow$

$\therefore R_w - F_g = 0$

$\therefore R_w = F_g$.................................... (i)

शिडी समतोल स्थितीत असताना:

$\sum Fy = 0$ ↑+ ve ↓ –ve

$\therefore R_g - W + F_w = 0$

$\therefore W = R_g + F_w$.........................(ii)

स्व: अध्ययन (Self-Learning) :

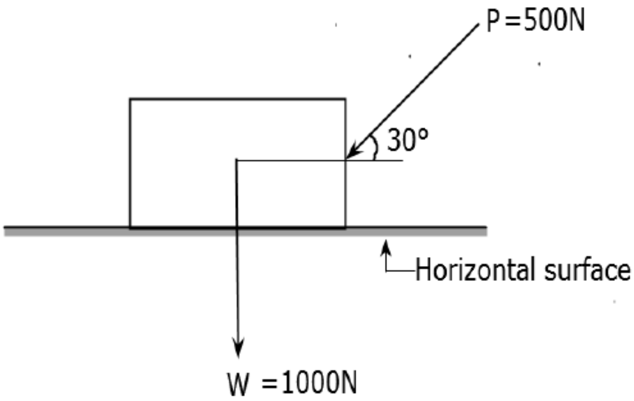
1. घर्षण परिभाषित करा.
2. घर्षणाचे फायदे आणि तोटे सांगा.
3. स्थिर घर्षणाचे नियम सांगा.
4. गतिशील घर्षणाचे नियम सांगा.
5. घर्षण आणि रिपोज कोन परिभाषित करा.
6. घर्षण गुणांक परिभाषित करा. तसेच त्याचे युनिट सांगा.
7. घर्षण कोन आणि घर्षण गुणांक यांच्यातील संबंध सांगा.
8. समतोल शिडीवर कार्य करणारे विविध बल परिभाषित करा.
9. आडव्या पृष्ठभागावर ठेवलेली 100 N वस्तू ओढण्यासाठी 60 N आडवे बल आवश्यक आहे. तर घर्षण गुणांक आणि परिणामी प्रतिक्रिया किती असेल?
10. 400 N वजनाची वस्तू (Body) आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि आडवे बल P वस्तूवर लावलेले आहे, जर घर्षण गुणांक 0.65 आहे.तर सामान्य प्रतिक्रिया (Normal Reaction), घर्षण बल (Frictional force), घर्षण कोन (Angle of friction) शोधा.
11. 350 N वजनाची वस्तू आडव्या पृष्ठभागावर (Horizontal Surface) ठेवलेली आहे आणि वस्तू हलविण्यासाठी आवश्यक असलेले आडवे बल 75N आहे. तर घर्षण गुणांक (Coefficient of friction) आणि घर्षण बल (Frictional force), किती असेल.

12. 95 N वजनाची वस्तू खडबडीत आडव्या पृष्ठभागावर ठेवून बलाने खेचली जात आहे, जर झुकलेले बल P हे आडव्या पृष्ठभागाशी 38° एवढा कोन करत आहे आणि घर्षण गुणांक हा 0.35 असेल तर, झुकलेले बल शोधा.

13. आडव्या खडबडीत पृष्ठभागावर 560 N एवढ्या वजनाची वस्तू ठेवलेली आहे आणि वस्तूवर झुकलेले बल 145 N हे आडव्या पृष्ठभागाशी 35° एवढा कोन करत आहे. तर सामान्य प्रतिक्रिया आणि घर्षण गुणांक शोधा.

14. 750 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन 35° आहे. जर घर्षण गुणांक 0.55 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून खाली येण्यापासून रोखण्यासाठी किती बलाची आवश्यकता आहे.

15. खालील आकृती 4.23 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे वस्तू समतोल मर्यादित असल्यास घर्षण गुणांकचे मूल्य शोधा.



आकृती-4.23

16. 580 N वजनाची वस्तू खडबडीत झुकलेल्या पृष्ठभागावर ठेवली असून, झुकलेल्या पृष्ठभागाने आडव्या पृष्ठभागाशी केलेला कोन 25° आहे. जर घर्षण गुणांक 0.35 असेल, तर वस्तूला पृष्ठभागावरून वरती ओढण्यासाठी किती बलाची आवश्यकता आहे.

17. 1500 N वजनाचा एक दगड 45° झुकलेल्या डोंगराच्या उतारावर आहे. जर जमीन आणि दगड यांच्यातील घर्षण गुणांक 0.3 असेल तर दगड डोंगरावर ओढण्यासाठी डोंगराच्या पृष्ठभागाला लागणारे समांतर बल (Parallel force) शोधा.

संदर्भ (Reference)

Sr. no	Author	Title	Publisher with ISBN Number
1	S. Ramamrutham	Engineering Mechanics	Dhanpat Rai Publishing Co. 2016 ISBN-13: 978-9352164271
2	R. S. Khurmi,N.Khurmi	Engineering Mechanics	S.Chand& Co. New Delhi 2018 ISBN: 978-9352833962
3	S. S. Bhavikatti	Engineering Mechanics	New Age International Private Limited ISBN: 978-9388818698
4	D. S. Bedi, M. P.Poonia	Engineering Mechanics	Khanna Publishing ISBN-13:978-9386173263
5	Dr. R. K. Bansal	Engineering Mechanics	Laxmi Publications ISBN 13: 9788131804094

घटक ०५

केंद्रक आणि गुरुत्वाकर्षण केंद्रक

(CENTROID AND CENTRE OF GRAVITY)

विषय निष्पत्ति (Course Outcome) :विशिष्ट आकार आणि मापे असलेल्या दिलेल्या संरचनात्मक घटकांचे गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र/केंद्रक निश्चित करा.

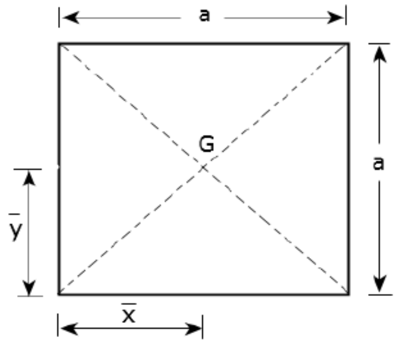
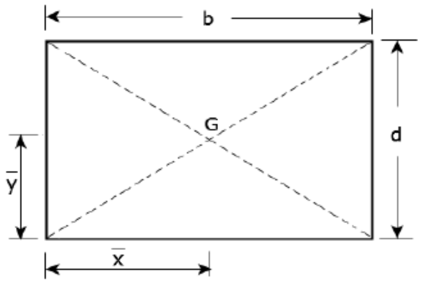
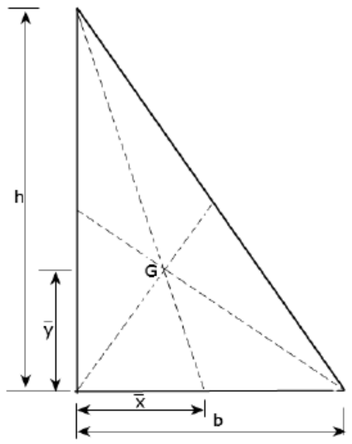
सिद्धांत शिकण्याची निष्पत्ति (Theory Learning Outcome) :

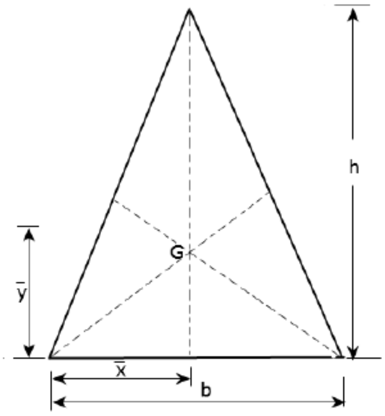
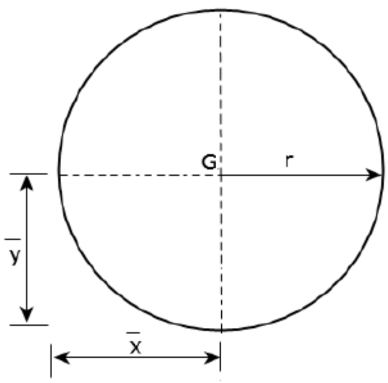
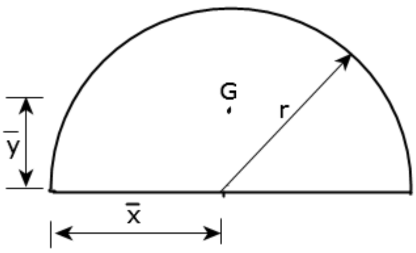
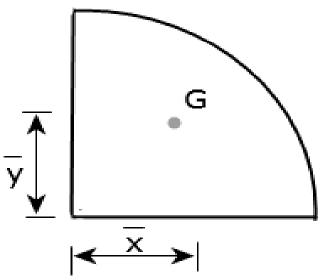
1. दिलेल्या समतल आकृतीचे केंद्रबिंदू निश्चित करा.
2. दिलेल्या संमिश्र आकृतीचे केंद्रबिंदू निश्चित करा.
3. दिलेल्या घनाच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्रक निश्चित करा.
4. दिलेल्या संमिश्र घनाचे गुरुत्वाकर्षण केंद्र निश्चित करा.

