महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई

(स्वायत्त)(ISO9001:2015)(ISO/IEC27001:2013)

अभियांत्रिकी आणि तंत्रज्ञान पदविका

शिक्षण पुस्तिका

(Learning Material)

Applied Mathematics

(312301)

मराठी – इंग्रजी (द्विभाषिक) माध्यम

(अभियांत्रिकी व तंत्रज्ञान द्वितीय सत्र पदविका)

शिक्षण पुस्तिका

(Learning Material)

उपयोजित गणित

Applied Mathematics

(312301)

मराठी – इंग्रजी द्विभाषिक माध्यम

(अभियांत्रिकी व तंत्राज्ञानातील द्वितीय सत्र पदविका)

महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ, मुंबई

(स्वायत्त) (ISO 9001:2015) (ISO/IEC 27001:2013)

मार्गदर्शक

श्री. सचिन बापूराव येडे
अधिव्याख्याता गणित

लेखक

श्रीमती. चारुलता चंद्रशेखर पाटील
अधिव्याख्याता गणित

श्री. संदीप पंढरीनाथ घोगरे
अधिव्याख्याता गणित

श्री. दीपक पांडुरंग दिवटे
अधिव्याख्याता गणित

श्रीमती. तृप्ती नंदकुमार कथले
अधिव्याख्याता गणित

श्रीमती. मयुरी दौलतराव मोरे
अधिव्याख्याता गणित

समन्वयक

श्रीमती. प्राची प्रशांत कुलकर्णी
अधिव्याख्याता गणित

मुख्य समन्वयक

डॉ. अरविंद शहाजी कोंडेकर
प्राचार्य

महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळ

(स्वायत्त) (ISO: ९००१:२०१५) (ISO/IES: २७००१-२०१३)

शासकीय तंत्रनिकेतन इमारत, चौथा मजला, ४९, खेरवाडी, बांद्रा (पूर्व), मुंबई - ४०० ०५१.

दूरध्वनी क्र.: ०२२-६२५४२१७० / १६१

Email : director@msbte.com Web : www.msbte.org.in

प्रास्ताविक

महाराष्ट्र राज्यातील पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षणामध्ये विद्यार्थ्यांचे रोजगार कौशल्य विकसित करून विद्यार्थ्यांचा सर्वांगीण विकास घडवून आणण्याकरिता महाराष्ट्र राज्य तंत्रशिक्षण मंडळ कटिबद्ध आहे. उद्योगधंद्यातील बदलत्या तंत्रज्ञानाशी संबंधित गरजा लक्षात घेऊन महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाकडून पदविका अभ्यासक्रम वेळोवेळी अद्यावत करण्यात येतो . अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रम शिकत असतांना संकल्पनात्मक ज्ञान, सुसंगत संदर्भ, प्रश्न विचारणे, विश्वसनिय पुरावे, कारणमीमांसा आणि सुस्पष्ट निकष यांचा वापर करून अर्थाची उकल करण्याची, विश्लेषण व मूल्यमापन करण्याची तसेच तर्काने अनुमान काढण्याची क्षमता म्हणजेच चिकित्सक विचार विद्यार्थ्यांमध्ये अधिक दृढ होतील असा मला विश्वास आहे. जेव्हा विद्यार्थी ज्ञान मिळवण्याच्या माध्यमाशी पूर्णपणे परिचित आणि सोयीस्कर असतात, तेव्हा त्यांच्यासाठी वर्गातील चर्चेत भाग घेणे सोपे होते, संकल्पनात्मक व सैद्धांतिक बाबींचे आकलन परिपूर्ण होते, संज्ञानात्मक क्षमता सुधारते आणि त्यांचा आत्मविश्वास देखील वाढतो या सर्व गोष्टींचा विचार करून मंडळाकडून शैक्षणिक सामुग्रीची निर्मिती करण्यात आलेली आहे . भारत देश हा खेड्यापाड्यातून विकसित झालेला देश असून ग्रामीण भागातील विद्यार्थ्यांना तांत्रिक शिक्षण घेतांना भाषेचा अडसर न येता तांत्रिक बाबींचा आशय समजून घेणे शक्य होईल या दृष्टिकोनातून महाराष्ट्र राज्य तंत्र शिक्षण मंडळाने पदविका स्तरावरील तांत्रिक शिक्षणाकरीता विद्यार्थ्यांना मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय शैक्षणिक वर्ष २०२१-२२ पासून उपलब्ध करून दिलेला आहे .

राष्ट्रीय शैक्षणिक धोरण-२०२० प्रादेशिक भाषेतील शिक्षणास प्रोत्साहन देते, ज्यामुळे विद्यार्थ्यांना तांत्रिक अभ्यासक्रमांसाठी प्रादेशिक भाषांतुन शिक्षणाचे माध्यम निवडता येते. सदर धोरणामुळे प्रादेशिक भाषांमध्ये तांत्रिक सामग्री आणि अभ्यास सामग्रीचा विकास आणि भाषांतर निर्माण करण्याची आवश्यकता आहे . त्यास अनुसरून मंडळाने मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक माध्यमाचा पर्याय द्वितीय व तृतीय वर्षाकरिताही उपलब्ध करून देण्यात आला आहे. तसेच त्याकरिताची शैक्षणिक सामग्रीही संबंधीत भागधारकरांना उपलब्ध करून देण्यात येत आहे.

पदविका स्तरावरील तंत्रशिक्षण अधिक दर्जेदार करण्यासाठी महाराष्ट्रातील अनुभवी व तज्ञ अध्यापकांनी व्यवहारिक मराठी भाषा व इंग्रजी भाषेतील तांत्रिक शब्दावली यांचा वापर करून मराठी - इंग्रजी भाषेचा सुवर्णमध्य साधण्याचा प्रयत्न केलेला आहे. मंडळाच्या स्तरावर गठीत सुकाणू समितीमार्फत सदर शैक्षणिक सामुग्रीचा दर्जा, तसेच इतर बाबींची तपासणी करण्यात आलेली आहे. त्यामुळे सदर शैक्षणिक सामुग्री अधिक सम्पन्न झालेली असून विद्यार्थी त्यांच्या व्यक्तिमत्त्वाचा सुसंवादी आणि सर्वांगीण विकास साधतील. परिणामतः विश्वस्तरीय मनुष्यबळाच्या गरजा पूर्ण करण्यात महाराष्ट्र राज्य अग्रेसर राहील व पर्यायाने राष्ट्रनिर्मिती करीता निश्चितच हातभार लागेल , असा मला विश्वास आहे.

अभियांत्रिकी पदविका अभ्यासक्रमातील प्रमुख विषयांची मराठी-इंग्रजी द्विभाषिक शैक्षणिक सामुग्री बनविण्यासाठी अध्यापक व सुकाणू समितीचे सदस्य यांनी दर्शविलेले समर्पण व वचनबद्धता कौतुकास पात्र आहे , या सर्वांचे मी मनः पूवक अभिनंदन करतो !

(प्रमोद नाईक)
संचालक
म. रा. तंत्र शिक्षण मंडळ, मुंबई.

अनुक्रमणिका

अ. क्र	घटकाचे नाव (Unit Name)	पान क्र.
1.	घटक-१ (Unit – I) अनिश्चित संकलन (Indefinite Integration)	01-56
2.	घटक-२ (Unit – II) निश्चित संकलन (Definite Integration)	57-84
3.	घटक-३ (Unit – III) विकलक समीकरण (Differential Equation)	86-119
4.	घटक-४ (Unit – IV) संख्यात्मक पद्धती(Numerical Methods)	120-159
5.	घटक-५ (Unit – V) संभाव्यता वितरण (Probability Distribution)	160-189
6.	लाप्लास रुपांतर आणि व्यस्त लाप्लास रुपांतर Laplace Transform and Inverse Laplace Transform (हा घटक केवळ ट्युटोरिअल साठी आहे)	190-219

घटक- १

अनिश्चित संकलन

(Indefinite Integration)

(इंडेफिनिट इंटीग्रेशन)

साधे संकलन (Simple Integration)

संकलन पद्धति (Methods of Integration)

घटक – १

अनिश्चित संकलन (Indefinite Integration) (इंडेफिनिट इंटीग्रेशन)

अभ्यासक्रम निष्पत्ती (Course Outcome):

योग्य पद्धतींचा उपयोग करून संकलनाच्या दिलेल्या उदाहरणचे निराकरण करणे.

घटक निष्पत्ती (Unit outcome):

a) संकलनाच्या नियमांवर आधारित दिलेल्या सोप्या उदाहरणचे निराकरण करणे.

b) प्रतिस्थापनाने संकलन (integration by substitution) वापर करून दिलेली सोपी संकलक मिळविणे.

c) भागशः संकलन (integration by parts) उपयोग करुन साधे फलाचे संकलक करणे,

d) आंशिक अपूर्णांकांद्वारे (Partial fractions) दिलेले साधे संकलक (integral) मूल्यांकन करणे.

परिचय (Introduction):

गणित आणि अभियांत्रिकी विज्ञानात संकलन यो महत्त्वपूर्ण भूमिका आहे. मुख्यतः याचा उपयोग अनियमित आकृत्यांची क्षेत्रफळ आणि घनफळ शोधण्यासाठी केला जातो. संकलन अभियांत्रिकी आणि भौतिक विज्ञान संबंधित गणिताच्या समस्येचे निराकरण करण्यासाठी कौशल्य विकसित करण्यासाठी वैज्ञानिक समस्यांसह मूलभूत संकल्पना एकत्र करते.

१.१ Integration: (इंटीग्रेशन)

- व्याख्या: व्यापकपणे विकलनाची (Derivative) उलट प्रक्रिया म्हणजेच संकलन (Integration).

जर $\frac{d}{dx}\{\emptyset(x)\} = f(x)$ असेल तर $\int f(x)dx = \emptyset(x)$

चिन्ह $\int$ ला संकलक चिन्ह असे म्हणतात. चिन्ह dx हे सूचित करते की समाकलन x च्या संदर्भात सादर असते.

उदा. $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ तर $\int 4x^3\,dx = x^4$

- संकलनाचा अचल (Constant of Integration): (कांस्टेंट ऑफ़ इंटीग्रेशन)

आपल्याला माहिती आहे,

$\frac{d}{dx}(x^3) = 3\,x^2 \quad \therefore \quad \int 3\,x^2\,dx = x^3$ ………………… (1)

तसेच, $\frac{d}{dx}(x^3 + 7) = 3\,x^2 \quad \therefore \quad \int 3\,x^2\,dx = x^3 + 7$ ………….. (2)

आणि $\frac{d}{dx}\left(x^3 - \frac{7}{2}\right) = 3\,x^2 \quad \therefore \quad \int 3\,x^2\,dx = x^3 - \frac{7}{2}$ ………….. (3)

हे स्पष्ट आहे की वरील परीणाम (1), (2) आणि (3) पासून $3x^2$ चे संकलक अचल पद मध्ये भिन्न आहेत. अशा संकलक ना अनिश्चित संकलक (Indefinite integral) म्हणतात. यावरून आपण लिहू शकतो. $\int f(x)dx = \emptyset(x) + c$ येथे c ला संकलनाचा अचल (constant of integration) म्हटले जाते जे विकलन मध्ये गमावले गेले होते. सर्वसाधारणपणे संकलन I या अक्षराद्वारे दर्शविले जाते.

- संकलकचा सिद्धांत (**Theorems of Integration**): (थेओरेम्स ऑफ़ इंटीग्रेशन)

समजा u आणि v हे x चे संकलनीय फल असतील तर

सिद्धांत **1**: जर f हे संकलनीय फल आणि k हा कोणताही अचल असेल तर

$$\int ku\,dx = k\int u\,dx$$

म्हणजेच अचल पद संकलक चिन्हाच्या बाहेर घेतले जाऊ शकते.

सिद्धांत 2: u आणि v हे x चे संकलनीय फल असतील तर

$$\int [u \pm v)]dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx$$

संकलकच्या दोन फलाची बेरीज किंवा वजाबाकी ही त्याच्या संबंधित संकलकच्या बेरीज किंवा वजाबाकी

समान असते.

➢ मानक फलाचे संकलन(Integration of standard functions): (इंटीग्रेशन ऑफ़ स्टैण्डर्ड फंक्शन्स)

महत्त्वपूर्ण संकलक सूत्रे खालील प्रमाणे आहेत.

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ; n \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \log x + c$

3) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + c$

4) $\int e^x\, dx = e^x + c$

5) $\int dx = x + c$

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

8) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

9) $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$

10) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$

11) $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\, x + c$

12) $\int \tan x\, dx = \log(\sec x) + c$

13) $\int \cot x\, dx = \log(\sin x) + c$

14) $\int \sec x\, dx = \log(\sec x + \tan x) + c$

15) $\int \mathrm{cosec}\, x\, dx = \log(\mathrm{cosec}\, x - \cot x) + c$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + c = -\cos^{-1}(x) + c$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right) + c$

18) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + c = -\cot^{-1}(x) + c$

19) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$

20) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c$

21) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x) + c = -\ \text{cosec}^{-1}(x) + c$

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int (\mathbf{e^x} + \mathbf{x^e} + \mathbf{e^e})\mathbf{dx}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int (e^x + x^e + e^e)dx$

$\Rightarrow \quad I = \int e^x\,dx + \int x^e\,dx + e^e \int dx$

$\Rightarrow \quad I = e^x + \frac{x^{e+1}}{e+1} + e^e \cdot x + c$

2. $\int (\mathbf{x^e} + \mathbf{a^x} + \mathbf{a^a})\,\mathbf{dx}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int (x^e + a^x + a^a)\,dx$

$\Rightarrow \quad I = \int x^e\,dx + \int a^x\,dx + a^a \int dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x^{e+1}}{e+1} + \frac{a^x}{\log a} + a^a x + c$

3. $\int \mathbf{e^{\log_e x}}\,\mathbf{dx}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int e^{\log_e x}\,dx$

$\Longrightarrow \quad I = \int x\, dx \qquad \because \quad e^{\log_e x} = x$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{x^2}{2} + c$

4. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{3x}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{dx}{3x}$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x}$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{1}{3} \log x + c$

5. $\int (\mathbf{x^8} + \mathbf{\cos x})\, \mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int (x^8 + \cos x)\, dx$

$\Longrightarrow \quad I = \int x^8\, dx + \int \cos x\, dx$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{x^9}{9} + \sin x + c$

6. $\int \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+ x^2}} - \mathbf{sec^2\, x}\right\} \mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \left\{\frac{1}{1+ x^2} - \sec^2 x\right\} dx$

$\Longrightarrow \quad I = \int \frac{1}{1+ x^2}\, dx - \int \sec^2 x\, dx$

$\Longrightarrow \quad I = \tan^{-1} x - \tan x + c$

7. $\int \left\{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1 - x^2}}} - \mathbf{e^x}\right\} \mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \left\{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - e^x\right\} dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int e^x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \sin^{-1}x - e^x + c$$

8. $\int \left\{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right\} dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \left\{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right\} dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \tan^{-1}x - \log x + c$$

9. $\int \left\{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2^x\right\} dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \left\{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2^x\right\} dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int 2^x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{2^x}{\log 2} + c$$

10. $\int \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sec x \cdot \tan x\right\} dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sec x \cdot \tan x\right\} dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx + \int \sec x \cdot \tan x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \sec x + c$$

11. $\int \frac{x^2 - 4x + 5}{x}\,dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{x^2 - 4x + 5}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{x^2}{x}\,dx - \int \frac{4x}{x}\,dx + \int \frac{5}{x}\,dx$$

$\Rightarrow \quad I = \int x \ dx - 4\int dx + 5\int \frac{1}{x} \ dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x^2}{2} \ dx - 4x + 5 \ \log x + c$

12. $\int \mathbf{x(x-1)^2\,dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int x(x-1)^2 dx$

$\Rightarrow \quad I = \int x(x^2 - 2x + 1)dx$

$\Rightarrow \quad I = \int (x^3 - 2x^2 + x)\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int x^3\, dx - 2\int x^2 dx + \int x\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x^4}{4} - \frac{2\,x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$

13. $\int x^3\sqrt{x}\ dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int x^3\sqrt{x}\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \int x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} \ dx$

$\Rightarrow \quad I = \int x^{3+\frac{1}{2}} \ dx$

$\Rightarrow \quad I = \int x^{\frac{7}{2}} \ dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x^{9/2}}{9/2} + c$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाची किंमत काढा.