५.१ भौमितिक प्लेन आकृत्यांचे केंद्रक (Centroid):

केंद्रकाची (Centroid) व्याख्या कोणत्याही नियमित (Regular) किंवा अनियमित (Irregular) द्विमितीय (Two-dimensional) आकृतीचे भौमितिक (Geometrical) मध्य (Centre) म्हणून केली जाते. केंद्रक (Centroid) हा द्विमितीय प्लेन आकृती ज्याला जाडी (Thickness) नाही व फक्त क्षेत्रफळ (Area) आहे, अशा आकृतीला लागू होतो. एखाद्या द्विमितीय प्लेन आकृतीच्या क्षेत्रफळला जाडी नसल्यामुळे गुरुत्वाकर्षणाच्या बलाने त्यावर कार्य करण्यासाठी कोणतेही वस्तुमान (Mass) नसते आणि त्यामुळे त्याचे वजन (Weight) केंद्रक काढण्यासाठी उपयोगात येत नाही. केंद्रक (Centroid) हा शब्द द्विमितीय प्लेन लॅमिना किंवा आकृत्यांच्या क्षेत्रफळासाठी लागू आहे. केंद्रक (Centroid) हे G अक्षराने दर्शविले जाते. केंद्रक (Centroid)) हा भौमितिक प्लेन आकृत्यांसाठी लागू आहे जसे की चौरस, आयत, त्रिकोण, वर्तुळ, अर्धवर्तुळ, चतुर्थांश वर्तुळ इ.

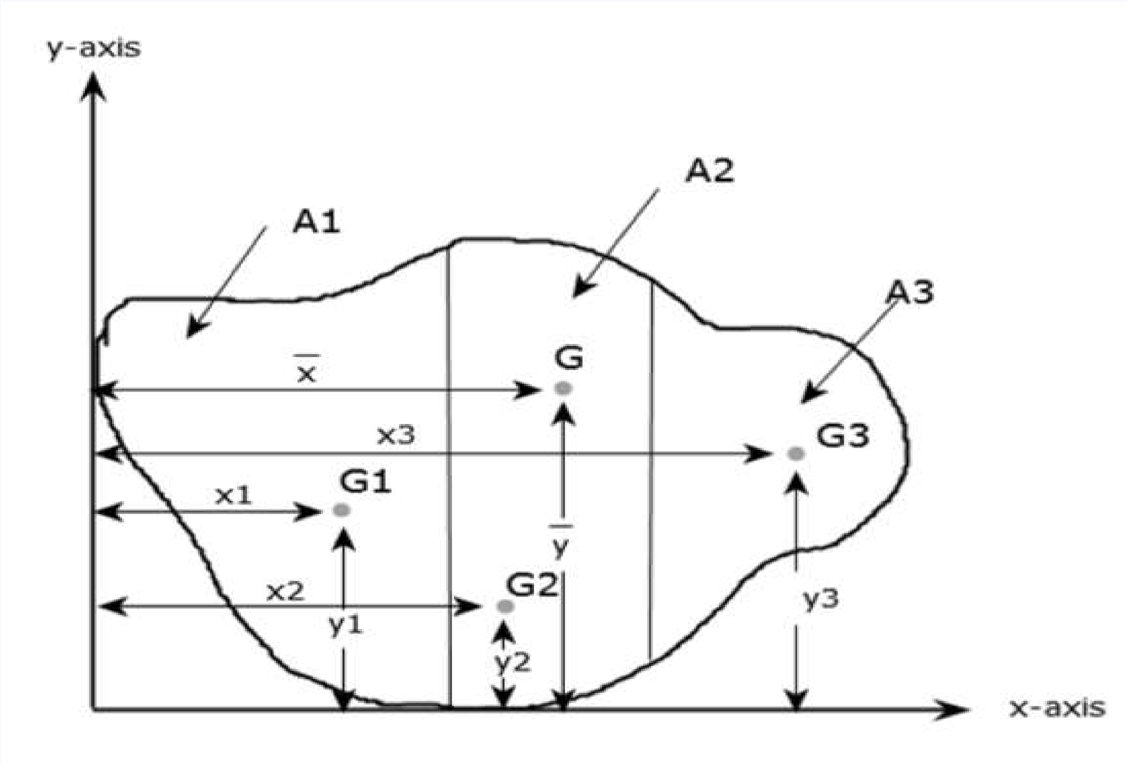
भौमितिक प्लेनआकृत्यांचेकेंद्रक (Centroid):

अनुक्रमांक	**आकृतीचे नाव**	**आकार (Shape)**	**क्षेत्रफळ (Area) (A)**	**केंद्रक (Centroid) (G)**
1	चौरस (Square)		a × a येथे, a = बाजूचीलांबी(Side length)	$\bar{x} = \frac{a}{2}$ $\bar{y} = \frac{a}{2}$
2	आयत (Rectangle)		b × d येथे, b = लांबी(Length) d = उंची (Height)	$\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{d}{2}$
3	काटकोनत्रिकोण (Right angle Triangle)		$\frac{1}{2} \times b \times h$ येथे, b = लांबी(Length) h = उंची (Height)	$\bar{x} = \frac{b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$

4	समभुजत्रिकोण (Equilateral triangle) किंवा समद्विभुजत्रिकोण (Isosceles Triangle)		$\frac{1}{2} \times b \times h$ येथे, b= लांबी(Length) h= उंची (Height)	$\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$
5	वर्तुळ (Circle)		πr^2 or $\frac{\pi}{4} \times d^2$ येथे, r = वर्तुळाचीत्रिज्या(Radius) d = वर्तुळाचाव्यास(Diameter)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = r$
6	अर्धवर्तुळ (Semicircle)		$\frac{1}{2} \times \pi r^2$ येथे, r = अर्धवर्तुळाचीत्रिज्या(Radius)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$
7	चतुर्थांश वर्तुळ (Quarter circle)		$\frac{1}{4} \times \pi r^2$ येथे, r = चतुर्थांश वर्तुळाची त्रिज्या (Radius)	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

५.२ संयुक्त आकृत्यांची केंद्राकाची स्थिती (Centroidal position of composite figures)

कोणत्याही संयुक्त (Composite) आकृतीच्या केंद्राकाची (Centroid) गणना ही क्षेत्रफळाच्या (Area) सहाय्याने "व्हेरिगॉन" चे प्रमेय वापरून केली जाऊ शकते.



आकृती -5.1 संयुक्त आकृत्यांची केंद्राकाची (Centroidal) स्थिती

समजा संयुक्त आकृती मधील विभाजित (Divided) भागांचे A_1, A_2, A_3, हे क्षेत्रफळ आहे. समजा संयुक्त आकृती मधील विभाजित भागाचे x_1 x_2 x_3हे y- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) दर्शवत आहे. समजा संयुक्त आकृती मधील विभाजित भागांचे y1, y2 y3 हे x-अक्षांपासून केंद्राकाची स्थिती दर्शवत आहे. समजा हे y-अक्षापासून संयुक्त विभागाची केंद्राकाची स्थिती दर्शवत आहे. समजा ÿ हे x-अक्षापासून संयुक्त विभागाची केंद्राकाची स्थिती दर्शवत आहे. "व्हेरिगॉन प्रमेयानुसार, कोणत्याही अक्षाशी (Axis) आकृतीच्या वैयक्तिक (Individual) क्षेत्रफळाच्या मुमेंट (Moment) ची बीजगणितीय बेरीज ही संयुक्त आकृतीच्या क्षेत्रफळाच्या मुर्मेंट (Moment) इतकी असते. हे गणितात असे लिहिले जाऊ शकते.