1) $\int (e^x - 2^x + x^e)dx$

2) $\int (x^4 + 3^x - 4x^e + 17)dx$

3) $\int (15x^5 - 5^5 + 3e^x)dx$

4) $\int \left(e^{2\log x} + e^{x\log a}\right)dx$

5) $\int (\operatorname{cosec} x - \cot x)dx$

6) $\int (x^4 + 8\sin x)dx$

7) $\int (e^x - 5\tan x)dx$

8) $\int (4\sec x + 2\cos x)dx$

9) $\int \left(x^4 - \frac{2}{x} + 8\right) dx$

10) $\int \left\{\frac{4}{1+x^2} - \operatorname{cosec}^2 x\right\} dx$

11) $\int \left\{\frac{2}{1-x^2} - 5\operatorname{cosec} x\right\} dx$

12) $\int \left\{\frac{4}{x^2-1} + 3\sec x\right\} dx$

13) $\int \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + 4x^3 - 2\right\} dx$

14) $\int \left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \cot x\right\} dx$

15) $\int \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \sec x\right\} dx$

16) $\int \left\{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} + \cot x\right\} dx$

17) $\int (x+1)^2\, dx$

18) $\int (x^2-1)^2\, dx$

19) $\int x(x-1)^2\, dx$

20) $\int x^2\sqrt{x}\, dx$

21) $\int \frac{x^2 - 4x + 5}{x} dx$

22) $\int \frac{(x-2)^2}{x}\, dx$

१.२ Types of Integration: (टाइप्स ऑफ़ इंटीग्रेशन)

कधी कधी एखाद्या फलाचे संकलक (integral) थेट शोधणे शक्य नसते. उदाहरणे मानक स्वरुपात (standard forms) सुलभ करण्यासाठी खालील पद्धती लागू आहेत.

- ❖ प्रतिस्थापनाने संकलन(Integration by substitution) (इंटीग्रेशन बाय सब्स्टिट्यूशन)
- ❖ भागशः संकलन(Integration by parts) (इंटीग्रेशन बाय पार्ट्स)
- ❖ आंशिक अपूर्णांकने संकलन(Integration by partial fraction)(इंटीग्रेशन बाय पार्शियल फ्रैक्शन)

❖ प्रतिस्थापनाने संकलन(Integration by substitution) (इंटीग्रेशन बाय सब्स्टिट्यूशन)

मागील लेखात आपण संकलनाची (Integration) विशिष्ट सूत्रे पाहिली आहेत. परंतु समजा x च्या ऐवजी ax किंवा $ax + b$ प्रकारचे पद असेल तर अशा प्रकारची उदाहरणे कशी सोडवायची हा प्रश्न उद्भवतो. अशा परिस्थितीत आपण $ax + b$ चा पर्याय वापरतो.

आपल्याला माहिती आहे, $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $n \neq -1$

परंतु समजा आपल्याला $\int (ax + b)^n \, dx$ शोधायचे आहे. तर या प्रकरणात आपण प्रतिस्थापनेची (substitution) मदत घेऊ.

समजा $I = \int (ax + b)^n \, dx$

$ax + b = t$ वापरुन आपण दिलेला संकलक नवीन चला मध्ये हस्तांतरित करू.

$ax + b = t$ ठेवा. दिलेले संकलक नवीन चला मध्ये परावर्तित करू. त्यासाठी t संदर्भात विकलन करणे आवश्यक आहे

$\therefore$ t संदर्भात विकलन (Differentiate) करू.

$\therefore \quad a \cdot \frac{dx}{dt} = 1$

$\Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{a} \cdot dt$

$\therefore \quad \int (ax+b)^n \, dx = \int t^n \cdot \frac{1}{a} \cdot dt$

$\Longrightarrow \quad \int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a} \int t^n \cdot dt$

$\Longrightarrow \quad \int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{n+1}; \; n \neq -1$

$\Longrightarrow \quad \int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}; \; n \neq -1$

$\Longrightarrow \quad \int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{a}; \; n \neq -1$

अशा प्रकारे खाली दिलेली उर्वरित सूत्रे विकसित करता येतील.

1) $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{a} + c \;; \quad n \neq -1$

2) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\log\,(ax+b)}{a} + c$

3) $\int a^{bx+c} \, dx = \frac{a^{bx+c}}{\log a} \cdot \frac{1}{b} + c$

4) $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$

5) $\int \sin(ax+b) \, dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

6) $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$

7) $\int \tan(ax+b) \, dx = \frac{\log\{\sec(ax+b)\}}{a} + c = \frac{-\log\{\cos(ax+b)\}}{a} + c$

8) $\int \cot(ax+b) dx = \frac{-\log\{\mathrm{cosec}(ax+b)\}}{a} + c = \frac{\log\{\sin(ax+b)\}}{a} + c$

9) $\int \sec(ax+b) \, dx = \frac{\log\{\sec(ax+b) + \tan(ax+b)\}}{a} + c$

10) $\int \mathrm{cosec}(ax+b) \, dx = \frac{\log\{\mathrm{cosec}(ax+b) - \cot(ax+b)\}}{a} + c$

11) $\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{\tan(ax+b)}{a}+c$

12) $\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)dx = \frac{-\cot(ax+b)}{a}+c$

13) $\int \sec(ax+b)\cdot\tan(ax+b)\,dx = \frac{\sec(ax+b)}{a}+c$

14) $\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cdot\cot(ax+b)\,dx = \frac{-\operatorname{cosec}(ax+b)}{a}+c$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

16) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

17) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

18) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+c$

19) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+c$

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c$

लक्षात ठेवा: पुढे जाण्यापूर्वी काही महत्त्वपूर्ण त्रिकोणमितीय सूत्रांचे पुनरावलोकन करू .

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$; $\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\cos 2A = \begin{cases} \cos^2 A - \sin^2 A \\ 2\cos^2 A - 1 \\ 1 - 2\sin^2 A \end{cases}$; $\cos\theta = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \\ 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$

$1+\cos 2A = 2\cos^2 A$; $1+\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$1-\cos 2A = 2\sin^2 A$; $1-\cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$; $\tan\theta = \dfrac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$; $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

प्रकार 1:

या प्रकारात आपण बैजिक फल (algebraic functions), घातांकीय फल (exponential functions) आणि त्रिकोणमितीय फल (Trigonometric functions) यावर आधारित अगदी सोपी उदाहरणे पाहू. चर्चा केल्याप्रमाणे आपण येथे त्रिकोणमितीय सूत्रांचा वापर करू शकतो.

सोडवलेली उदाहरणे

i. $\mathbf{I = \int (3x+5)^4\, dx}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: येथे $I = \int (3x+5)^4\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \dfrac{(3x+5)^5}{5} \times \dfrac{1}{3} + c \qquad \because \int (ax+b)^n\, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{1}{a}$

$\Rightarrow \quad I = \dfrac{(3x+5)^5}{15} + c$

ii. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{3x-2}}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3x-2}$

$\Rightarrow \quad I = \dfrac{\log(3x-2)}{3} + c \qquad \because \displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{\log(ax+b)}{a}$

iii. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt[3]{\mathbf{5-9x}}}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-9x}}$

$\Rightarrow \quad I = \int (5-9x)^{-1/3}\, dx$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{(5-9x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \cdot \frac{1}{-9} + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{(5-9x)^{2/3}}{2/3} \cdot \frac{1}{-9} + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{-1}{6} \cdot (5 - 9x)^{2/3} + c$$

iv. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{3x-2}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{dx}{3x-2}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\log(3x-2)}{3} + c \qquad \because \int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\log(ax+b)}{a}$$

v. $\mathbf{I = \int e^{5x+3}\ dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int e^{5x+3}\ dx$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{5x+3}}{5} + c \qquad \because \int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a}$$

vi. $\mathbf{I = \int (e^{8x} + \sin 2x)\ dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int (e^{8x} + \sin 2x)\ dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int e^{8x}\,dx + \int \sin 2x\ dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{8x}}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + c$$

vii. $\mathbf{I = \int \sec^2(7x+2)\ dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \sec^2(7x+2)\ dx$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\tan(7x+2)}{7} + c$$

viii. $\mathbf{I = \int \cos(4x-3)\, dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \cos(4x-3)\,dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{\sin(4x-3)}{4} + c$

ix. $\mathbf{I = \int \tan(2-3x)\, dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \tan(2-3x)\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{\log\{\sec(2-3x)\}}{-3} + c$

x. $\mathbf{\int \tan^2 x\ dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \tan^2 x\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \int (\sec^2 x - 1)\ dx \qquad \because \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\Rightarrow \quad I = \int \sec^2 x\, dx - \int dx$

$\Rightarrow \quad I = \tan x - x + c$

xi. $\mathbf{\int \cos^2 x\ dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \cos^2 x\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx \qquad \because \quad 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\{\int dx + \int \cos 2x\, dx\}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\left\{x + \frac{\sin 2x}{2}\right\} + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$

xii. $\mathbf{\int \frac{1}{1 + \cos 2x}\ dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{1}{1 + \cos 2x}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int \sec^2 x\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\tan x + c$

xiii. $\int \sqrt{\mathbf{1+cos2x}}\ \mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \sqrt{2\cos^2 x}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \sqrt{2} \int \cos x\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \sqrt{2} \sin x + c$

xiv. $\int \mathbf{\sin 3x \cos 7x\ dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sin 3x \cos 7x\, dx$

2 ने भागून आणि गुणून

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \int 2\ \sin 3x \cos 7x\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \int [\sin(3x+7x) + \sin(3x-7x)]\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \int [\sin 10x - \sin 4x]\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 10x}{10} - \left(\frac{-\cos 4x}{4}\right)\right] + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{-\cos 10x}{20} + \frac{\cos 4x}{8} + c$

xv. $\int \mathbf{\sin^3 x\ dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sin^3 x\, dx$

$\because \quad \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad \therefore \sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$

$\therefore \quad I = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{3}{4}\int \sin x\ dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{3}{4}(-\cos x) - \frac{1}{4}\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{-3\cos x}{4} + \frac{\cos 3x}{12} + c$

xvi. $\mathbf{I = \int \frac{dx}{9 + x^2}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{dx}{9 + x^2}$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dx}{3^2 + x^2}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

xvii. $\mathbf{I = \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2 - x^2}}$

$\Rightarrow \quad I = \sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c$

xviii. $\mathbf{I = \int \frac{dx}{x^2 - 9}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{dx}{x^2 - 9}$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dx}{x^2 - 3^2}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2 \times 3} \log\left(\frac{x - 3}{x + 3}\right) + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{6} \cdot \log\left(\frac{x - 3}{x + 3}\right) + c$

xix. $\mathbf{I = \int \frac{dx}{4 - 9x^2}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{4 - 9x^2}}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{4}{9} - x^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(2/3)^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2 \times \frac{2}{3}} \log\left(\frac{2/3+x}{2/3-x}\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{12} \cdot \log\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right) + c$$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या x च्या संदर्भात संकलनाचे किंमती काढा.

1) $(2x - 5)^4$

2) $(4x + 1)^4$

3) $\frac{1}{3x + 4}$

4) $\frac{1}{2x + 11}$

5) $\frac{1}{3 - 2x}$

6) e^{3x-5}

7) $e^{5x + 4} + \cos 2x$

8) $a^{4x} + \frac{1}{2x - 1}$

9) $5^{3x} + \mathrm{cosec}^2\, 3x$

10) $\tan(2x + 3)$

11) $\sin(2 - 5x)$

12) $\tan 5x . \cos 5x$

13) $\frac{1}{1 - \cos 2x}$

14) $\sin^2 x$

15) $\tan^2 x$

16) $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$

17) $\frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

18) $(\sin x + \cos x)^2$

19) $\cos^3 x$

20) $\sin 2x \cdot \cos 3x$

21) $\cos 8x \cdot \cos 2x$

22) $\sin^{-1}(\cos x)$

23) $\frac{1}{\sqrt{36 - x^2}}$

24) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}$

प्रकार 2:

खालील महत्त्वपूर्ण सूत्र लक्षात ठेवा.

a) $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

b) $\int \frac{f'(x)}{f(X)} dx = \log[f(x)] + c$

c) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(X)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx$

$\Rightarrow \quad I = \log(x^2+3x+1) + c \qquad \because \int \frac{f'(x)}{f(X)} dx = \log[f(x)] + c$

2. $I = \int \frac{8x}{x^2+1} dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = 4\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

$\Rightarrow \quad I = 4\log(x^2+1) + c$

3. $I = \int \frac{x^2+6x+9}{x^3+9x^2+27x+4} dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{x^2+6x+9}{x^3+9x^2+27x+4} dx$

$\therefore \quad I = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+6x+9)}{x^3+9x^2+27x+4} dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+18x+27}{x^3+9x^2+27x+4} dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\log(x^3+9x^2+27x+4) + c$

4. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

$\Rightarrow \quad I = 2\sqrt{x^2-1} + c \qquad \because \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(X)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

5. $I = \int (x^3 + 5x + 1)^4 (3x^2 + 5)\ dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int (x^3 + 5x + 1)^4 (3x^2 + 5)\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{(x^3 + 5x + 1)^5}{5} + c \qquad \because \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

6. $\int \tan^2 x \cdot \sec^2 x\, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \tan^2 x \cdot \sec^2 x\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int (\tan x)^2 \cdot \sec^2 x\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{(\tan x)^3}{3} + c \qquad \because \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

7. $\int \sin^7 x \cdot \cos x\, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sin^7 x \cdot \cos x\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int (\sin x)^7 \cdot \cos x\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{(\sin x)^8}{8} + c \qquad \because \int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$

8. $I = \int e^{4x} \cdot e^x\ dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int e^{4x} \cdot e^x\ dx$

$\Rightarrow \quad I = \int (e^x)^4 \cdot e^x\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{(e^x)^5}{5} + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{5x}}{5} + c$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int \frac{6x-5}{3x^2-5x+1}\,dx$

2) $\int \frac{9x^2-8x}{3x^3-4x^2+1}\,dx$

3) $\int \frac{6x}{x^2+5}\,dx$

4) $\int \frac{4x^3-36x^2-8}{x^4-12x^3-8x}\,dx$

5) $\int \frac{3x^2-5x+4}{2x^3-5x^2+8x-2}\,dx$

6) $\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x-1}}\,dx$

7) $\int \frac{10x-8}{\sqrt{5x^2-8x+7}}\,dx$

8) $\int \frac{3x^2-4}{\sqrt{x^3-4x+7}}\,dx$

9) $\int (x^2-8x+1)^5(2x-8)\,dx$

10) $\int (4x^3+7x^2-3x+4)^5(12x^2+14x-3)\,dx$

11) $\int \tan^5 x \cdot \sec^2 x\,dx$

12) $\int \sin^5 x \cdot \cos x\,dx$

13) $\int \sqrt{1+\sin x} \cdot \cos x\,dx$

प्रकार 3: Integration by Substitution: (इंटीग्रेशन बाय सब्स्टिट्यूशन)

प्रतिस्थापन पद्धति ने आपण नेहमीच एखाद्या फल साठी प्रतिस्थापन ठेवतो कि त्याचा विकलज (derivative) आधीच त्या पदावली मध्ये असतो. म्हणून आपण आपल्या कौशल्याचा वापर करून कोणत्या फलचे विकलज आहे हे ठरवून आपण त्या फल ऐवजी प्रतिस्थापन (substitution) करू शकतो.