$A\overline{X} = AX_1 + A_2X_2 + A_3X_3$

$$\overline{X} = \frac{AX1 + A2X2 + A3X3}{A}$$

परंतु,

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$\overline{X} = \frac{AX1 + A2X2 + A3X3}{A1 + A2 + A3}$ y- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती(Centroidal)

त्याचप्रमाणे,

$\overline{y} = \frac{Ay1 + A2y2 + A3y3}{A1 + A2 + A3}$ x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal)

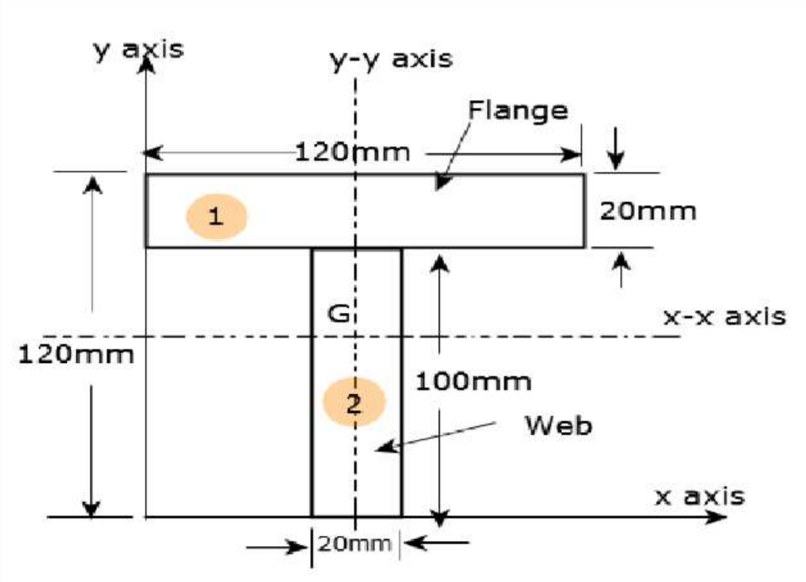
संयुक्त (Composite) आकृत्यांच्या केंद्राकाच्या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे:

उदाहरण क्र. -01

जर T -सेक्शनचे (Section) आकारमान 120 mm ×120 mm × 20 mm तर T- सेक्शनचा केंद्रक(Centroid) शोधा.

उत्तर:

येथे 120 mm ×120 mm × 20 mm म्हणजे एकूण लांबी x एकूण उंची × रुंदी



आकृती -5.2

क्षेत्रफळ गणना (Area calculation):

उभ्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of web) = $A_1 = 100 \times 20 = 2000\ mm^2$

आडव्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of flange) = $A_2 = 120 \times 20 = 2400\ mm^2$

टीप: उभ्या भागाला Web किंवा Rib आणि आडव्या भागाला Flange असे म्हणतात.

y-अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{x}$ची गणना करण्यासाठी:

दिलेला T- सेक्शन (Section) y-y अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\overline{x} = \frac{\text{T सेक्शनची (Section) जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\overline{x} = \frac{120}{2}$$

$$\overline{x} = 60\ mm$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{y}$ची गणना करण्यासाठी:

$$y1 = \frac{100}{2}$$

$$y1 = 50\ mm$$

$$y2 = 100 + \frac{20}{2}$$

$$y2 = 110\ mm$$

$$\overline{y} = \frac{\text{Ay1} + \text{A2y2}}{\text{A1} + \text{A2}}$$

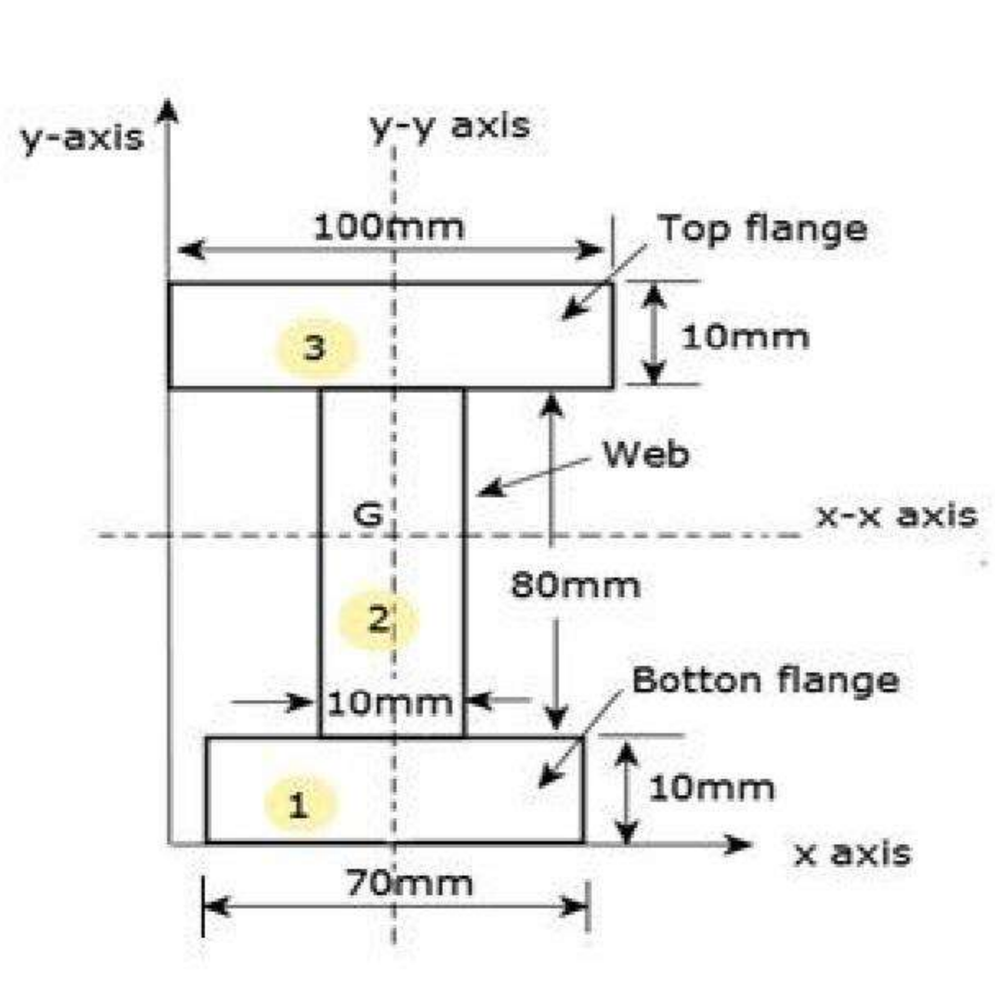
$$\overline{y} = \frac{(2000 \times 50) + (2400 \times 110)}{2000 + 2400}$$

$$\overline{y} = 82.72\ mm$$

केंद्रकाची स्थिती (G) = $(\overline{x}, \overline{y})$ = $(60\ mm, 82.72\ mm)$

उदाहरण क्र. -02

जर I- सेक्शनच्या (Section) वरच्या आडव्या (Top flange) भागाचे आकारमान हे 100 mm ×10 mm आहे, तळाच्या आडव्या (Bottom flange) भागाचे आकारमान हे 70 mm ×10 mm आहेआणि उभ्या (Web) भागाचे आकारमान 80 mm ×10 mm असेल तर I- सेक्शनचा(Section) केंद्रक(Centroid) शोधा.



आकृती -5.3

क्षेत्रफळ गणना (Area calculation):

वरच्या आडव्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of top flange) = A1 = 100×10 =1000 mm²

उभ्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of web) = A2 = 80 × 10 = 800 mm²

तळाच्या आडव्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of bottom flange) = A_3 = 70×10 =700 mm²

y-अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{X}$ची गणना करण्यासाठी:

दिलेला I- सेक्शन (Section) y-y अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{x} = \frac{\text{I सेक्शनची (Section) जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{100}{2}$$

$$\bar{x} = 50\ mm$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\bar{y}$ची गणना करण्यासाठी:

$$y1 = \frac{10}{2}$$

$$y1 = 5\ mm$$

$$y2 = 10 + \frac{80}{2}$$

$$y2 = 50\ mm$$

$$y3 = 10 + 80 + \frac{10}{2}$$

$$y3 = 95\ mm$$

$$\bar{y} = \frac{\text{Ay1} + \text{A2y2} + \text{A3y3}}{\text{A1} + \text{A2} + \text{A3}}$$

$$\bar{y} = \frac{(1000 \times 5) + (800 \times 50) + (700 \times 95)}{1000 + 800 + 700}$$

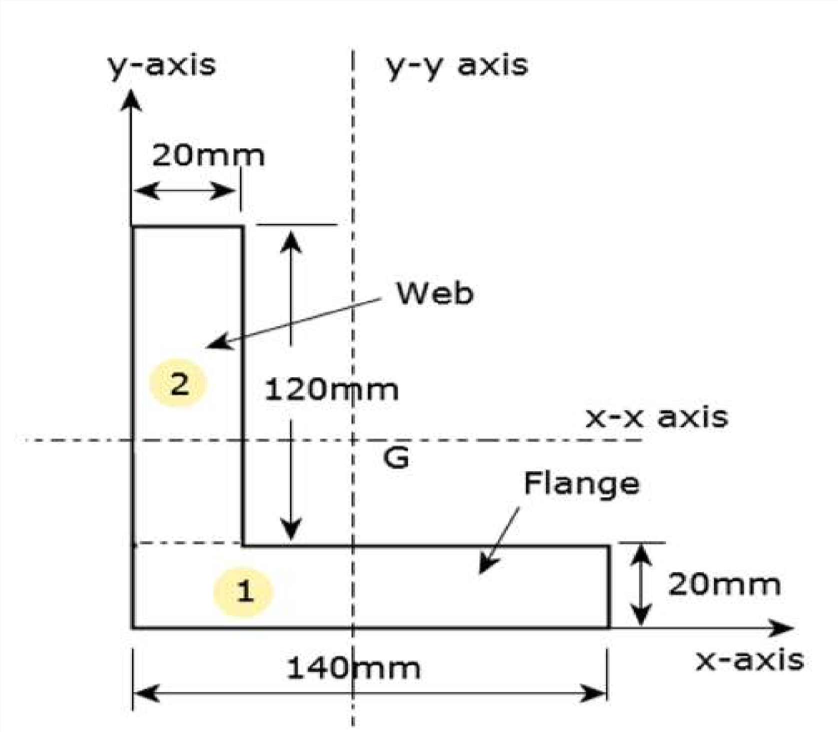
$$\bar{y} = 44.6\ mm$$

केंद्रकाची स्थिती (G) = $(\bar{x}, \bar{y})$ = $(50\ mm, 44.6\ mm)$

उदाहरण क्र. -0 3

जर L- सेक्शनच्या (Section) आडव्या (flange) भागाचे आकारमान हे 140 mm ×20 mm आहे, आणि उभ्या (Web) भागाचे आकारमान 120 mm ×20 mm असेल तर L- सेक्शनचा(Section) केंद्रक(Centroid) शोधा.

उत्तर:



आकृती -5.4

क्षेत्रफळ गणना (Area calculation):

आडव्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of flange) = A_1 = 140×20 =2800 mm²

उभ्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of web) = A_1 = 120 × 20 = 2400 mm²

y-अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{X}$ची गणना करण्यासाठी:

दिलेला T- सेक्शन (Section) y-y अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$x1 = \frac{140}{2}$$

$$x1 = 70\ mm$$

$$x2 = \frac{20}{2}$$

$$x2 = 10\ mm$$

$$\overline{x} = \frac{\text{Ax1} + \text{A2x2}}{\text{A1} + \text{A2}}$$

$$\overline{x} = \frac{(2800 \times 70) + (2400 \times 10)}{2800 + 2400}$$

$$\overline{x} = 42.30\ mm$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{y}$ची गणना करण्यासाठी:

$$y1 = \frac{20}{2}$$

$$y1 = 10\ mm$$

$$y2 = 20 + \frac{120}{2}$$

$$y2 = 80\ mm$$

$$\overline{y} = \frac{\text{Ay1} + \text{A2y2}}{\text{A1} + \text{A2}}$$

$$\overline{y} = \frac{(2800 \times 10) + (2400 \times 80)}{2800 + 2400}$$

$$\overline{y} = 42.30\ mm$$

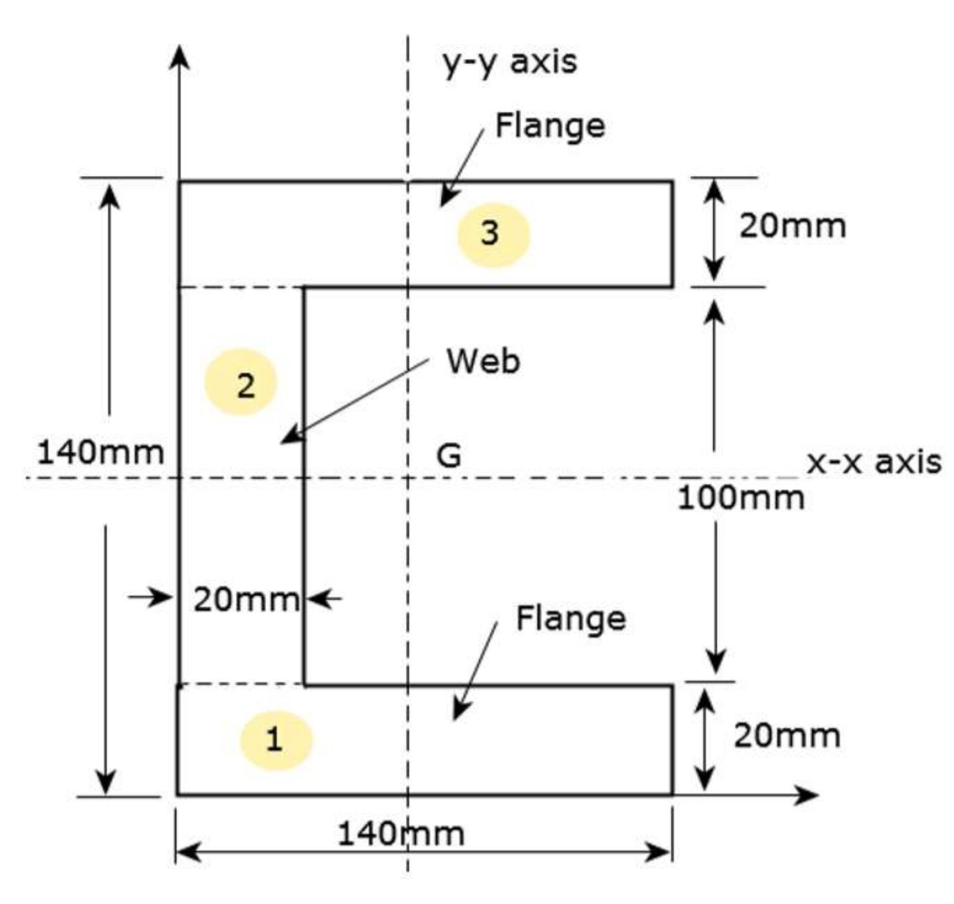
केंद्रकाची स्थिती (G) = $(\overline{x}, \overline{y})$ = $(42.30\ mm, 42.30\ mm)$

उदाहरण क्र. -04

चॅनल (Channel) किंवा C सेक्शनचे (Section) आकारमान 140 mm ×140 mm × 20 mm तर C-सेक्शनचा केंद्रक(Centroid) शोधा.

उत्तर:

येथे 140 mm ×140 mm × 20 mm म्हणजे एकूण लांबी x एकूण उंची × रुंदी



आकृती -5.5

क्षेत्रफळ गणना (Area calculation):

वरच्या आडव्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of top flange) = A1 = 140×20 =2800 mm²

उभ्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of web) = A2 = 100 × 20 = 2000 mm²

तळाच्या आडव्या भागाचे क्षेत्रफळ (Area of bottom flange) = A_3 = 140×20 =2800 mm²

y-अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{X}$ची गणना करण्यासाठी:

$$x1 = \frac{140}{2}$$

$$x1 = 70\ mm$$

$$x2 = \frac{20}{2}$$

$$x2 = 10\ mm$$

$$x3 = \frac{140}{2}$$

$$x3 = 70\ mm$$

$$\overline{x} = \frac{\text{Ax1} + \text{A2x2} + \text{A3x3}}{\text{A1} + \text{A2} + \text{A3}}$$

$$\overline{x} = \frac{(2400 \times 70) + (2000 \times 10) + (2400 \times 70)}{2400 + 2000 + 2400}$$

$$\overline{x} = 52.35\ mm$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{y}$ची गणना करण्यासाठी:

दिलेला C- सेक्शन (Section) x-x अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\overline{y} = \frac{\text{C सेक्शनची (Section)जास्तीत जास्त उंची}}{2}$$

$$\overline{x} = \frac{140}{2}$$

$$\overline{y} = 70\ mm$$

केंद्रकाची स्थिती (G) = $(\overline{x}, \overline{y})$ = $(52.35\ mm, 70\ mm)$

उदाहरण क्र. -05

एका धरणाचे (Dam Section) आकारमान खालीलप्रमाणेआहे,

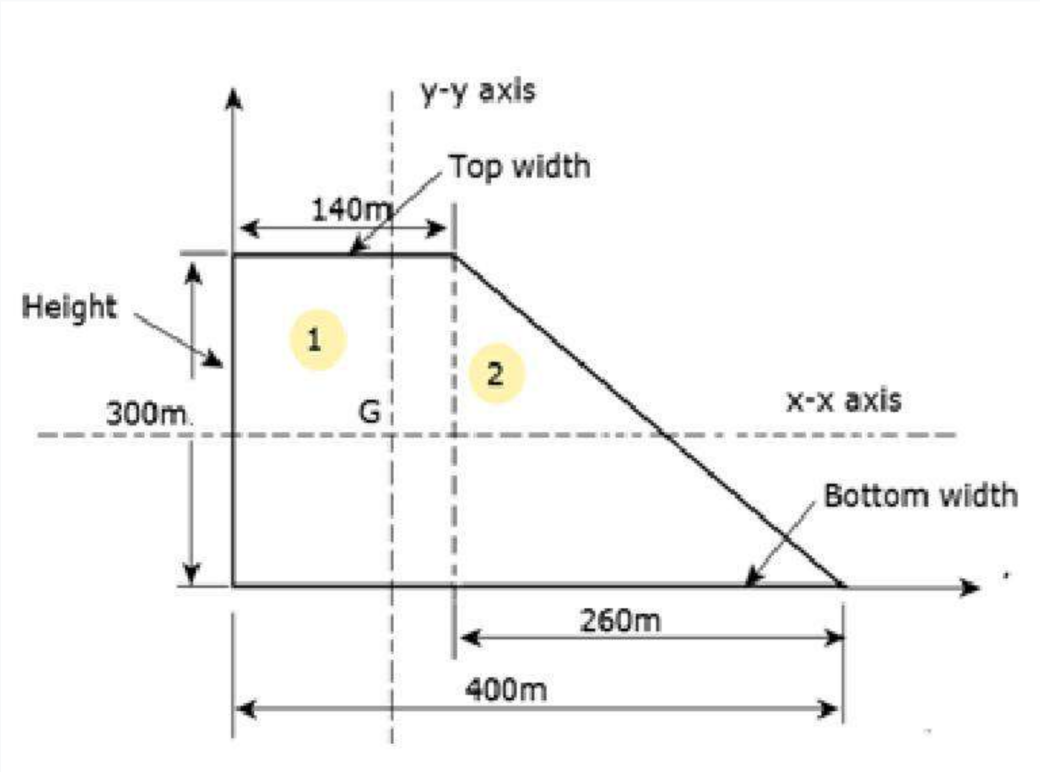
i) पाण्याच्या बाजुची उभ्या भिंतिची (Vertical Height) उंची 300 m,

ii) धरणाची वरची रुंदी (Top Width) 140 m,

iii) पायाची रुंदी (Base Width) 400 m आहे.