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\mathbf{I = \int 3x\sqrt{x^2+4}\ dx}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: येथे $I = \int 3x\sqrt{x^2+4}\ dx$

$x^2 + 4 = t$ ठेवा

$\therefore \quad 2x\,dx = dt \quad \Rightarrow \quad x\,dx = \frac{dt}{2}$

$\therefore \quad I = 3\int \sqrt{t}\cdot\frac{dt}{2}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{3}{2}\int t^{1/2}\,dt$

$\Rightarrow \quad I = \frac{3}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2}$

$\Rightarrow \quad I = t^{3/2} + c$

$\Rightarrow \quad I = (x^2+4)^{3/2} + c$

2. $\mathbf{\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$ ……… (1)

$\tan x = t$ ठेवा

$\therefore \quad \sec^2 x\,dx = dt$

समीकरण (1) वरुन

$I = \int e^t dt$

$\Rightarrow \quad I = e^t + c$

$\Rightarrow \quad I = e^{\tan x} + c$

3. $\mathbf{I = \int \frac{2^{\tan x}}{\cos^2 x} dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{2^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

$\tan x = t$ ठेवा $\therefore$ $\sec^2 x \, dx = dt$

$\Longrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$

$\therefore I = \int 2^t \, dt$

$\Longrightarrow I = \frac{2^t}{\log 2} + c$

$\Longrightarrow I = \frac{2^{\tan x}}{\log 2} + c$

4. $\mathbf{I = \int \frac{3^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2} dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{3^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2} dx$

$\tan^{-1} x = t$ ठेवा $\therefore$ $\frac{1}{1 + x^2} dx = dt$

$\therefore I = \int 3^t \, dt$

$\Longrightarrow I = \frac{3^t}{\log 3} + c$

$\Longrightarrow I = \frac{3^{\tan^{-1} x}}{\log 3} + c$

5. $\mathbf{I = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$

$e^x - e^{-x} = t$ ठेवा

$\therefore (e^x + e^{-x})dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t}$

$\Rightarrow \quad I = \log t + c$

$\Rightarrow \quad I = \log(e^x - e^{-x}) + c$

6. $\int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int \frac{\sin(\log x)}{x} dx$ ……… (1)

$\log x = t$ ठेवा

$\therefore \quad \frac{1}{x} dx = dt$

समीकरण (1) वरुन

$I = \int \sin t \, dt$

$\Rightarrow \quad I = -\cos t + c$

$\Rightarrow \quad I = -\cos(\log x) + c$

7. $I = \int \frac{1}{x \cdot \cos^2(\log x)}$ **dx** या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: येथे $I = \int \frac{1}{x \cdot \cos^2(\log x)} dx$

$\log x = t$ ठेवा

$\therefore \quad \frac{1}{x} dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{\cos^2 t}$

$\Rightarrow \quad I = \int \sec^2 t \, dt$

$\Rightarrow \quad I = \tan t + c$

$\Rightarrow \quad I = \tan(\log x) + c$

8. $\mathbf{I = \int \frac{1}{x(2+3\log x)}\, dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{1}{x(2+3\log x)}\, dx$

$2 + 3\log x = t$ ठेवा

$\therefore \quad 3 \cdot \frac{1}{x} dx = dt$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} dx = \frac{dt}{3}$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt/3}{t}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3} \cdot \log t + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3} \cdot \log(2 + 3\log x) + c$

9. $\mathbf{I = \int \frac{1}{x\{9 + (\log x)^2\}}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: येथे $I = \int \frac{1}{x\{9 + (\log x)^2\}}\, dx$

$\log x = t$ ठेवा

$\therefore \quad \frac{1}{x} dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{(3)^2 + (t)^2}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\log x}{3}\right) + c$

10. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \ldots\ldots\ldots (1)$

$\sqrt{x} = t$ ठेवा

$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dt$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\, dt$

समीकरण (1) वरुन

$I = \int 2 \cos t\, dt$

$\Rightarrow \quad I = 2 \sin t + c$

$\Rightarrow \quad I = 2 \sin\sqrt{x} + c$

11. $\int \frac{e^x(x+1)}{\cos^2(x\, e^x)}\, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{e^x(x+1)}{\cos^2(x\, e^x)} dx \ldots\ldots\ldots (1)$

$x\, e^x = t$ ठेवा

$\therefore \quad (x\, e^x + e^x)\, dx = dt$

$\Rightarrow \quad e^x(x+1)\, dx = dt$

समीकरण (1) वरुन

$I = \int \frac{dt}{\cos^2 t}$

$\Rightarrow \quad I = \int \sec^2 t\, dt$

$\Rightarrow \quad I = \tan t + c$

$\Rightarrow \quad I = \tan(x\, e^x) + c$

12. $\int \frac{e^x(x-1)}{x^2\sin^2\left(\frac{e^x}{x}\right)} dx$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int \frac{e^x(x-1)}{x^2\sin^2\left(\frac{e^x}{x}\right)} dx \ldots\ldots\ldots (1)$

$\frac{e^x}{x} = t$ ठेवा

$\therefore \quad \frac{x\,e^x - e^x.\,1}{x^2} dx = dt$

$\Rightarrow \quad \frac{e^x(x-1)}{x^2}\, dx = dt$

समीकरण (1) वरुन

$I = \int \frac{dt}{\sin^2 t}$

$\Rightarrow \quad I = \int \text{cosec}^2\, t\, dt$

$\Rightarrow \quad I = -\cot t + c$

$\Rightarrow \quad I = -\cot\left(\frac{e^x}{x}\right) + c$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx$

2) $\int \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x+2}} dx$

3) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

4) $\int \frac{\cos(\log x)}{x} dx$

5) $\int \sin^2 x. \cos x \, dx$

6) $\int \frac{e^x(x-1)}{x^2 \cdot \cos^2\left(\frac{e^x}{x}\right)} dx$

7) $\int \frac{e^x(x+1)}{\sin^2(x \cdot e^x)} dx$

8) $\int x\sqrt{1+x^2} \, dx$

9) $\int \frac{1}{x \cdot \log x} dx$

10) $\int \frac{1}{x \cdot \cos^2(\log x)} dx$

11) $\int \frac{1}{x \cdot [\,16+(\log x)^2]} dx$

12) $\int \sec^2(\log x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$

13) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^3}{1+x^2} dx$

14) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx$

15) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

➢ गुणोत्तरीय फलाचे संकलन(Integration of Rational Function): (इंटीग्रेशन ऑफ़ रैशनल फंक्शन्स)

दोन बहुपदीय $\frac{P(x)}{Q(x)}$ च्या भागाकारला गुणोत्तरीय फल असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ $\frac{1+x}{x+2}, \frac{x}{x+1}, \frac{x^2-1}{x^2-1}$ .... हे गुणोत्तरीय फल आहेत.

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}} \mathbf{dx}$ या संकलनाची किंमत काढा

उत्तर: समजा $I = \int \frac{x+1}{x-1} dx$

येथे अंश ची कोटि = छेदची कोटि $\therefore$ आपण समायोजन (adjustment) करू.

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{x-1+2}{x-1} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \left[\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1}\right] dx$

$\Rightarrow \quad I = \int dx + 2\int \frac{1}{x-1} dx$

$\Rightarrow \quad I = x + 2\log(x-1) + c$

2. $\int \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x+3}} \mathbf{dx}$ या संकलनाची किंमत काढा

उत्तर: समजा $I = \int \frac{x}{x+3} dx$

येथे अंश ची कोटि = छेद ची कोटि $\therefore$ आपण समायोजन करू.

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{x+3-3}{x+3} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \left[\frac{x+3}{x+3} - \frac{3}{x+3}\right] dx$

$\Rightarrow \quad I = \int dx - 3\int \frac{1}{x+3} dx$

$\Rightarrow \quad I = x - 3\log(x+3) + c$

3. $\int \frac{\mathbf{2x+3}}{\mathbf{2x-1}}\,\mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{2x+3}{2x-1}\,dx$

येथे अंश ची कोटि = छेद ची कोटि $\therefore$ आपण समायोजन करु.

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{2x-1+4}{2x-1}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \left[\frac{2x-1}{2x-1} + \frac{4}{2x-1}\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int dx + 4\int \frac{1}{2x-1}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I = x + \frac{4\log(2x-1)}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad I = x + 2\log(2x-1) + c$$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int \frac{x}{x+1}\,dx$

2) $\int \frac{3x-2}{2x+3}\,dx$

3) $\int \frac{5x-4}{3x-8}\,dx$

4) $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$

5) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

6) $\int \frac{x+3}{x-2}\,dx$

➢ जर संकलनचा प्रकार असा असेल $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}$ आणि $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}$

हा प्रकार सोडवण्याची पद्धत

1) प्रथम x^2 चा सहगुणक एक (1) बनविणे.

2) पूर्ण वर्ग करण्यासाठी तृतीय पदाचे सूत्र वापरुन ते आलेले पद बेरीज आणि वजा करा.

तृतीय पद= $\left(\frac{1}{2} \times \text{x चा सहगुणक}\right)^2$

3) त्या नंतर आपण संकलनच्या मानक सूत्रांचा उपयोग करु.

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2 + 4x + 25}}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 25}$ ……… (1)

येथे x^2 चा सहगुणक एक आहे.

$\Rightarrow$ तृतीय पद = $\left(\frac{1}{2} \times \text{x चा सहगुणक}\right)^2$

$\Rightarrow$ तृतीय पद = $\left(\frac{1}{2} \times 4\right)^2$

$\Rightarrow$ तृतीय पद = 4

$$\therefore \quad I = \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 4) + 25 - 4}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 21}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + (\sqrt{21})^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{\sqrt{21}} \tan^{-1}\left(\frac{x + 2}{\sqrt{21}}\right) + c$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{13-6x-x^2}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{dx}{\sqrt{13-6x-x^2}} \ldots\ldots\ldots (1)$

$\Rightarrow$ तृतीय पद = $\left(\frac{1}{2} \times x \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$\Rightarrow$ तृतीय पद = $\left(\frac{1}{2} \times (-6)\right)^2$

$\Rightarrow$ तृतीय पद = 9

$\therefore \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{13+9-9-6x-x^2}}$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{22-(x^2+6x+9)}}$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{22})^2-(x+3)^2}}$

$\Rightarrow \quad I = \sin^{-1}\left(\frac{x+3}{\sqrt{22}}\right) + c$

3. $\mathbf{I = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x + 10 \sin x + 26}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x + 10 \sin x + 26}$

ठेवा $\sin x = t \quad \therefore \quad \cos x\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t^2+10t+26}$

$\Rightarrow$ तृतीय पद = $\left(\frac{1}{2} \times x \text{ चा सहगुणक}\right)^2$

$\Rightarrow$ तृतीय पद = $\left(\frac{1}{2} \times 10\right)^2$

$\Rightarrow$ तृतीय पद = 25

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t^2 + 10t + 25 + 26 - 25}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dt}{(t+5)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{dt}{(t+5)^2 + (1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{1}\tan^{-1}\left(\frac{t+5}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \tan^{-1}(\sin x + 5) + c$$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

2) $\frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$

3) $\int \frac{dx}{3 + 2x - x^2}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x - x^2}}$

5) $\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}$

6) $\int \frac{\sec^2 x}{3\tan^2 x - 2\tan x - 5}$

7) $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 2}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 6x - x^2}}$

9) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1}$

- जर संकलन(Integration) चा प्रकार असा असेल

$$\int \frac{dx}{a \pm b\cos x} \quad \text{किंवा} \quad \int \frac{dx}{a \pm b\sin x} \quad \text{किंवा} \quad \int \frac{dx}{a\sin x \pm b\cos x \pm c}$$

तर या प्रकाराचे संकलन शोधण्यासाठी आपण खालील प्रतिस्थापन (substitution) वापरतो.

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ ठेवा

$\therefore \quad \frac{x}{2} = \tan^{-1} t$

$\Longrightarrow \quad x = 2\tan^{-1} t$

$\therefore \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

तसेच, $\sin x = \frac{2\tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} = \frac{2t}{1 + t^2}$

आणि $\cos x = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

थोडक्यात,

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ठेवा

$\therefore \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

तसेच, $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$

आणि $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{5 + 4\cos x}}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ ठेवा $\quad \therefore \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

तसेच, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2dt/1 + t^2}{5 + 4\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\int \frac{dt}{5(1 + t^2) + 4(1 - t^2)}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\int \frac{dt}{9 + t^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\int \frac{dt}{3^2 + t^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2 \cdot \frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3} \tan^{-1}\left(\frac{\tan(x/2)}{3}\right) + c$$

2. $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{4 - 5\cos x}}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $I = \int \frac{dx}{4 - 5\cos x}$

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ ठेवा $\quad \therefore \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

तसेच, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2dt/1 + t^2}{4 - 5\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\int \frac{dt}{4(1+t^2) - 5(1-t^2)}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\int \frac{dt}{9t^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{9}\int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2 \times \frac{1}{3}} \log\left(\frac{t - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\log\left(\frac{3t - 1}{3t + 1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\log\left(\frac{3\tan(x/2) - 1}{3\tan(x/2) + 1}\right) + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{3 + 2\,sinx}}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: **समजा** $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3 + 2\sin x}$

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ ठेवा $\quad \therefore \quad dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2}$

तसेच, $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2+4t}{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{2\,dt}{3t^2 + 4t + 3}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{4t}{3} + 1}$$

तृतीय पद = $\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{4t}{3}+\frac{4}{9}+1-\frac{4}{9}}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)+c$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}\right)+c$$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int \frac{1}{5-4\cos x}$

2) $\int \frac{1}{2+3\cos x}$

3) $\int \frac{1}{4+5\cos x}$

4) $\int \frac{1}{5-3\cos x}$

5) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$

6) $\int \frac{1}{4+5\sin x}$

7) $\int \frac{1}{3-2\sin x}$

8) $\int \frac{1}{5-3\sin x}$

- भागशः संकलन(Integration by Parts): (इंटीग्रेशन बाय पार्ट्स)

जर u आणि v हे x चे संकलनीय फल असतील तर

$\int u \cdot v\, dx = u \int v\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(u). \int v\, dx\right] dx$

म्हणून $u \cdot v = v \cdot u$ गुणाकार हा क्रमनिरपेक्ष असतो. म्हणूनच फलांना प्रथम क्रमांक आणि द्वितीय क्रमांक द्यावा लागेल.

$\int I \cdot II\, dx = I \int II\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(I). \int II\, dx\right] dx$

LIATE नियमानुसार फलची क्रमवारी ठरते.

येथे L –लागीय फल (Logarithmic function)

I –व्यस्त फल (Inverse function)

A – बैजिक फल (Algebraic function)

T – त्रिकोणमितीय फल (Trigonometric function)

E – घातांकीय फल (Exponential function)

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int \mathbf{x \,.\, e^x \, dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int x \,.\, e^x \, dx$

येथे दिलेल्या संकलन मध्ये बैजिक फल आणि घातांकीय फल याचा गुणाकार दिला आहे.

$\therefore$ LIATE नियमानुसार

आपण x ला प्रथम पद आणि e^x दुसरे पद मानू.

भागशः संकलन उपयोग करून

$\Rightarrow \quad I = x \int e^x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x) . \int e^x \, dx\right] dx$

$\Rightarrow \quad I = x \,.\, e^x - \int [1 . e^x] dx$

$\Rightarrow \quad I = x \,.\, e^x - \int e^x dx$

$\Rightarrow \quad I = x \,.\, e^x - e^x + c$

$\Rightarrow \quad I = e^x (x - 1) + c$

2. $\int \mathbf{x \,.\, cosx \, dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int x \,.\, \cos x \, dx$

भागशः संकलन उपयोग करून

$\Rightarrow \quad I = x \int \cos x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x) . \int \cos x \, dx\right] dx$ LIATE नियमानुसार

$\Rightarrow \quad I = x \sin x - \int [1 \,.\, \sin x] dx$

$\Rightarrow \quad I = x \sin x - (-\cos x) + c$

$\Rightarrow \quad I = x \sin x + \cos x + c$

3. $\int x \log x \, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \log x \cdot x \, dx$

भागशः संकलन उपयोग करून

$\Rightarrow \quad I = \log x \int x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) . \int x \, dx\right] dx$ LIATE नियमानुसार

$\Rightarrow \quad I = \log x \frac{x^2}{2} - \int \left[\frac{1}{x} . \frac{x^2}{2}\right] dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$

4. $\int \log x \, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \log x \, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \log x . 1 \, dx$

भागशः संकलन उपयोग करून

$\Rightarrow \quad I = \log x \int 1 \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) . \int 1 \, dx\right] dx$ LIATE नियमानुसार

$\Rightarrow \quad I = \log x . x - \int \left[\frac{1}{x} . x\right] dx$

$\Rightarrow \quad I = x \cdot \log x - \int dx$

$\Rightarrow \quad I = x \cdot \log x - x + c$

$\Rightarrow \quad I = x(\log x - 1) + c$

5. $\int \tan^{-1} x \, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \tan^{-1} x \, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \tan^{-1} x . 1 \, dx$

भागशः संकलन उपयोग करून

$\Longrightarrow$ $I = \tan^{-1} x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x). \int 1\ dx\right] dx$ LIATE नियमानुसार

$\Longrightarrow$ $I = \tan^{-1} x \cdot x - \int \left[\frac{1}{1+x^2} . x\right] dx$

$\Longrightarrow$ $I = x \cdot \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\ dx$

$\Longrightarrow$ $I = x \cdot \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + c$

6. $\int \sin^{-1} x\, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sin^{-1} x\, dx$

$\Longrightarrow$ $I = \int \sin^{-1} x . 1\, dx$

भागशः संकलन उपयोग करून

$\Longrightarrow$ $I = \sin^{-1} x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x). \int 1\ dx\right] dx$ LIATE नियमानुसार

$\Longrightarrow$ $I = \sin^{-1} x \cdot x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . x\, dx$

$\Longrightarrow$ $I = x \cdot \sin^{-1} x - \frac{1}{-2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\Longrightarrow$ $I = x \cdot \sin^{-1} x + \frac{1}{2}\ 2\sqrt{1-x^2} + c$

$\Longrightarrow$ $I = x \cdot \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int x \sin x \, dx$

2) $\int x^2 . e^x \, dx$

3) $\int x \sec^2 x \, dx$

4) $\int x \sin^{-1} x \, dx$

5) $\int x^2 \cos 2x \, dx$

6) $\int e^x \sin x \, dx$

7) $\int \cos^{-1} x \, dx$

8) $\int \cos(\log x) \, dx$

9) $\int \cot^{-1} x \, dx$

10) $\int \frac{x}{1+\cos 2x} dx$

- **संकलनचा प्रकार $\mathbf{e^{ax}\sin(bx+c)}$ आणि $\mathbf{e^{ax}\cos(bx+c)}$ असा असेल**

समजा $I = \int e^{ax}.\ \sin(bx+c)\, dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ **(i)**

LIATE नियमानुसार, आपण $\sin(bx+c)$ ला प्रथम पद आणि e^{ax} दुसरे पद मानू.

$\therefore \quad I = \int \sin(bx+c)\, .\, e^{ax}\, dx$

भागशः संकलनचा उपयोग करून

$$I = \sin(bx+c)\cdot\int e^{ax} - \int\left\{\frac{d}{dx}(\sin(bx+c)\cdot\int e^{ax}\, dx\right\}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \sin(bx+c)\cdot\frac{e^{ax}}{a} - \int b\cos(bx+c)\cdot\frac{e^{ax}}{a}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad a.\, I = \sin(bx+c)\cdot e^{ax} - b\int\cos(bx+c)\cdot e^{ax}\, dx$$

भागशः संकलनचा पुन्हा उपयोग करून

$$\therefore \quad a.\, I = \sin(bx+c)\cdot e^{ax} - b\left[\cos(bx+c)\, .\, \frac{e^{ax}}{a} - \int -b\sin(bx+c)\, .\, \frac{e^{ax}}{a}\, dx\right]$$

$$\Rightarrow \quad a^2I = a\, e^{ax}.\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\, .\, e^{ax} - b^2\int\sin(bx+c)\, .\, e^{ax}dx$$

$$\Rightarrow \quad a^2I = e^{ax}\{a\cdot\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} - b^2I + c_1 \cdots\cdots\cdots$$ समीकरण (i) वरून

$$\Rightarrow \quad (a^2+b^2)I = e^{ax}\{a\cdot\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} + c_1$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cdot\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \int e^{ax}.\ \sin(bx+c)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cdot\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} + c_1$$

तसेच आपण खालील सूत्र सिद्ध करू शकतो.

$$\int e^{ax}.\cos(bx+c)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)\} + c_1$$

अशा प्रकारे आपण आपल्या यादीत खालील सूत्रे जमा करू.

$$\int e^{ax}.\ \sin(bx+c)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cdot\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} + c_1$$

$$\int e^{ax}.\cos(bx+c)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)\} + c_1$$

उच्चतर उपयोजन साठी ही सूत्रे सर्वात महत्त्वाची आहेत.

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int e^{2x} \cdot \sin 3x \; dx$

आपल्याला आठवते

$$\int e^{ax}.\ \sin(bx+c)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\{a \cdot \sin(bx+c) - b\cos(bx+c)\} + c_1$$

याच्याशी तुलना करून आपणास $a = 2$; $b = 3$ आणि $c = 0$

$\therefore \quad I = \int e^{2x} \cdot \sin 3x \; dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{2x}}{2^2 + 3^2}\{2 \cdot \sin(3x+0) - 3\cos(3x+0)\} + c_1$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{2x}}{4 + 9}\{2 \cdot \sin(3x) - 3\cos(3x)\} + c_1$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{2x}}{13}\{2\sin 3x - 3\cos 3x\} + c_1$

2. $\int e^{-4x} \cdot \cos 8x\, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा**

उत्तर: समजा $I = \int e^{-4x} \cdot \cos 8x \; dx$

आपल्याला आठवते

$$\int e^{ax}.\cos(bx+c)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\{a\cos(bx+c) + b\sin(bx+c)\} + c_1$$

याच्याशी तुलना करून आपणास $a = -4$; $b = 8$ आणि $c = 0$

$\therefore \quad I = \int e^{-4x} \cdot \cos 8x \; dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{-4x}}{(-4)^2 + (8)^2}\{-4\cos(8x+0) + 8\sin(8x+0)\} + c_1$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{-4x}}{16 + 64}\{-4\cos(8x) + 8\sin(8x)\} + c_1$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^{-4x}}{80}\{-4\cos 8x + 8\sin 8x\} + c_1$

3. $\int e^x \cdot \cos 2x \, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int e^x \cdot \cos 2x \; dx$

येथे $a = 1$; $b = 2$ आणि $c = 0$

$\therefore \quad I = \int e^x \cdot \cos 2x \; dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^x}{(1)^2 + (2)^2}\{1 \cdot \cos(2x + 0) + 2\sin(2x + 0)\} + c_1$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^x}{1 + 4}\{\cos(2x) + 2\sin(2x)\} + c_1$

$\Rightarrow \quad I = \frac{e^x}{5}\{\cos 2x + 2\sin 2x\} + c_1$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int e^{3x}. \sin 2x \, dx$
2) $\int e^{5x}. \sin 4x \, dx$
3) $\int e^{-2x}. \sin 7x \, dx$
4) $\int e^{-x} \cdot \sin 4x \, dx$
5) $\int e^{-x}. \sin 3x \, dx$
6) $\int e^{5x}. \cos 3x \, dx$
7) $\int e^{4x}. \cos 3x \, dx$
8) $\int e^{3x}. \cos 2x \, dx$
9) $\int e^{-2x}. \cos 3x \, dx$
10) $\int e^{-3x}. \cos 2x \, dx$
11) $\int e^{-x} \cdot \cos x. dx$

➢ जर संकलनचा प्रकार असा असेल $\sqrt{\mathbf{x^2+a^2}}$, $\sqrt{\mathbf{x^2-a^2}}$ आणि $\sqrt{\mathbf{a^2-x^2}}$

पुराव्या शिवाय खालील सूत्रे लक्षात ठेवा.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int \sqrt{\mathbf{x^2+1}}\,\mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sqrt{x^2+1}\,dx$

आपल्याला आठवते

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$$

येथे $a = 1$

$\therefore \quad I = \int \sqrt{x^2+1^2}\,dx$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1^2} + \frac{1^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1^2}\right) + c$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c$

2. $\int \sqrt{\mathbf{x^2-16}}\,\mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sqrt{x^2-16}\,dx$

आपल्याला आठवते

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + c$$

येथे $a = 4$

∴ $I = \int \sqrt{x^2 - 4^2}\,dx$

⟹ $I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4^2} - \frac{4^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 - 4^2}\right) + c$

⟹ $I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 16} - \frac{16}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 - 16}\right) + c$

⟹ $I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 16} - 8\log\left(x + \sqrt{x^2 - 16}\right) + c$

3. **$\int \sqrt{4 - x^2}\,dx$ या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sqrt{4 - x^2}\,dx$

आपल्याला आठवते $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

येथे $a = 2$

∴ $I = \int \sqrt{2^2 - x^2}\,dx$

⟹ $I = \frac{x}{2}\sqrt{2^2 - x^2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

⟹ $I = \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

4. **$\int \sqrt{16 - x^2}\,dx$ या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sqrt{16 - x^2}\,dx$

आपल्याला आठवते $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

येथे $a = 4$

∴ $I = \int \sqrt{4^2 - x^2}\,dx$

⟹ $I = \frac{x}{2}\sqrt{4^2 - x^2} + \frac{4^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$

⟹ $I = \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$

5. $\int \sqrt{100 - x^2}\, dx$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \sqrt{100 - x^2}\, dx$

आपल्याला आठवते

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

येथे $a = 10$

$\therefore \quad I = \int \sqrt{10^2 - x^2}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{10^2 - x^2} + \frac{10^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{10}\right) + c$

$\Rightarrow \quad I = \frac{x}{2}\sqrt{100 - x^2} + 50\sin^{-1}\left(\frac{x}{10}\right) + c$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int\sqrt{x^2 + 4}\, dx$ 2) $\int\sqrt{x^2 + 9}\, dx$

3) $\int\sqrt{x^2 + 36}\, dx$ 4) $\int\sqrt{x^2 - 1}\, dx$

5) $\int\sqrt{x^2 - 49}\, dx$ 6) $\int\sqrt{x^2 - 64}\, dx$

7) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$ 8) $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$

9) $\int \sqrt{25 - x^2}\, dx$ 10) $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

11) $\int \sqrt{36 - x^2}\, dx$ 12) $\int \sqrt{64 - x^2}\, dx$

- लक्षात ठेवा :

या अध्यायात आपण पुढील सूत्रे संकलित करु जी अभियांत्रिकी क्षेत्रात उच्चतर उपयोजनसाठी सर्वात महत्वाचे आहेत.

1) $\int u \cdot v\,dx = u \int v\,dx - \int \left[\frac{d}{dx}(u). \int v\,dx\right] dx + c$

2) $\int \log x\,dx = x \log x - x + c$

3) $\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[\,a \sin bx - b \cos bx\,] + c$

4) $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[\,a \cos bx + b \sin bx\,] + c$

5) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$

6) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + c$

7) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

8) $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx = e^x \cdot f(x) + c$

- **आंशिक अपूर्णांकांचे संकलन (Integration by Partial Fractions): (इंटीग्रेशन बाय पार्शियल फ्रैक्शन)**

मूलभूत गणितामध्ये आपण आंशिक अपूर्णांक शिकलो. आंशिक अपूर्णांकची संकल्पना वापरुन आपण गुणोत्तरीय फलचे संकलन करू शकतो.