तर धरणाचा केंद्रक(Centroid) शोधा.

उत्तर:



आकृती -5.6

क्षेत्रफळ गणना (Area calculation):

आयताचे क्षेत्रफळ (Area of Rectangle) = A1 = 300×140 =42000 m^2

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (Area of Triangle) = A2 = $\frac{1}{2}\times 260 \times 300 = 39000$ m^2

y-अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{X}$ची गणना करण्यासाठी:

$$x1 = \frac{140}{2}$$

$x1 = 70\ m$

$x2 = 140 + \frac{260}{3}$

$x2 = 226.66\ m$

$\overline{x} = \frac{\mathrm{Ax1}\ +\ \mathrm{A2x2}}{\mathrm{A1}\ +\ \mathrm{A2}}$

$\overline{x} = \frac{(42000 \times 70) + (39000 \times 226.66)}{42000 + 39000}$

$\overline{x} = 145.42\ m$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{y}$ची गणना करण्यासाठी:

$y1 = \frac{300}{2}$

$y1 = 150\ m$

$y2 = \frac{300}{3}$

$y2 = 100\ m$

$\overline{y} = \frac{\mathrm{Ay1}\ +\ \mathrm{A2y2}}{\mathrm{A1}\ +\ \mathrm{A2}}$

$\overline{y} = \frac{(42000 \times 150) + (39000 \times 100)}{42000 + 39000}$

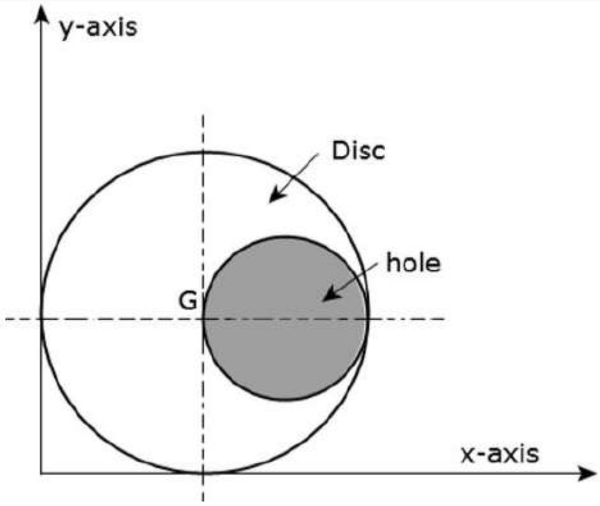
$\overline{y} = 125.92\ m$

केंद्रकाची स्थिती (G) = ($\overline{x}, \overline{y}$) = ($145.42\ m, 125.92\ m$)

उदाहरण क्र. -06

खालील आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे एका 12 mm व्यासाच्या (Diameter) वर्तुळाकार (Circular) डिस्कमधून 6 mm व्यासाचे (Diameter) गोलाकार (Circular) छिद्र (Hole) कापले आहे. तर दिलेल्या सेक्शनचे (Section) केंद्रक (Centroid) शोधा.

उत्तर:



आकृती -5.7

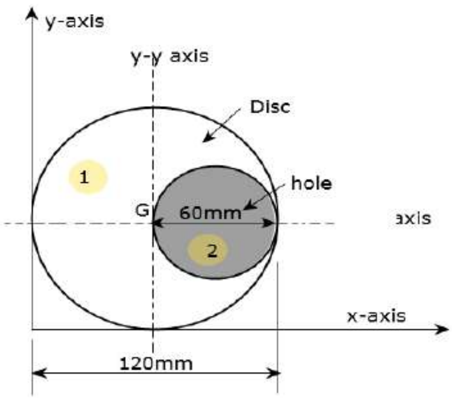
दिलेली महिती (Given data),

R = वर्तुळाकारडिस्कची त्रिज्या (Radius of Circular disc) =

$\frac{\text{वर्तुळाकार डिस्कचा व्यास}}{2} = \frac{12}{2}$ = 6 mm

r = वर्तुळाकारलहानछिद्राची त्रिज्या (Radius of Circular hole) =

$\frac{\text{वर्तुळाकारलहानछिद्राचा व्यास}}{2} = \frac{6}{2}$ = 3 mm



आकृती -5.8

क्षेत्रफळ गणना (Area calculation):

मोठ्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ (Area of Disc) = A1 = $\pi R^2 = \pi \times 6^2$=113.09 mm²

लहानवर्तुळाचे क्षेत्रफळ (Area of hole) = A2 = $\pi r^2 = \pi \times 3^2$=28.27 mm²

y-अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{x}$ची गणना करण्यासाठी:

$$x1 = R$$

$$x1 = 6\ mm$$

$$x2 = 6 + r$$

$$x2 = 6 + 3$$

$$x2 = 9\ mm$$

$$\overline{x} = \frac{\text{Ax1} - \text{A2x2}}{\text{A1} - \text{A2}}$$

$$\overline{x} = \frac{(113.09 \times 6) - (28.27 \times 9)}{113.09 - 28.27}$$

$$\overline{x} = 5\ mm$$

x- अक्षापासून (Axis) केंद्राकाची स्थिती (Centroidal) $\overline{y}$ची गणना करण्यासाठी:

दिलेला C- सेक्शन (Section) x-x अक्षांशी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\overline{y} = \frac{\text{दिलेल्यासेक्शनची (Section)जास्तीत जास्त उंची}}{2}$$

$$\overline{y} = \frac{12}{2}$$

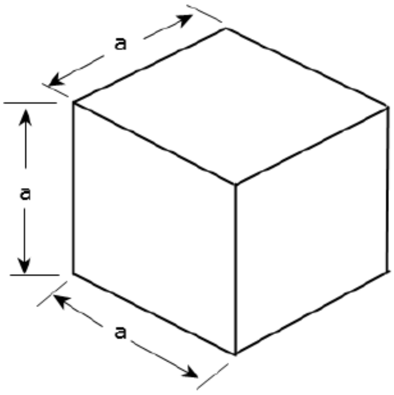
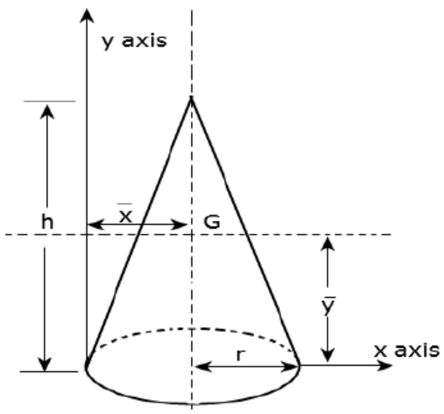
$$\overline{y} = 6\ mm$$

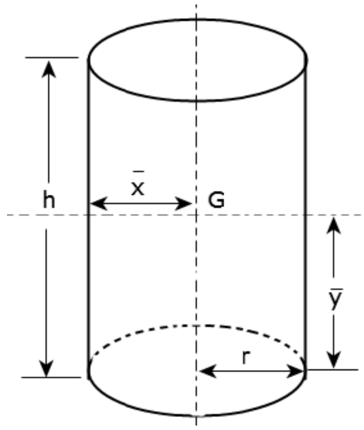
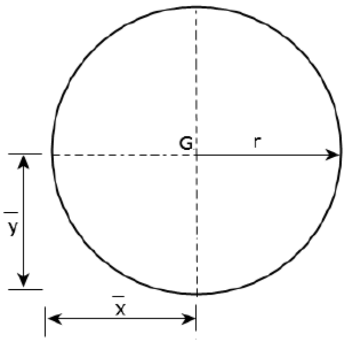
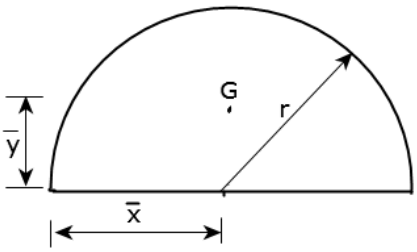
केंद्रकाची स्थिती (G) = $(\overline{x}, \overline{y})$ = $(5\ mm, 6\ mm)$

5.3साध्या घन पदार्थांचे गुरुत्वाकर्षण केंद्र (Centre of Gravity of Simple solids) (G):

वस्तूच्या (Body) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of Gravity) म्हणजे बिंदू (Point) ज्यावर वस्तूचे (Weight) वजन कार्य करते. वस्तूच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र त्रिमितीय (Three-dimensional) धन (Solid) वस्तू संदर्भित करते. घन वस्तूमुळे आपल्याला जाडीचा (Thickness) विचार करावा लागतो. म्हणून आपल्याला घन वस्तूवर कार्य करण्यासाठी घनफळ (Volume) आणि वजन (Weight) विचारात घेणे आवश्यक आहे. गुरुत्वाकर्षण केंद्र हा त्रिमितीय घन वस्तूच्या घनफळला लागू आहे. म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की गुरुत्वाकर्षण केंद्र हा घन वस्तूवरचा बिंदू (Point) आहे, जिथे संपूर्ण वजन (Weight) केंद्रित असते.