आपल्याला खालील वेगवेगळे प्रकार माहित आहेत.

पद्धत -1:

जेव्हा अपूर्णांकाच्या छेदाला भिन्न (non- repeated) आणि एकरेषीय (linear) घटक असतात:

$$\frac{P(x)}{(x \pm a)(x \pm b)} = \frac{A}{(x \pm a)} + \frac{B}{(x \pm b)}$$

पद्धत – 2:

जेव्हा अपूर्णांकाच्या छेदाला (denominator) एकरेषीय पुनरावत्ती झालेले घटक (repeated linear factors) असतात:

$$\frac{P(x)}{(x \pm a)^n} = \frac{A_1}{(x \pm a)} + \frac{A_2}{(x \pm a)^2} + \frac{A_3}{(x \pm a)^3} + \cdots\cdots\cdots + \frac{A_n}{(x \pm a)^n}$$

पद्धत – ३:

जेव्हा अपूर्णांकाच्या छेदाला अवयव न पडणारे आणि पुनरावत्ती नसणारे द्विपदी घटक असतात.

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)(px^2 + qx + r)} = \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{Cx + D}{(px^2 + qx + r)}$$

सोडवलेली उदाहरणे

1. $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x\,(x+1)}}\,\mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\right] dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

समजा $\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$

$$\Rightarrow \quad 1 = A(x+1) + B(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

A साठी, $x = 0$ समीकरण (ii) मधे ठेवा.

$$\therefore \quad 1 = A\,(0+1)$$

$$\Rightarrow \quad A = 1$$

B साठी, $x = -1$ समीकरण (ii) मधे ठेवा.

$$\therefore \quad 1 = B\,(-1)$$

$$\Rightarrow \quad B = -1$$

समीकरण (1) वरुन,

$$\therefore \quad I = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \log x - \log(x+1) + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + c$$

2. $\int \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{(x+2)\,(x+3)}}\,\mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{x+1}{(x+2)\,(x+3)}\,dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \left[\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}\right] dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समजा $\frac{x+1}{(x+2)\,(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$

$\Rightarrow \quad x + 1 = A(x+3) + B(x+2) \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

A साठी, $x = -2$ समीकरण (ii) मधे ठेवा.

$\therefore \quad -1 = A\,(1)$

$\Rightarrow \quad A = -1$

B साठी, $x = -3$ समीकरण(ii) मधे ठेवा.

$\therefore \quad -2 = B\,(-1)$

$\Rightarrow \quad B = 2$

समीकरण (1) वरुन,

$\therefore \quad I = \int \left[\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+3}\right] dx$

$\Rightarrow \quad I = -\int \frac{1}{x+2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+3}\,dx$

$\Rightarrow \quad I = -\log(x+2) + 2\log(x+3) + c$

$\Rightarrow \quad I = 2\log(x+3) - \log(x+2) + c$

3. $\int \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x^2+3x-4}}\,\mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{x}{x^2+3x-4}\,dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \frac{x}{(x+4)(x-1)}$

$\Rightarrow \quad I = \int \left[\frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}\right] dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समजा $\frac{x}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$

$\Rightarrow \quad x = A(x-1) + B(x+4) \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

A साठी, $x = -4$ समीकरण (ii) मधे ठेवा.

$\therefore \quad -4 = A(-5)$

$\Rightarrow \quad A = 4/5$

B साठी, $x = 1$ समीकरण (ii) मधे ठेवा.

$\therefore \quad 1 = B(5)$

$\Rightarrow \quad B = 1/5$

समीकरण (1) वरुन,

$\therefore \quad I = \int \left[\frac{4/5}{x+4} + \frac{1/5}{x-1}\right] dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{4}{5}\int \frac{1}{x+4} dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1} dx$

$\Rightarrow \quad I = \frac{4}{5}\log(x+4) + \frac{1}{5}\log(x-1) + c$

4. $\int \frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{(x+1)(x+2)(x+3)}}\mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \int \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{c}{x+3}\right] dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समजा $\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{c}{x+3}$

$\Rightarrow \quad 2x+1 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2) \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

A साठी, $x = -1$ समीकरण (ii) मधे ठेवा.

$\therefore \quad -1 = A(1)(2)$

$\Rightarrow \quad A = -1/2$

B साठी, $x = -2$ समीकरण (ii) मधे ठेवा.

$\therefore \quad -3 = B(-1)(1)$

$\Rightarrow \quad B = 3$

C साठी, $x = -3$ समीकरण (ii)मधे ठेवा.

$\therefore \quad -5 = C(-2)(-1)$

$\Rightarrow \quad C = -5/2$

समीकरण (1) वरुन,

$$\therefore \quad I = \int \left[\frac{-1/2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{-5/2}{x+3}\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + 3\int \frac{1}{x+2} dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x+3} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{1}{2}\log(x+1) + 3\log(x+2) - \frac{5}{2}\log(x+3) + c$$

5. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{e^x}}{(\mathbf{e^x - 1})(\mathbf{e^x + 1})}\, \mathbf{dx}$ **या संकलनाची किंमत काढा.**

उत्तर: समजा $I = \displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} dx$

ठेवा $\quad e^x = t \;\therefore\; e^x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt$$

समजा $\dfrac{1}{(t-1)(t+1)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (i)

$\Rightarrow \quad 1 = A(t+1) + B(t-1) \cdots\cdots\cdots\cdots$ (ii)

A साठी, $t = 1$ समीकरण(ii)मधे ठेवा.

$\therefore \quad 1 = A(2)$

$\Rightarrow \quad A = 1/2$

B साठी, $t = -1$ समीकरण(ii)मधे ठेवा.

$\therefore \quad 1 = B(-2)$

$\Rightarrow \quad B = -1/2$

समीकरण (1) वरुन,

$$\therefore \quad I = \int \left[\frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}\right] dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\log(t-1) - \frac{1}{2}\log(t+1) + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) + c$$

6. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{cosx}}{(\mathbf{2+sinx})(\mathbf{3+sinx})}\,\mathbf{dx}$ या संकलनाची किंमत काढा.

उत्तर: समजा $\displaystyle I = \int \frac{\cos x}{(2+\sin x)(3+\sin x)} dx$

ठेवा $\sin x = t \; \therefore \; \cos x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{(2+t)(3+t)} dt$$

समजा $\displaystyle \frac{1}{(2+t)\,(3+t)} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{3+t} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

$\Rightarrow \quad 1 = A(3+t) + B(2+t) \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

A साठी, $t = -2$ समीकरण (ii)मधे ठेवा.

$\therefore \quad 1 = A(1)$

$\Rightarrow \quad A = 1$

B साठी, $t = -3$ समीकरण (ii)मधे ठेवा.

$\therefore \quad 1 = B(-1)$

$\Longrightarrow \quad B = -1$

समीकरण (1) वरून,

$$\therefore \quad I = \int \left[\frac{1}{2+t} - \frac{1}{3+t}\right] dt$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int \frac{1}{2+t} dt - \int \frac{1}{3+t} dt$$

$$\Longrightarrow \quad I = \log(2 + t) - \log(3 + t) + c$$

$$\Longrightarrow \quad I = \log\left(\frac{2+t}{3+t}\right) + c$$

$$\Longrightarrow \quad I = \log\left(\frac{2 + \sin x}{3 + \sin x}\right) + c$$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या संकलनाचे किंमती काढा.

1) $\int \frac{x}{(x+2)(x+3)} dx$

2) $\int \frac{3x-2}{x^2-3x+2} dx$

3) $\int \frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)} dx$

4) $\int \frac{2x^2+5}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx$

5) $\int \frac{x+1}{x(x^2-4)} dx$

6) $\int \frac{3x^2+2}{x^3-x} dx$

7) $\int \frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)} dx$

8) $\int \frac{dx}{x(2-\log x)(2\log x-1)} dx$

9) $\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)(2-\tan x)} dx$

10) $\int \frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)(3+\tan x)} dx$

घटक- २

निश्चित संकलन

(Definite Integration)

(डेफिनिट इंटीग्रेशन)

साधे निश्चित संकलन (Simple Definite Integration)

निश्चित संकलनचे गुणधर्म (Properties of Definite Integration)

घटक २

(Unit –II)

निश्चित संकलन

(Definite Integration) (डेफिनिट इंटीग्रेशन)

अभ्यासक्रम निष्पत्ती (Course Outcome)

अभियांत्रिकी संबंधी समस्या सोडविण्यासाठी निश्चित संकलन वापरा

सैद्धांतिक शिक्षण परिणाम (Theory Learning Outcome)

2.1. निश्चित संकलकतेवर आधारित उदाहरणे सोडवा

2.2. दिलेल्या समस्यांचे निराकरण करण्यासाठी निश्चित संकलनाचे गुणधर्म वापरा

परिचय (Introduction):

निश्चित संकलनाचे उपयोजन गणित, विज्ञान, अभियांत्रिकी इत्यादी विविध क्षेत्रात उपयुक्त आहे. येथे आपण साध्या वक्र अंतर्गत खाली असलेले क्षेत्रफळ, एक वक्र आणि रेषाने बांधलेले क्षेत्रफळ, दोन वक्र मधील क्षेत्रफळ आणि परिभ्रमणचे घनफळ शोधू

येथे आपण खालीलप्रमाणे तीन लेखांचा अभ्यास करणार आहोत.

1) निश्चित संकलक
2) निश्चित संकलकाचे नियम आणि उदाहरणे
3) निश्चित संकलन उपयोजन (Only for Tutorial)

1.1 निश्चित संकलन (Definite Integration): (डेफिनिट इंटीग्रेशन)

समजा $y = f(x)$ हे संतत फल (अडथळ्याशिवाय $y = f(x)$ चा आलेख)$[a, b]$ मध्ये असावा आणि $\int f(x)dx = \emptyset(x) + C$ मग यातील फरक $\emptyset(b) - \emptyset(a)$ याना $x = a$ ते $x = b$ च्या मर्यादांमधील $f(x)$ चे निश्चित संकलक म्हणतात.

$$\int_a^b f(x)dx = \emptyset(b) - \emptyset(a)$$

सोडवलेली उदाहरणे

1. शोधा: $\int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx$

$\Rightarrow \quad I = \left\{\frac{\log(3x-2)}{3}\right\}_1^2$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}[\log(4) - \log(1)]$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}\log 4$

2. शोधा: $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

$\Rightarrow \quad I = \{\tan^{-1} x\}_{-1}^1$

$\Rightarrow \quad I = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)$

$\Rightarrow \quad I = \tan^{-1}(1) - [-\tan^{-1}(1)]$

$\Rightarrow \quad I = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(1)$

$\Rightarrow \quad I = 2\tan^{-1}(1)$

$\Rightarrow \quad I = 2 \cdot \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{2}$

3. शोधा: $\int_{0}^{1} \frac{1}{4 - x^2} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_{0}^{1} \frac{1}{4 - x^2} dx$

$\Longrightarrow \quad I = \int_{0}^{1} \frac{1}{(2)^2 - x^2} dx$

$\Longrightarrow \quad I = \left\{\frac{1}{2(2)} \log\left(\frac{2 + x}{2 - x}\right)\right\}_0^1 \qquad \because \qquad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log\left(\frac{a + x}{a - x}\right) + c$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{1}{4}\left\{\log\left(\frac{3}{1}\right) - \log\left(\frac{2}{2}\right)\right\}$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{1}{4}\{\log(3) - \log(1)\}$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{1}{4}\log(3) \qquad \because \qquad \log(1) = 0$

4. शोधा: $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$\Longrightarrow \quad I = \{\sin^{-1} x\}_0^1$

$\Longrightarrow \quad I = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{\pi}{2} - 0$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{\pi}{2}$

5. शोधा: $\int_{0}^{\log 2} e^{2x} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_{0}^{\log 2} e^{2x} dx$

$\Longrightarrow \quad I = \left\{\frac{e^{2x}}{2}\right\}_0^{\log 2}$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{e^{2\log 2} - e^0}{2}$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{e^{\log 4} - 1}{2} = \frac{4-1}{2} \qquad \because \qquad e^{\log x} = x$

$\Longrightarrow \quad I = \frac{3}{2}$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या किंमती शोधा.

1) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+5x)^2}}$

2) $\int_4^{16} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

3) $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx$

4) $\int_1^3 \sqrt[3]{x}\ dx$

5) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{2-3x}$

6) $\int_2^3 \frac{1}{x} dx$

7) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$

8) $\int_1^2 \log x\ dx$

9) $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$

10) $\int_2^4 \frac{1}{4x^2-9} dx$

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$

12) $\int_2^{11} \frac{dx}{2x+11}$

13) $\int_2^4 \frac{dx}{2x+3}$

14) $\int_0^{\frac{2\pi}{P}} (5\sin^2 pt - 3\cos pt)\ dt$

- Properties of Definite Integration: (प्रॉपर्टीज ऑफ़ डेफिनिट इंटीग्रेशन)

1) $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$
2) $\int_a^b f(x)dx \quad = -\int_b^a f(x)dx$
3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(s)ds = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad ; a < c < b$
5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$
6) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$
7) $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$
8) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ जर $f(x)$ सम फल असेल (if $f(x)$is an even function).
9) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ जर $f(x)$ विषम फल असेल तर (if $f(x)$is an odd function).

सोडवलेली उदाहरणे

1. शोधा: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

$\because \quad \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

समीकरण (i) आणि (ii) बेरीज करणे

$$\therefore \quad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{4}$$

2. शोधा: $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan x} dx}$

उत्तर: समजा $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan x} dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$\Longrightarrow \quad I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} dx \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

$\because \quad \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

$\therefore \quad I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx$

$\Longrightarrow \quad I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

समीकरण (i) आणि (ii) बेरीज करणे

$\therefore \quad 2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x} dx \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x} dx$

$\Longrightarrow \quad 2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x} dx$

$\Longrightarrow \quad 2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx$

$\Longrightarrow \quad 2I=\frac{\pi}{2}-0$

$\Longrightarrow \quad I=\frac{\pi}{4}$

3. शोधा: $\displaystyle \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan x+\cot x} dx$

उत्तर: समजा $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan x+\cot x} dx \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

$\because \quad \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

$\therefore \quad I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx$

$\Longrightarrow \quad I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot x+\tan x} dx \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

समीकरण (i) आणि (ii) बेरीज करणे

$$\therefore \qquad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan x + \cot x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot x + \tan x} dx$$

$$\Longrightarrow \qquad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x + \cot x}{\tan x + \cot x} dx$$

$$\Longrightarrow \qquad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\Longrightarrow \qquad 2I = \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\Longrightarrow \qquad I = \frac{\pi}{4}$$

4. **शोधा:** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$

उत्तर: समजा $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$

$$\Longrightarrow \qquad I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}}$$

$$\Longrightarrow \qquad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

$$\because \qquad \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$$

$$\therefore \qquad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$$

$$\Longrightarrow \qquad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

समीकरण (i) आणि (ii) बेरीज करणे

$$\therefore \qquad 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} + \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \right\} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{4}$$

5. शोधा: $\int_0^{4} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{9-x}} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_0^{4} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{9-x}} dx \cdots\cdots\cdots (i)$

$$\because \quad \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

$$\therefore \quad I = \int_0^{4} \frac{\sqrt{(4-x)+5}}{\sqrt{(4-x)+5} + \sqrt{9-(4-x)}} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = I = \int_0^{4} \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x} + \sqrt{x+5}} dx \cdots\cdots\cdots (ii)$$

समीकरण (i) आणि (ii) बेरीज करणे

$$\therefore \quad 2I = \int_0^{4} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{9-x}} dx + \int_0^{4} \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x} + \sqrt{x+5}} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{4} \frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{9-x}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{9-x}} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{4} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = [x]_0^4$$

$$\Rightarrow \quad 2I = 4$$

$$\Rightarrow \quad I = 2$$

6. शोधा: $\int_0^7 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x}} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_0^7 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x}} dx$ ……………………… (i)

$\because \quad \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

$\therefore \quad I = \int_0^7 \frac{\sqrt[3]{7-x}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{7-(7-x)}} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^7 \frac{\sqrt[3]{7-x}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x}} dx$ ……………………… (ii)

समीकरण (i) आणि (ii) बेरीज करणे

$\therefore \quad 2I = \int_0^7 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x}} dx + \int_0^7 \frac{\sqrt[3]{7-x}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x}} dx$

$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^7 \left\{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x}} + \frac{\sqrt[3]{7-x}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x}}\right\} dx$

$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^7 \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{7-x}} dx$

$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^7 dx$

$\Rightarrow \quad 2I = 7$

$\Rightarrow \quad I = \frac{7}{2}$

7. शोधा: $\int_4^5 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-4} + \sqrt{5-x}} dx$

उत्तर: समजा $I = \int_4^5 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-4} + \sqrt{5-x}} dx$ …………… (i)

$\because \quad \left[\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx\right]$

$$\therefore \quad I = \int_4^5 \frac{\sqrt{5-(5+4-x)}}{\sqrt{(5+4-x)-4} + \sqrt{5-(5+4-x)}} dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_4^5 \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-4}} dx \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$$

समीकरण (i) आणि (ii) बेरीज करणे

$$\therefore \quad 2I = \int_4^5 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-4} + \sqrt{5-x}} dx + \int_4^5 \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-4}} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_4^5 \frac{\sqrt{x-4} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{x-4} + \sqrt{5-x}} dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \int_4^5 dx$$

$$\Rightarrow \quad 2I = [x]_4^5$$

$$\Rightarrow \quad 2I = 5 - 4$$

$$\Rightarrow \quad 2I = 1$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}$$

सराव प्रश्नसंच

प्रश्नः खाली दिलेल्या किंमती शोधा.

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sec x}}{\sqrt{\sec x}+\sqrt{\operatorname{cosec} x}} dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\sec x+\operatorname{cosec} x} dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1+\tan x} dx$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot x}$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{\cot x}}$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$

9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\tan x}$

10) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\sin x}} dx$

11) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{\cot x}}$

12) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$

13) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$

14) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}} dx$

15) $\int_1^{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}} dx$

16) $\int_0^{a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx$

17) $\int_0^{3} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}} dx$

18) $\int_0^{7} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}} dx$

19) $\int_1^{3} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}} dx$

20) $\int_0^{5} \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}+\sqrt{x+4}} dx$

Applications of Integration is only for Tutorial.

१.२ संकलनाचे उपयोजन (Applications of integration): Only for CE & ME Group

A) क्षेत्रफळ

वक्रतेखालील क्षेत्रफळ :(Area under the Curve) (एरिया अंडर दी कर्व्ह)

वक्र $y = f(x)$, x –अक्ष आणि कोटी $x = a$ आणि $x = b$ च्या मर्यादांमधील क्षेत्रफळ

क्षेत्रफळ= $A = \int_a^b y\,dx$

$\Longrightarrow$ क्षेत्रफळ= $A = \int_a^b f(x)\,dx$

- दोन वक्रतेखालील क्षेत्रफळ : (Area between Two Curves) (एरिया बिटवीन टू कर्व्ह)

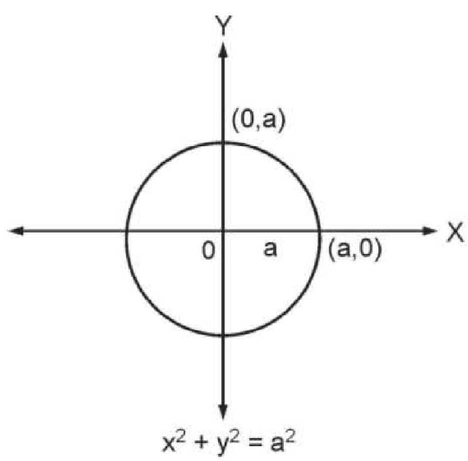
जर वक्र $y_1 = f_1(x)$ आणि $y_2 = f_2(x)$ दोन बिंदू $A(x = a)$आणि $B(x = b)$ वर छेदत असतील तर वक्रतेखालील क्षेत्रफळ खालील प्रमाणे असते.

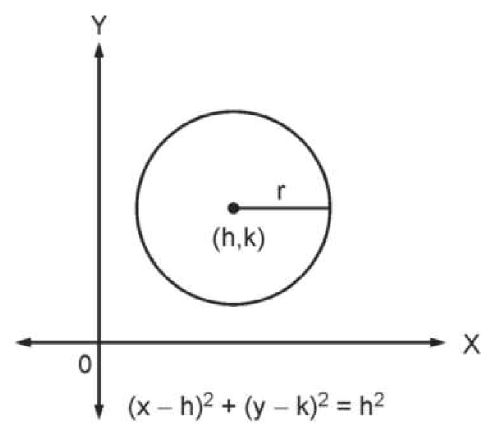
क्षेत्रफळ= $\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx$

$\Longrightarrow$ क्षेत्रफळ= $A = \int_a^b \{f_1(x) - f_2(x)\}\,dx$

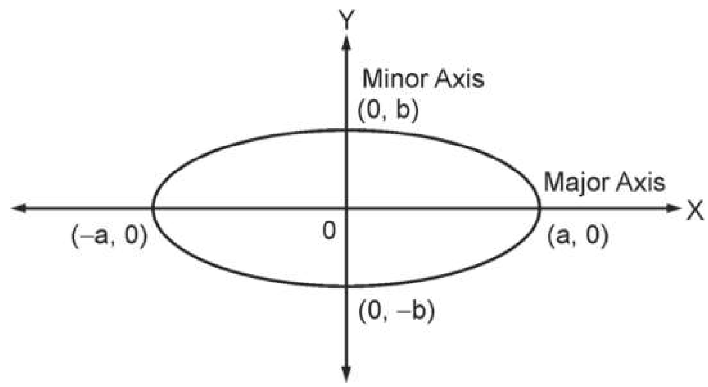
खालील आकार लक्षात ठेवा:

1. Circle: वर्तुळ

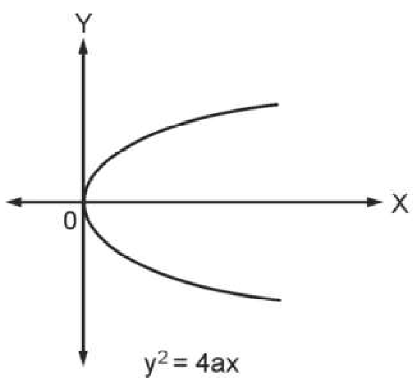


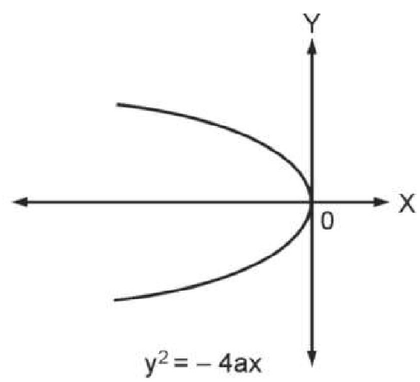


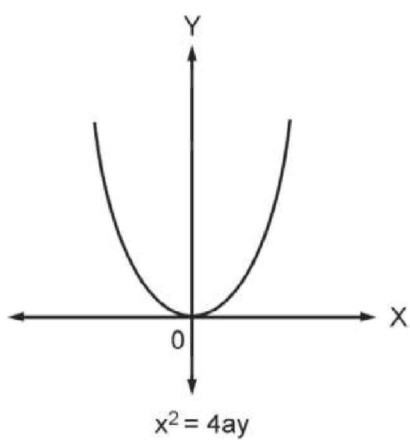
2. विवृत्त (Ellipse):

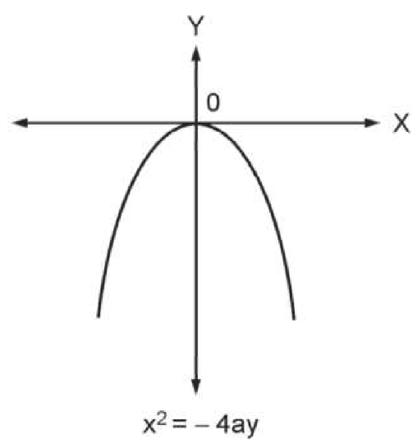


3. अन्वस्त (Parabola):









सोडवलेली उदाहरणे:

1. **X –अक्षासह $\mathbf{x = 0}$ ते $\mathbf{x = 3}$ पर्यंतचे $\mathbf{y = x^2}$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.**

उत्तर: क्षेत्रफळ = $A = \int_a^b y\,dx$

$\Rightarrow \quad A = \int_0^3 x^2\,dx$

$\Rightarrow \quad A = \left\{\frac{x^3}{3}\right\}_0^3$

$\Rightarrow \quad A = \frac{27}{3}$

$\Rightarrow \quad A = 9$ चौरस एकक.

2. **X –अक्षासह $\mathbf{x = 1}$ ते $\mathbf{x = 3}$ पर्यंतचे $\mathbf{y = x^3}$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.**

उत्तर: क्षेत्रफळ= $A = \int_a^b y\,dx$

$\Rightarrow \quad A = \int_1^3 x^3\,dx$

$\Rightarrow \quad A = \left\{\frac{x^4}{4}\right\}_1^3$

$\Rightarrow \quad A = \frac{3^4-1^4}{4}$

$\Rightarrow \quad A = \frac{81-1}{4}$

$\Rightarrow \quad A = \frac{80}{4}$

$\Rightarrow \quad A = 20$ चौरस एकक.

3. **X –अक्षासह $\mathbf{x = 1}$ ते $\mathbf{x = 3}$ पर्यंतचे $\mathbf{y = 3x^2}$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.**

उत्तर: क्षेत्रफळ= $A = \int_a^b y\,dx$

$\Rightarrow \quad A = 3\int_1^3 x^2\,dx$

$\Rightarrow \quad A = 3\left\{\frac{x^3}{3}\right\}_1^3$

$\Rightarrow \quad A = 3^3 - 1^3$

$\Rightarrow \quad A = 27 - 1$

$\Rightarrow \quad A = 26$ चौरस एकक.

4. **X –अक्षासह $x = 0$ ते $x = 4$ पर्यंतचे $y = x$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.**

उत्तर: क्षेत्रफळ= $A = \int_a^b y\,dx$

$\Rightarrow \quad A = \int_0^4 x\,dx$

$\Rightarrow \quad A = \left\{\frac{x^2}{2}\right\}_0^4$

$\Rightarrow \quad A = \frac{16}{2} - 0$

$\Rightarrow \quad A = \frac{16}{2}$

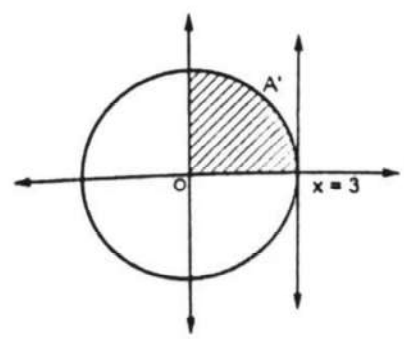
$\Rightarrow \quad A = 8$ चौरस एकक.

5. संकलनचा उपयोग करून **$x^2 + y^2 = 9$** वर्तुळाचे क्षेत्रफळ शोधा.

उत्तर: वर्तुळाचे समीकरण $x^2 + y^2 = 9$ आहे

$\Rightarrow \quad y^2 = 9 - x^2$

$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3^2 - x^2}$



$\therefore$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ= $4 \times A$ [वर्तुळाच्या एक चतुर्थांश भाग]

$\Rightarrow \quad A = 4\int_0^3 y\,dx$

$\Rightarrow \quad A = 4\int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2}\,dx$

$\Rightarrow \quad A = 4\left\{\frac{x}{2}\sqrt{3^2 - x^2} + \frac{3^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}_0^3$

$\because \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\Rightarrow \quad A = 4\left\{\left[0 + \frac{3^2}{2}\sin^{-1}(1)\right] - [0 - \sin^{-1}(0)]\right\}$

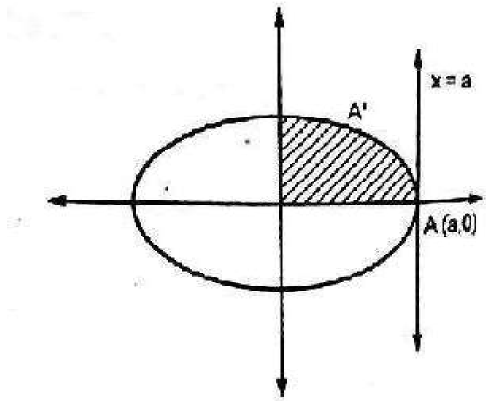
$\Rightarrow \quad A = 4\left[\frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2}\right] - 0$

$\Rightarrow \quad A = 4\left(\frac{9\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \quad A = 9\pi$ चौरस एकक.

6. संकलन चा उपयोग करून $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ विवृत्त चे क्षेत्रफळ शोधा.

उत्तर: विवृत्त चे समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$आहे.



$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$

$\Rightarrow \quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$\Rightarrow \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$\therefore$ विवृत्त चे क्षेत्रफळ$=4\int_0^a y\,dx$

$\Rightarrow \quad A=4\times\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$\Rightarrow \quad A=\frac{4b}{a}\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right\}_0^a$

$\because \int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$\Rightarrow \quad A=\frac{4b}{a}\left\{\left[\frac{a}{2}\sqrt{a^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a}{a}\right)\right]-\left[0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(0)\right]\right\}$

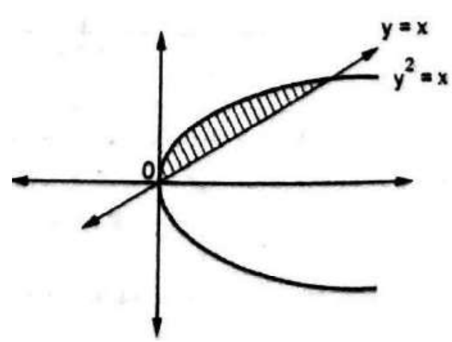
$\Rightarrow \quad A=\frac{4b}{a}\left\{\left[0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right]\right\}$

$\Rightarrow \quad A=\frac{4b}{a}\times\frac{a^2}{2}\times\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad A=\pi ab$ चौरस एकक.