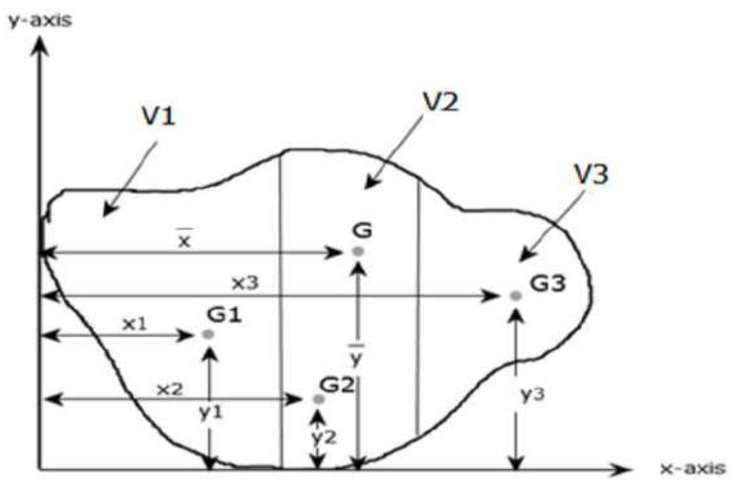
साध्याघनपदार्थांचेगुरुत्वाकर्षणकेंद्र (G):

अनुक्रमांक	आकृतीचेनाव	आकार (Shape)	घनफळ (V) (Volume)	गुरुत्वाकर्षण केंद्र(G)
1	घन(Cube)		a^3 येथे, a = घनाची बाजूचीलांबी(Side length)	$\bar{x} = \frac{a}{2}$ $\bar{y} = \frac{a}{2}$
2	शंकू(Cone)		$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ येथे, r = तळाच्यावर्तुळाचीत्रिज्या(Radius) h= शंकूचीउंची(Height)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{h}{4}$

3	घन वृत्तचित्ती (Solid Cylinder)		$\pi r^2 h$ येथे, r = तळाच्या वर्तुळाची त्रिज्या (Radius) h= वृत्तचित्तीचीउंची(Height)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$
4	घन गोल(Solid Sphere)		$\frac{4}{3} \times \pi r^3$ येथे, r = गोलाचीत्रिज्या(Radius)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = r$
5	अर्धगोल (Solid hemisphere)		$\frac{2}{3} \times \pi r^3$ येथे, r = अर्धगोलाचीत्रिज्या(Radius)	$\bar{x} = r$ $\bar{y} = \frac{3r}{8}$

5.4. संयुक्त आकृत्यांच्या गुरुत्वाकर्षणाचे स्थान (Centre of gravity position of composite figures):

कोणत्याही घन संयुक्त (Composite) आकृतीच्या गुरुत्वाकर्षणाच्या केंद्राची (Centre of gravity) गणना (Calculation) घनफळच्या (Volume) सहाय्याने "व्हेरिग्नॅान" प्रमेय वापरून केली जाऊ शकते. खालील आकृती 5.8घन संयुक्त आकृती दर्शविते.



आकृती -5.9

समजा घन संयुक्त (Composite) आकृती मधील विभाजित (Divided) भागांचे V1,V2, V3 हे घनफळ आहे.

समजा घन संयुक्त आकृती मधील विभाजित (Divided) भागांचे x1, x2, x3 हे y-अक्षांपासून (Axis) गुरुत्वाकर्षण स्थानाची स्थिती दर्शवत आहे.

समजा घन संयुक्त आकृती मधील विभाजित भागांचे y1, y2 y3 हे x- अक्षांपासून (Axis) गुरुत्वाकर्षण स्थानाची स्थिती दर्शवत आहे.

समजा x हे y- अक्षापासून (Axis) संयुक्त विभागाची गुरुत्वाकर्षण स्थानाची स्थिती दर्शवत आहे.

समजा ÿ हे x -अक्षापासून (Axis) संयुक्त विभागाची गुरुत्वाकर्षण स्थानाची स्थिती दर्शवत आहे.

व्हेरिग्नॉन प्रमेयानुसार, कोणत्याही अक्षाशी (Axis) आकृतीच्या वैयक्तिक (Individual) घनफळच्या मोमेंट (Moment) ची बीजगणितीय बेरीज ही संयुक्त आकृतीच्या घनफळच्या मोमेंट (Moment) इतकी असते.

हे गणिती म्हणून लिहिले जाऊ शकते,

$$V\overline{x} = \mathrm{V1x1} + \mathrm{V2x2} + \mathrm{V3x3}$$

$$\overline{x} = \frac{\mathrm{V1x1} + \mathrm{V2x2} + \mathrm{V3x3}}{\mathrm{V}}$$

परंतु , $V = V1 + V2 + V3$

$$\bar{x} = \frac{V1x1 + V2x2 + V3x3}{V1 + V2 + V3}$$ y- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षण स्थितीचे केंद्र

त्याचप्रमाणे,

$$\bar{y} = \frac{V1y1 + V2y2 + V3y3}{V1 + V2 + V3}$$ x- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षण स्थितीचे केंद्र

संयुक्त आकृत्यांच्या गुरुत्वाकर्षणाच्या स्थिती वरील सोडवलेली उदाहरणे

उदाहरण क्र. -01

6 cm व्यासाचा (Diameter) आणि 60 cm उंचीचा (Height) शंकू (Cone) हा 6 cm व्यासाचा (Diameter) आणि 80 cm उंचीच्या (Height) वृत्तचित्तीवर (Solid cylinder) समाक्षिकपणे(Coaxially) ठेवला आहे, तर संयुक्त (Composite) घनाच्या (Solid) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

वृत्तचित्तीचा व्यास (Diameter of solid cylinder) = D = 6 cm

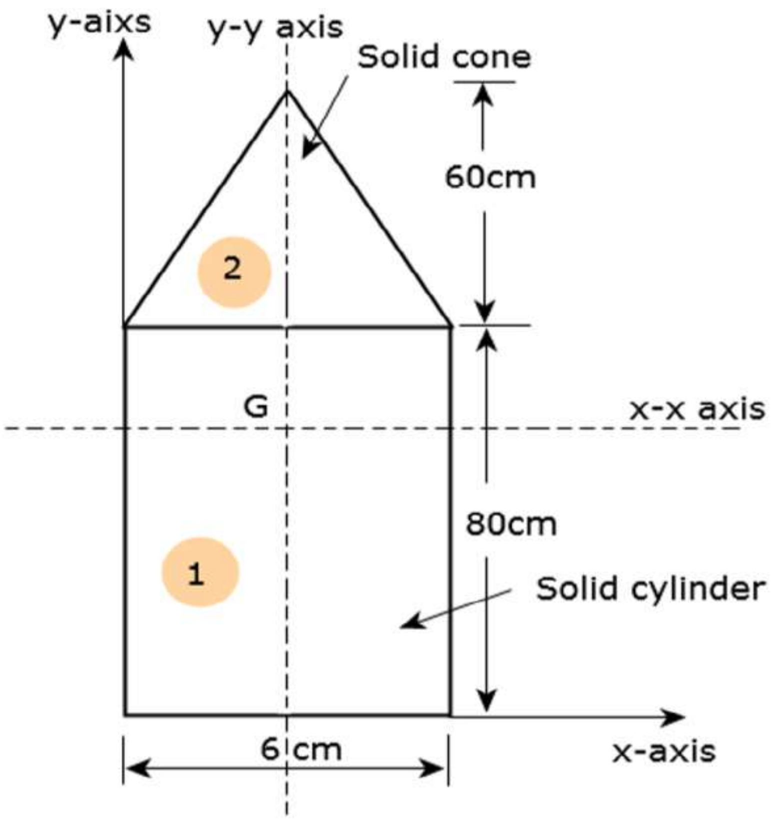
वृत्तचित्तीची त्रिज्या (Radius of solid cylinder) = R= $\frac{\text{वृत्तचित्तीचा व्यास}}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm

शंकूचा व्यास (Diameter of solid cone) = d = 6 cm

शंकूची त्रिज्या (Radius of solid cone) = r = $\frac{\text{शंकूचा व्यास}}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm

वृत्तचित्तीची उंची (Height of solid cylinder) = H = 80 cm

शंकूची उंची (Diameter of solid cone) = h = 60 cm



आकृती -5.10

घनफळ गणना (Volume calculation):

वृत्तचित्तीचे घनफळ (Volume of solid cylinder) = $V_1 = \pi R^2 H$

$= \pi \times (3)^2 \times 80$

$= 2261.94\ cm^3$

शंकूचे घनफळ (Volume of solid cone) = $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times (3)^2 \times 60$

$= 565.48\ cm^3$

y- अक्षापासून (Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती $\overline{x}$ची गणना करण्यासाठी

दिलेले संयुक्त घन y-y अक्षासाठी सममितीय (Symmetrical) आहे

$$\overline{x} = \frac{\text{संयुक्त घनाची जास्तीत जास्त लांबी}}{2}$$

$$\overline{x} = \frac{6}{2}$$

$$\overline{x} = 3\ cm$$

x -अक्षापासून गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र स्थिती $\overline{y}$ची गणना करण्यासाठी

$$y_1 = \frac{\text{h}}{2}$$

$$y_1 = \frac{80}{2}$$

$$y_1 = 40\ cm$$

$$y_2 = 80 + \frac{\text{h}}{4}$$

$$y_2 = 80 + \frac{60}{4}$$

$$y_2 = 95\ cm$$

तसेच

$$\overline{y} = \frac{\text{V1y1} + \text{V2y2}}{\text{V1} + \text{V2}}$$

$$\overline{y} = \frac{(2261.94 \times 40) + (565.48 \times 95)}{2261.94 + 565.48}$$

$$\overline{y} = 50.99\ cm$$

गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of Gravity)=($\overline{x}, \overline{y}$) = $(\mathbf{3}\boldsymbol{cm}, \mathbf{50.99}\boldsymbol{cm})$

उदाहरणक्र. -02

20 cm व्यासाचा (Diameter) गोल (Sphere) हा 20 cm व्यासाचा (Diameter) आणि 100 cm उंचीच्या (Height) वृत्तचित्तीवर (Solid cylinder) समाक्षिकपणे (Coaxially) ठेवलाआहे, तरसंयुक्त (Composite) घनाच्या(Solid)गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्र(Centre of gravity)शोधा.

उत्तर:

दिलेली माहिती (Given data):

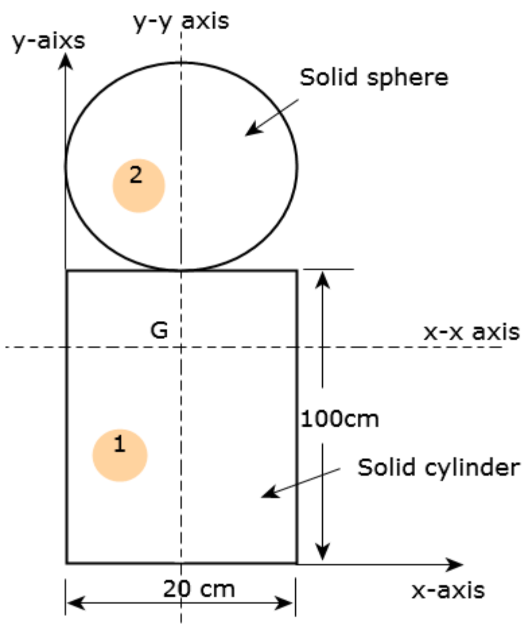
वृत्तचित्तीचाव्यास (Diameter of solid cylinder) = D =20 cm

वृत्तचित्तीचीत्रिज्या (Radius of solid cylinder) = R = $\frac{\text{वृत्तचित्तीचाव्यास}}{2} = \frac{20}{2}$ = 10 cm

गोलाचाव्यास (Diameter of sphere) = d = 20 cm

गोलाचीत्रिज्या (Radius of sphere) = r = $\frac{\text{गोलाचाव्यास}}{2} = \frac{20}{2}$ = 10 cm

वृत्तचित्तीची उंची (Height of solid cylinder) = H =100 cm



आकृती -5.11

घनफळगणना (Volume calculation):

वृत्तचित्तीचेघनफळ $(V_1) = \pi R^2 H$

$= \pi \times (10)^2 \times 100$

$= 31415.9\ cm^3$

गोलाचेघनफळ $(V_2) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times (10)^3$

$= 4188.79\ cm^3$

y- अक्षापासून(Axis) गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्रस्थिती $\bar{x}$चीगणनाकरण्यासाठी

दिलेलेसंयुक्तघन y-y अक्षासाठी(Axis)सममितीय (Symmetrical) आहे

$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्तघनाचीजास्तीतजास्तलांबी}}{2}$

$\bar{x} = \frac{20}{2}$

$\bar{x} = 10\ cm$

x -अक्षापासून(Axis) गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्रस्थिती$\bar{y}$चीगणनाकरण्यासाठी

$y_1 = \frac{h}{2}$

$y_1 = \frac{100}{2}$

$y_1 = 50\ cm$

$y_2 = 100 + r$

$y_2 = 100 + 10$

$y_2 = 110$ cm

तसेच,

$$\bar{y} = \frac{V1\ y1 + V2\ y2}{V1 + V2}$$

$$\bar{y} = \frac{(31415.9 \times 50) + (4188.79 \times 110)}{(31415.9 + 4188.79)}$$

$\bar{y}$ **= 57.058 cm**

गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्र($\bar{x}$,$\bar{y}$) = (10 cm, 57.058 cm)

उदाहरणक्र. -03

30 cm व्यासाचा (Diameter) गोलहा 50 cm लांबीच्या (Side length) घनावर (Cube) समाक्षिकपणे (Coaxially) ठेवलाआहे, तरसंयुक्त (Composite) घनाच्या गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्र (Centre of gravity) शोधा

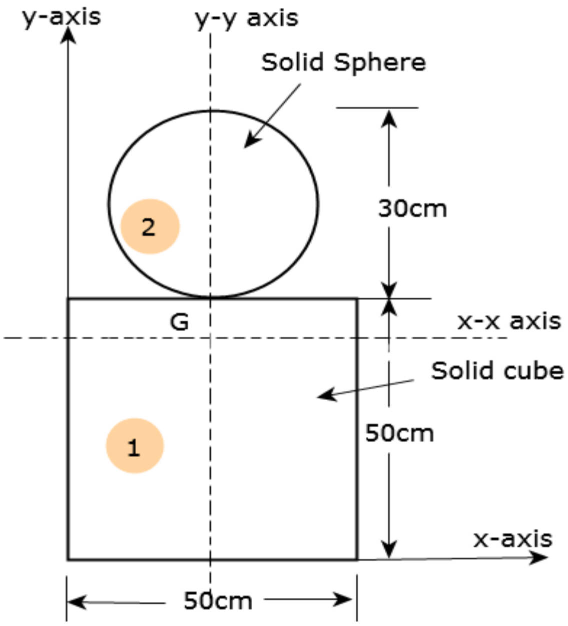
उत्तर:

दिलेलीमाहिती(Given Data):

घनाचीलांबी (Cube length) = a = 50 cm

गोलाचा व्यास (Diameter of Sphere) = d = 30 cm

गोलाचीत्रिज्या(Radius of Sphere) = r = $\frac{\text{गोलाचाव्यास}}{2} = \frac{30}{2}$ = 15 cm



आकृती -5.12

घनफळगणना (Volume calculation):

घनाचेघनफळ (V_1) $= a^3$

$= (50)^3$

$= 125000\ cm^3$

गोलाचेघनफळ (V_2) $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times (15)^3$

$= 14137.166\ cm^3$

y- अक्षापासून(Axis) गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्रस्थिती $\bar{x}$चीगणनाकरण्यासाठी

दिलेलेसंयुक्तघन y-y अक्षासाठीसममितीय (Symmetrical) आहे

$$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्तघनाचीजास्तीतजास्तलांबी}}{2}$$

$\bar{x} = \frac{50}{2}$

$\bar{x}$ **= 25 cm**

x अक्षापासून(Axis) गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्रस्थितीȳचीगणनाकरण्यासाठी

$y_1 = \frac{\square}{2}$

$y_1 = \frac{50}{2}$

$y_1 = 25$ cm

$y_2 = 50 + 15$

$y_2 = 65$ cm

तसेच,

$\bar{y} = \frac{V1\ y1 + V2\ y2}{V1 + V2}$

$\bar{y} = \frac{(125000 \times 25) + (14137.166 \times 65)}{(125000 + 14137.166)}$