7. $\mathbf{y^2=x}$ आणि $\mathbf{y=x}$ या वक्रते खालील क्षेत्रफळ शोधा.

उत्तर: दिलेले समीकरण



$y^2=x \cdots\cdots\cdots (1)$

$y=x \cdots\cdots\cdots (2)$

$y=x$ हे समीकरण (1)मध्ये ठेवा,

$\therefore \quad x^2=x$

$\Rightarrow \quad x^2-x=0$

$\Rightarrow \quad x(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad x=0, x=1$

आवश्यक क्षेत्रफळ= $\int_0^1 (y_1 - y_2)dx$

समजा $y_1 = \sqrt{x}$ and $y_2 = x$

$\therefore \quad A = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx$

$\Rightarrow \quad A = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x\right)dx$

$\Rightarrow \quad A = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$\Rightarrow \quad A = \frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{(1)^2}{2}$

$\Rightarrow \quad A = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad A = \frac{4-3}{6}$

$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{6}$ चौरस एकक.

8. $\mathbf{y = x^2}$ आणि $\mathbf{y = x}$ या वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

उत्तर: दिलेले समीकरण

$y = x^2 \cdots\cdots\cdots (1)$

$y = x \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

$y = x$ हे समीकरण (1) मध्ये ठेवा

$\therefore \quad x^2 = x$

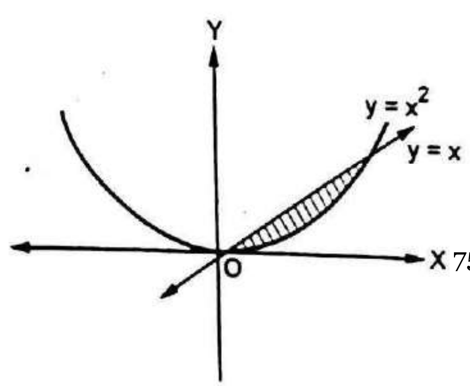
$\Rightarrow \quad x^2 - x = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad x=0, x=1$

आवश्यक क्षेत्रफळ= $\int_0^1 (y_1 - y_2)dx$

समजा $y_1 = x^2$ and $y_2 = x$



$\therefore \quad A = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx$

$\Longrightarrow \quad A = \int_0^1 (x^2 - x)dx$

$\Longrightarrow \quad A = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \quad A = \frac{2-3}{6}$

$\Longrightarrow \quad A = \frac{-1}{6}$

$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{6}$ चौरस एकक. क्षेत्रफळ नेहमीच धन असते.

सराव प्रश्नसंच

1) x –अक्षासह कोटी $x = 0$ ते $x = \pi$ पर्यंतचे $y = \sin x$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

2) x –अक्षासह कोटी $x = 0$ ते $x = \pi$ पर्यंतचे $y = \cos x$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

3) x –अक्षासह कोटी $x = 0$ ते $x = \frac{\pi}{2}$ पर्यंतचे $y = \sin x$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

4) x –अक्षासह कोटी $x = 0$ ते $x = 1$ पर्यंतचे $y = e^x$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

5) x –अक्षासह कोटी $x = 1$ ते $x = 3$ पर्यंतचे $y = 2x + x^2$ चे वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

6) x –अक्षासह कोटी $x = 2$ ते $x = 6$ पर्यंतचे $y = 8x$ चे रेषा खालील क्षेत्रफळ शोधा.

7) संकलनचा उपयोग करून $x^2 + y^2 = 25$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ शोधा.

8) संकलनचा उपयोग करून $x^2 + y^2 = 16$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ शोधा.

9) $x^2 + y^2 = a^2$ या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ हे πr^2 आहे हे सिद्ध करा.

10) संकलनचा उपयोग करून $4x^2 + 9y^2 = 36$ विवृत्तचे क्षेत्रफळ शोधा.

11) संकलनचा उपयोग करून $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ विवृत्तचे क्षेत्रफळ शोधा.

12) $y^2 = x^2 (2 - x)$ या वळे (Loop) चे क्षेत्रफळ शोधा.

13) $y^2 = 2x$ आणि $y = 4x$ या वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

14) $y = 4 - x^2$ आणि X – अक्ष या वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

15) $y = 4x - x^2$ आणि X – अक्ष या वक्रतेखालील क्षेत्रफळ शोधा.

16) $y^2 = 2x$ आणि $x - y = 4$ यानी निर्बंधित क्षेत्रफळ शोधा.

17) $y^2 = 2x$ आणि $x^2 = y$ यानी निर्बंधित क्षेत्रफळ शोधा.

18) अन्वस्त (parabolas) $y^2 = 9x$ आणि $x^2 = 9y$ यानी निर्बंधित केलेले क्षेत्रफळ शोधा.

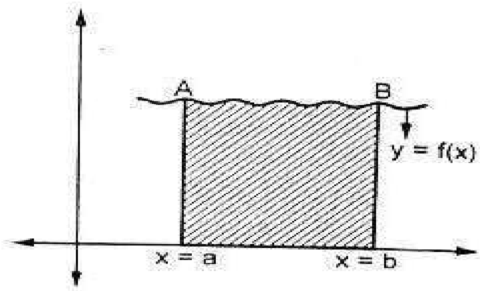
19) अन्वस्त (parabolas) $y^2 = 4x$ आणि $x^2 = 4y$ यानी निर्बंधित केलेले क्षेत्रफळ शोधा.

20) अन्वस्त (parabola) $y = x^2 + 1$आणि रेषा $y = 2x + 1$ यानी निर्बंधित केलेले क्षेत्रफळ शोधा.

- परिभ्रमणचे घनफळ (Volume Of Revolution): (वॉल्यूम ऑफ़ रेवोलुशन)

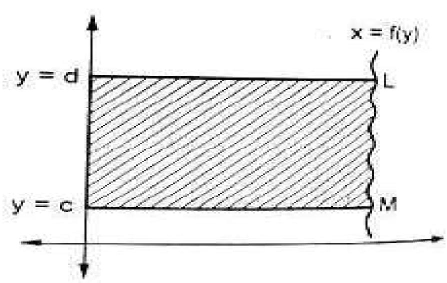
$y = f(x)$ हे $[a, b]$ मध्ये परिभाषित केलेले संतत फल आहे. $y = f(x)$, X – अक्ष आणि कोटी $x = a$ आणि $x = b$ च्या कंस AB ने केलेल्या क्षेत्राभोवती फिरणाऱ्या परिभ्रमणचे घनफळ हे खालील प्रमाणे असते.

$$\mathbf{V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\, dx}$$



$x = f(y)$, y – अक्ष आणि कोटी $y = c$ आणि $y = d$, कंस LM ने केलेल्या क्षेत्राभोवती फिरणाऱ्या परिभ्रमणचे घनफळ हे खालील प्रमाणे असते.

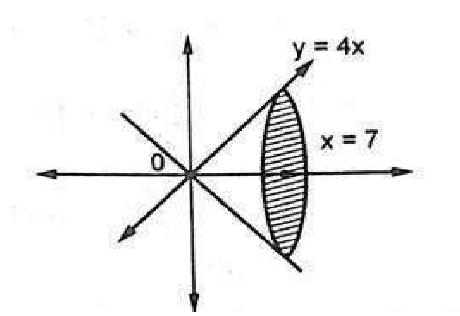
$$V = \pi \int_c^d x^2\, dy = \pi \int_c^d \{f(y)\}^2\, dy$$



सोडवलेली उदाहरणे:

1. कोटी $\mathbf{x = 0}$ आणि $\mathbf{x = 7}$ दरम्यान $\mathbf{x}$ – अक्षांविषयी $\mathbf{y = 4x}$ ही रेखा फिरवून उत्पन्न केलेल्या शंकूचे परिभ्रमण चे घनफळ शोधा.

उत्तर: येथे $V = \pi\int_a^b y^2 dx$



$\Rightarrow \quad V = \pi\int_0^7 (4x)^2 dx$

$\Rightarrow \quad V = \pi \times 16\int_0^7 x^2 dx$

$\Rightarrow \quad V = 16\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^7$

$\Rightarrow \quad V = \frac{16\pi}{3}[7^3 - 0]$

$\Rightarrow \quad V = \frac{16\pi}{3}[343]$

$\Rightarrow \quad V = \frac{5488\pi}{3}$ घन एकक

2. वक्र $\mathbf{y = 2\sin 3x}$, $\mathbf{x}$ –अक्ष आणि कोटी $\mathbf{x = 0, = \pi/3}$. असलेल्या $\mathbf{x}$ –अक्षांभोवती फिरण्या द्वारे मिळालेल्या परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा.

उत्तर: येथे $V = \pi\int_a^b y^2\, dx$

$\Rightarrow \quad V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2(3x)dx$

$\Rightarrow \quad V = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-\cos 6x}{2}\right)dx$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left\{\left[x - \frac{\sin 6x}{6}\right]\right\}_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sin 2\pi}{6}\right] - \left[0 - \frac{\sin 0}{6}\right]$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[\frac{\pi}{3} - 0\right] - [0 - 0]$

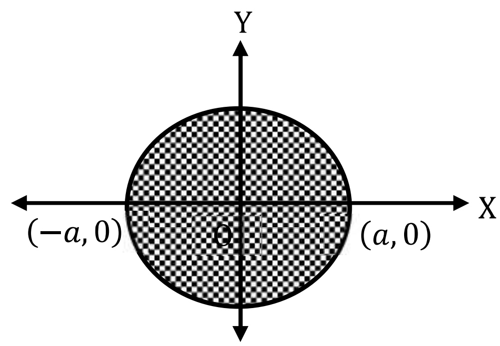
$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \quad V = \frac{2\pi^2}{3}$ घन एकक

3. जेव्हा वक्र $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$ च्या **x**-अक्षांभोवती फिरणाद्वारे क्षेत्र तयार होते तेव्हा परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा.

उत्तर: वर्तुळाचे समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ आहे. $\therefore \quad y^2 = a^2 - x^2$

जर वर्तुळाच्या x − अक्षांवरील अर्धवर्तुळ x − अक्षाबद्दल फिरले असेल तर, घन म्हणून तयार केलेले त्रिज्या 'अ' चे क्षेत्र आहे



$\therefore \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx$

$\Rightarrow \quad V = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$

येथे $\quad f(x) = a^2 - x^2$ सम आहे.

निश्चित संकलनाचे मूलभूत गुणधर्म द्वारे

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ येथे $f(x)$ सम आहे.

$\Rightarrow \quad V = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2)dx$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[a^2 \int_0^a dx - \int_0^a x^2 dx\right]$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[a^2 [x]_0^a - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a\right]$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[a^2[a - 0] - \frac{1}{3}[a^3 - 0]\right]$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[a^2[a] - \frac{1}{3}[a^3]\right]$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[a^3 - \frac{a^3}{3}\right]$

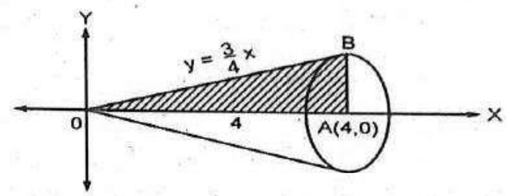
$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[\frac{3a^3 - a^3}{3}\right]$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi\left[\frac{2a^3}{3}\right]$

$\Rightarrow \quad V = \frac{4\pi a^3}{3}$ घन एकक

4. कोटी **x = 0** ते **x = 4** दरम्यान **x** –अक्षांविषयी **y = 3x / 4** या रेषांच्या **x** –अक्षांभोवती फिरवून उत्पन्न केलेल्या शंकूचे परिभ्रमणचे घनफळ शोधा.

उत्तर: आकृती वरुन, रेषा $y = 3x/4$, x –अक्षांभोवती फिरवले असता शंकू तयार होतो आणि येथे समाकलनाची मर्यादा $x = 0$ ते $x = 4$ आहे.



$\therefore \quad V = \pi \int_a^b y^2\,dx$

$\Rightarrow \quad V = 2\pi \int_0^4 \left(\frac{3x}{4}\right)^2 dx$

$\Rightarrow \quad V = \frac{9\pi}{16} \int_0^4 x^2\,dx$

$\Rightarrow \quad V = \frac{9\pi}{16} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$

$\Rightarrow \quad V = \frac{3\pi}{16} [4^3 - 0]$

$\Rightarrow \quad V = \frac{3\pi}{16} [64]$

$\Rightarrow \quad V = 12\,\pi$ घन एकक

सराव प्रश्नसंच

1) $y^2 = 8x$ आणि x –अक्षाबद्दल $x = 2$ ही रेष निश्चित करून मिळविलेले परिभ्रमणचे घनफळ शोधा.

2) $y^2 = x(x-1)^2$ची भ्रमण x-अक्षांभोवती फिरवले असता , सूत्र सांगते, तयार केलेल्या परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा.

3) कोटी $y = 0$ ते $y = x$ दरम्यान $x = 4$ या रेषांच्या x –अक्षांभोवती फिरवून उत्पन्न केलेल्या त्रिकोणाचे परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा.

4) y –अक्ष किंवा लघु अक्ष विषयी विवृत्तचे $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ च्या संपूर्ण भ्रमणद्वारे मिळवलेल्या परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा.

5) X –अक्ष विषयी विवृत्तच्या $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ च्या संपूर्ण भ्रमणद्वारे मिळवलेल्या परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा.

6) वक्र $ay^2 = x^2(a-x)$ चे भ्रमण x –अक्षच्या भोवती फिरतो, त्यामुळे तयार झालेल्या परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा

7) $X = 2$ ते $x = 4$ पर्यंतच्या अंतराल मध्ये वक्र $9x^2 - 4y^2 = 36$ च्या वक्रतेखालील क्षेत्र फिरवून प्राप्त केलेले परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा.

8) अन्वस्त (parabola) $y^2 = 4ax$, $x = 0$, $y = 0$, $x = a$ ने च्या x –अक्षांच्या भोवती फिरणाद्वारे क्षेत्र तयार होते तेव्हा परिभ्रमण घनाचे घनफळ शोधा.