$\bar{y}$ **= 29.08 cm**

गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्र($\bar{x}$,$\bar{y}$) = (25 cm, 29.08 cm)

उदाहरणक्र -04

80 cm व्यासाचा (Diameter) अर्धगोल (Hemisphere) हा 80 cm व्यासाचा (Diameter) आणि 110 cm उंचीच्या (Height) वृत्तचित्तीवर(Solid cylinder) समाक्षिकपणे(Coaxially) ठेवलाआहे, तरसंयुक्त(Composite) घनाच्यागुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्र (Centre of gravity) शोधा

उत्तर:

दिलेली माहिती(Given Data):

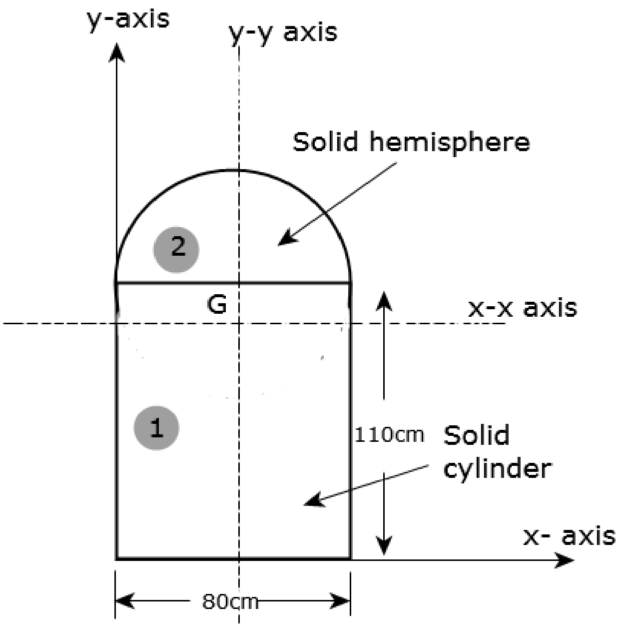
वृत्तचित्तीचा व्यास(Diameter of solid cylinder) =D = 80 cm

वृत्तचित्तीची त्रिज्या(Radius of solid cylinder) = R = $\frac{D}{2} = \frac{80}{2} = 40$ cm

वृत्तचित्तीची उंची(Height of solid cylinder) = H = 110 cm

अर्धगोलाचा व्यास(Diameter of hemisphere) = d = 80 cm

अर्धगोलाची त्रिज्या(Radius of hemisphere) = r = $\frac{d}{2} = \frac{80}{2} = 40$ cm



आकृती -5.13

घनफळ गणना (Volume calculation):

वृत्तचित्तीचे घनफळ(Solid cylinder volume) = $V_1 = \pi R^2 H$

$= \pi \times (40)^2 \times 110$

$= 552920.30\ cm^3$

अर्धगोलाचे घनफळ(Hemisphere volume) $= V_2 = \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\pi \times (40)^3$

$= 134041.28\ cm^3$

y- अक्षापासून(Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) स्थिती $\bar{x}$ची गणना करण्यासाठी

दिलेले संयुक्तघन y-y अक्षासाठी(Axis) सममितीय (Symmetrical) आहे

$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्तघनाचीजास्तीतजास्तलांबी}}{2}$

$\bar{x} = \frac{80}{2}$

$\bar{x}$ **= 40 cm**

x -अक्षापासून(Axis) गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) स्थिती $\bar{y}$ ची गणना करण्यासाठी

$y_1 = \frac{h}{2}$

$y_1 = \frac{110}{2}$

$y_1 = 55$ cm

$y_2 = 110 + \frac{3 \times 40}{8}$

$y_2 = 125$ cm

तसेच,

$$\bar{y} = \frac{V1\ y1 + V2\ y2}{V1 + V2}$$

$$\bar{y} = \frac{(552920.30 \times 55) + (134041.28 \times 125)}{(552920.30 + 134041.28)}$$

$\bar{y}$ = 68.65 cm

गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र($\bar{x}$,$\bar{y}$) = (40 cm, 68.65 cm)

उदाहरणक्र. -05

12 cm व्यासाचे (Diameter) आणि 20 cm उंचीचे (Height) एक घनवर्तुळाकार वृत्तचित्तीमधून (Solid cylinder) 6 cm व्यासाचा (Diameter) एक दंडगोलाकार (Cylindrical) छिद्र (Hole) वृत्तचित्तीच्या अर्ध्या (Half) भागासाठी समाक्षिकपणे (Axially) ड्रिल केले आहे तरसंयुक्त (Composite) घनाच्या गुरुत्वाकर्षणाचे केंद्र (Centre of gravity) शोधा.

उत्तर:

दिलेलीमाहिती(Given Data):

वृत्तचित्तीचा व्यास(Diameter of solid cylinder) = D = 12 cm

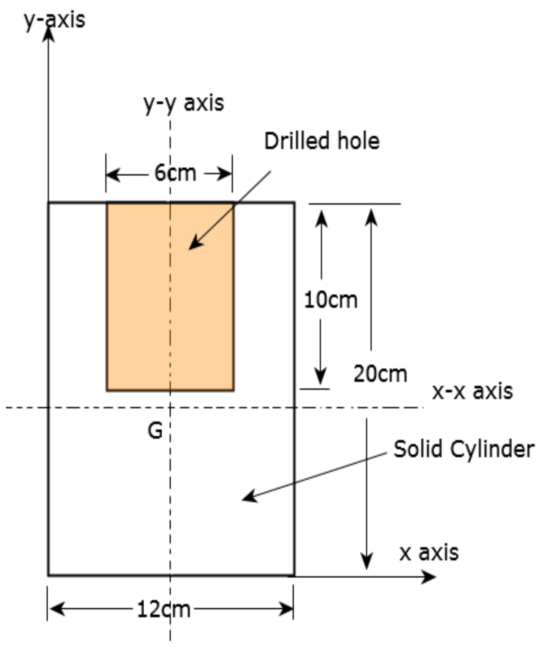
वृत्तचित्तीची त्रिज्या(Radius of solid cylinder) =R = $\frac{D}{2} = \frac{12}{2}$= 6 cm

दंडगोलाकार छिद्राचा व्यास(Diameter of hole) = d = 6 cm

दंडगोलाकार छिद्राची त्रिज्या(Radius of Hole) = r = $\frac{d}{2} = \frac{6}{2}$= 3 cm

वृत्तचित्तीची उंची(Height of solid cylinder) = H= 20 cm

दंडगोलाकार छिद्राची उंची(Height of hole) = h =10 cm



आकृती -5.14

घनफळगणना (Volume calculation):

वृत्तचित्तीचेघनफळ(Volume of Solid cylinder) = $V_1 = \pi R^2 H$

$= \pi \times (6)^2 \times 20$

$= 2261.94\ cm^3$

ड्रिल केलेले वृत्तचित्तीचेघनफळ(Volume of drilled Solid cylinder) = $V_2 = \pi r^2 h$

$= \pi \times (3)^2 \times 10$

$= 282.74\ cm^3$

y-अक्षापासून(Axis) गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्रस्थिती $\bar{x}$चीगणनाकरण्यासाठी

दिलेलेसंयुक्तघन y-y अक्षासाठीसममितीय (Symmetrical) आहे,

$\bar{x} = \frac{\text{संयुक्तघनाचीजास्तीतजास्तलांबी}}{2}$

$\bar{x} = \frac{12}{2}$

$\bar{x}$ **= 6 cm**

x -अक्षापासून(Axis) गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्रस्थिती$\bar{y}$चीगणनाकरण्यासाठी,

$y_1 = \frac{h}{2}$

$y_1 = \frac{20}{2}$

$y_1 = 10$ cm

$y_2 = 10 + \frac{h}{2}$

$y_2 = 10 + \frac{10}{2}$

$y_2 = 15$ cm

तसेच,

$\bar{y} = \frac{V1\ y1 - V2\ y2}{V1 - V2}$

$\bar{y} = \frac{(2261.94 \times 10) - (282.74 \times 15)}{(2261.94 - 282.74)}$

$\bar{y}$ **= 9.28 cm**

गुरुत्वाकर्षणाचेकेंद्र($\bar{x}$,$\bar{y}$) = (6 cm, 9.28 cm)

संदर्भ (Reference)

Sr. no	Author	Title	Publisher with ISBN Number
1	S. Ramamrutham	Engineering Mechanics	Dhanpat Rai Publishing Co. 2016 ISBN-13: 978-9352164271
2	R. S. Khurmi,N.Khurmi	Engineering Mechanics	S.Chand& Co. New Delhi 2018 ISBN: 978-9352833962
3	S. S. Bhavikatti	Engineering Mechanics	New Age International Private Limited ISBN: 978-9388818698
4	D. S. Bedi, M. P.Poonia	Engineering Mechanics	Khanna Publishing ISBN-13:978-9386173263
5	Dr. R. K. Bansal	Engineering Mechanics	Laxmi Publications ISBN 13: 9788131804094