निश्चित संकलनाचे उपयोजन
(Application of Definite Iintegration)
For CO / EE / EJ Group

---

1) फलाची सरासरी किंमत (Mean Value of Function): (मीन वैल्यू ऑफ़ फंक्शन)

निश्चित संकलनाचा वापर करून फलाची सरासरी किंमत काढता येते,
जर फल $y = f(x)$ चे x च्या a आणि b मधल्या कोणत्याही किमती साठी संकलन करता येत असेल तर फलाची सरासरी किंमत काढण्याचे सूत्र खालीलप्रमाणे:

$\overline{Y}$ or Y_{mean} or $Y_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

नोंद:

1. त्रिकोणमितीय फल sinx , cosx हे नियतकालिक फल असून त्यांचा कालावधी 2π आहे.
2. त्रिकोणमितीय फल sinpx , cospx हे नियतकालिक फल असून त्यांचा कालावधी $T = \frac{2\pi}{P}$ आहे.

म्हणून T कालावधीच्या नियतकालिक फलाचे सरासरी किंमत काढण्याचे सूत्र खालीलप्रमाणे:

$\overline{Y}$ or Y_{mean} or $Y_{avg} = \frac{1}{T}\int_a^b y\,dx = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\,dx$

सोडविलेली उदाहरणे

1. फल $y = 4 - x^2$, $[0,2]$साठी सरासरी किंमत काढा.

उत्तर: दिलेला फल $y = 4 - x^2$, $[0,2]$ साठी $\therefore$ a=0, b=2

$$Y_{mean} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx$$
$$= \frac{1}{2-0}\int_0^2 4 - x^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}[4\int_0^2 dx - \int_0^2 x^2 dx]$$
$$= \frac{1}{2}[4\int_0^2 dx - \int_0^2 x^2 dx]$$
$$= \frac{1}{2}\left[4x_0^2 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[8 - \frac{8}{3}\right]$$
$$= \frac{8}{3}.$$

2. फल $I = 10\sin 100\pi t$ पूर्ण कालावधी साठी सरासरी किंमत काढा.

उत्तर: दिलेले फल $I = 10\sin 100\pi t$

येथे, $p = 100\pi$

फलाचा कालावधि $T = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$

$$Y_{mean} = \frac{1}{T}\int_0^T I.dt$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{50}}\int_0^{1/50} 10.\sin(100\pi t).dt$$

$$= 500\left[\frac{-\cos(100\pi t)}{100\pi}\right]$$

$$= 500\left[\frac{-\cos(100\pi \times \frac{1}{50})}{100\pi} - \frac{-\cos 0}{100\pi}\right]$$

$$= 500\left[\frac{-\cos 2\pi}{100\pi} + \frac{1}{100\pi}\right]$$

$$= 500\left[\frac{-1}{100\pi} + \frac{1}{100\pi}\right]$$

$$= 0$$

2) फलाच्या वर्गाच्या सरासरिचे वर्गमूल (Root Mean Square value- RMS) (रुट मीन स्क्वैर वैल्यू)

जर फल $y = f(x)$ चे x च्या a आणि b मधल्या कोणत्याही किमती साठी संकलन करता येत असेल तर फलाच्या वर्गाच्या सरासरिचे वर्गमूल (RMS) काढण्याचे सूत्र खालीलप्रमाणे:

$$Y_{r.m.s.} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b y^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2 dx}$$, T कालावधीसाठी

सोडविलेली उदाहरणे

1. फल $f(x) = x^2$, $1 \le x \le 3$. साठी फलाच्या वर्गाच्या सरासरिचे वर्गमूल काढा.

उत्तर: दिलेला फल $y = f(x) = x^2$, $1 \le x \le 3$. साठी $\therefore$ a=1, b=3

$$Y_{r.m.s.} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b y^2 dx} \qquad ....(1)$$

येथे, $I = \int_1^3 y^2 dx = \int_1^3 (x^2)^2 dx$

$$= \int_1^3 x^4 dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^3$$

$$= \frac{242}{5}$$

समीकरण(1) वरून,

$$Y_{r.m.s.} = \sqrt{\frac{1}{3-1}\cdot\frac{242}{5}} = 4.92$$

2. एका पूर्ण कालावधीसाठी पर्यायी प्रवाह $i = 10\sin 50\pi t$ च्या वर्गाच्या सरासरीच्या वर्गमूळ काढा.

उत्तर: : दिलेला फल $i = 10\sin 50\pi t$

$\sin pt$ बरोबर तुलना केली तर, $p = 50\pi$

फलाचा कालावधि $T = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{50\pi} = \frac{1}{25}$

आता, $i^2 = (10\sin 50\pi t)^2 = 100\sin^2 50\pi t = 100\left(\frac{1-\cos 100\pi t}{2}\right) = 50(1-\cos 100\pi t)$

$$Y_{r.m.s.} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

येथे, $I = \int_0^{\frac{1}{25}} 50(1-COS100\pi t)dt = 50\left[t - \left(\frac{\sin 100\pi t}{100\pi}\right)\right]_0^{\frac{1}{25}}$

$$= 50\left[\left(\frac{1}{25}-0\right) - \frac{1}{100\pi}\left(\sin\left(100\pi \times \frac{1}{25}\right) - \sin 0\right)\right]$$

$$= 50\left[\frac{1}{25} - \frac{1}{100\pi}\{\sin 4\pi - \sin 0\}\right]$$

$$= 50\left(\frac{1}{25}\right) \qquad \because \sin 4\pi = \sin 0 = 0$$

हि किंमत (1) मध्ये टाकू, $Y_{r.m.s.} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{25}} \times 2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

सराव प्रश्नसंच

1) फल $y = e^x$, $0 \le x \le 5$ साठी सरासरी किंमत काढा.
2) फल $y = 3x^2 + 2x$, $0 \le x \le 2$ साठी सरासरी किंमत काढा.
3) फल $y = a\cos x + b\sin x$, $x = 0$ ते $x = \frac{\pi}{2}$ साठी सरासरी किंमत काढा.
4) एका पूर्ण कालावधीसाठी पर्यायी प्रवाह $I = 5\sin 2t$ ची सरासरी किंमत काढा.
5) फल $f(x) = x^3$, $0 \le x \le 2$. साठी फलाच्या वर्गाच्या सरासरिचे वर्गमूल काढा.
6) फल $f(x) = e^{-x}$, $[0,1]$ या श्रेणीसाठी फलाच्या वर्गाच्या सरासरिचे वर्गमूल काढा.
7) फल $I = 3\sin 2t$, $t = 0$ ते $t = \pi$ साठी फलाच्या वर्गाच्या सरासरिचे वर्गमूल काढा.
8) फल $y = a\sin pt + b\cos pt$, $t = 0$ ते $t = 2\pi$ साठी फलाच्या वर्गाच्या सरासरिचे वर्गमूल काढा
9) फल $y = a\cos pt + b\sin pt$ ला $y = r\sin(pt + \alpha)$ या रूपात व्यक्त करा आणि $t = 0$ ते $t = \frac{\pi}{p}$ साठी फलाच्या वर्गाच्या सरासरिचे वर्गमूल काढा.

घटक- 3

Unit-III

विकलक समीकरण

(डिफरेंशियल इक्वेशन)

(Differential Equation)

विकलक समीकरण संकल्पना (Concept of Diff. Eqn.)

विकलक समीकरणाची कोटिका, कोटी आणि निर्मिती

(Order, Degree & Formation of Diff. Eqn.)

विकलक समीकरणाचे निराकरण

(Solution of a Diff. Eqn.)

घटक 3 (Unit -III)
विकलक समीकरण (Differential Equation) (डिफरेंशियल इक्वेशन)

....

- विषय निष्पत्ती (Course Outcome):

प्रथम कोटिका आणि प्रथम कोटिचे विकलक समीकरण विविध पद्धती वापरुन सोडविणे,

- घटकनिष्पत्ती (Unit outcome):

अ) विविध विकलक समीकरणांची कोटिका आणि कोटि शोधणे.

ब) संबंधित अभियांत्रिकी समस्यांसाठी विविध विकलक समीकरणांचे नमुने .

क) चल विभक्त करण्याच्या (Variable Separable method) पद्धतीचा वापर करून विकलक समीकरणे सोडविणे.

ड) रेषात्मक विभेदक समीकरण (Linear Differential Equation) यांच्यावर आधारित विकलक समीकरणे सोडविणे.

इ)यथार्थ विभेदक समीकरण (Exact differential Equation) यांच्यावर आधारित विकलक समीकरणे सोडविणे .

>प्रस्तावना (Introduction):

भौतिक विज्ञान, विविध अभियांत्रिकी शाखा, भूमिती, अर्थशास्त्र, यांत्रिकी या क्षेत्रातील अनुप्रयोग समजून घेण्यासाठी गणिताचे विकलक वैशिष्ट्य म्हणजे विकलक समीकरण,

४.१ विकलक समीकरण संकल्पना (Concept of Differential Equation):

व्याख्या:

एखादे समीकरण ज्यामध्ये विकलक किंवा विकलक गुणांक यांचा समावेश आहे त्याला विकलक समीकरण म्हणतात. (D. E.)

उदाहरणार्थ: a) $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0$

b) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$

४.२ कोटिका, कोटि आणि विकलक समीकरणांची निर्मिती:

- विकलक समीकरणाची कोटिका (Order of Diff. Eqn.): (आर्डर ऑफ़ डिफरेंशियल इक्वेशन)

  दिलेल्या विकलक समीकरणात (Diff. Eqn.) विकलकाची उच्चतम कोटिका (highest order of derivative) म्हणजेच विकलक समीकरणाची कोटिका असते.

- विकलक समीकरणाची कोटि (Degree of Diff. Eqn.): (डिग्री ऑफ़ डिफरेंशियल इक्वेशन)

  दिलेल्या विकलक समीकरणात (Diff. Eqn.) विकलकाचा उच्चतम कोटिकेचा (highest order of derivative) निर्देशांक (index) म्हणजे विकलक समीकरणाची कोटि असते. मात्र सदरचे विकलक समीकरण करणी चिन्हे आणि अपूर्णांकांपासून मुक्त असले पाहिजेत.

- विकलक समीकरणाची निर्मिती (Formation of Diff. Eqn.): (फार्मेशन ऑफ़ डिफरेंशियल इक्वेशन)

  गणितीयदृष्ट्या,(Mathematically) चल संख्येशी संबंधित असलेले समीकरणात कोणत्याही स्थिरांकाचे (arbitrary constant) विलोपन (elimination) करून विकलक समीकरणाची निर्मिती (Formation of Diff. Eqn.) करता येऊ शकते.

  चल संख्येशी संबंधित असलेले समीकरणात जर एक स्थिरांक असेल तर त्या विकलक समीकरणाची कोटिका एक असते. चल संख्येशी संबंधित असलेले समीकरणात जर दोन स्थिरांक असतील तर त्या विकलक समीकरणाची कोटिका दोन असते.

सोडविलेले उदाहरणे

1) खालील विकलक समीकरणांची कोटिका आणि कोटि शोधा:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6y = 0$

उत्तर: कोटिका = 2 ; कोटि = 1

b) $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

उत्तर: कोटिका = 3 ; कोटि = 1

c) $x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y^5 = 0$

उत्तर: कोटिका = 2 ; कोटि = 2

d) $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^{3/2}$

उत्तर: दोन्ही बाजूंचे वर्ग घेऊन

$\therefore \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(y + \frac{dy}{dx}\right)^3$

$\therefore$ कोटिका = 2 ; कोटि = 2

e) $\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = k$

उत्तर: दिलेले: $\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = k$

$\Rightarrow \quad \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} = k\frac{d^2y}{dx^2}$

दोन्ही बाजूंचे वर्ग घेऊन

$\therefore \quad \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = \left(k\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

$\therefore$ कोटिका = 2 ; कोटि = 2

f) $\mathbf{\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}}$

उत्तर: दिलेले: $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$

दोन्ही बाजूंचे वर्ग घेऊन

$\therefore \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

$\therefore$ कोटिका = 2 ; कोटि = 2

g) $\mathbf{\sqrt[3]{\frac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\frac{dy}{dx}}}$

उत्तर : दिलेले: $\sqrt[3]{\frac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{\frac{dy}{dx}}$

$\therefore \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$

$\therefore$ कोटिका = 2 ; कोटि = 2

2) $\mathbf{y = mx}$ **याचे विकलक समीकरण (Diff. Eqn.) तयार करा.**

उत्तर: दिलेले: $y = mx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समीकरण (i) मध्ये एक स्थिरांक आहे. म्हणून एक वेळा विकलन (differentiate) करू.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = m$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ समीकरण (i) वरुन m ची किंमत टाकली.

$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = y$

$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} - y = 0$

3) $\mathbf{y^2 = 4ax}$ याचे विकलक समीकरण (Diff. Eqn.) तयार करा.

उत्तर : दिलेले: $y^2 = 4ax \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समीकरण (i) मध्ये एक स्थिरांक आहे. म्हणून एक वेळा विकलन (differentiate) करू.

$\therefore \quad 2y\frac{dy}{dx} = 4a$

$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$ समीकरण (i) वरून 4a ची किंमत टाकली.

$\Rightarrow \quad 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$

4) $\mathbf{x^2 = 2ay}$ याचे विकलक समीकरण (Diff. Eqn.) तयार करा.

उत्तर: दिलेले: $x^2 = 2ay \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समीकरण (i) मध्ये एक स्थिरांक आहे. म्हणून एक वेळा विकलन (differentiate) करू.

$\therefore \quad 2x = 2a\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \quad 2x = \frac{x^2}{y}\frac{dy}{dx}$ समीकरण (i) वरून 2a ची किंमत टाकली.

$\Rightarrow \quad 2y = x\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

5) $\mathbf{y = asinx + bcosx}$ याचे विकलक समीकरण (Diff. Eqn.) तयार करा.

उत्तर: दिलेले: $y = asinx + bcosx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समीकरण (i) मध्ये दोन स्थिरांक आहे. म्हणून दोन वेळा विकलन (differentiate) करू.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = acosx - bsinx$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -asinx - bcosx$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -(asinx + bcosx)$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -y$ समीकरण (i) वरून

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

6) **$y = Ae^{x} + Be^{-x}$ याचे विकलक समीकरण (Diff. Eqn.) तयार करा.**

उत्तर: दिलेले: $y = Ae^{x} + Be^{-x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समीकरण (i) मध्ये दोन स्थिरांक आहे. म्हणून दोन वेळा विकलन (differentiate) करू.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = Ae^{x} + Be^{-x}(-1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = Ae^{x} - Be^{-x}$$

तसेच $\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{x} - Be^{-x}(-1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{x} + Be^{-x}$$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y$ समीकरण (i) वरून

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$$

7) **$y = A\ \sin(3x) + B\cos(3x)$ याचे विकलक समीकरण (Diff. Eqn.) तयार करा.**

उत्तर: दिलेले: $y = A\ \sin(3x) + B\cos(3x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समीकरण (i) मध्ये दोन स्थिरांक आहे. म्हणून दोन वेळा विकलन (differentiate) करू.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = A\cos(3x)\cdot 3 + B\{-\sin(3x)\}\cdot 3$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = A\cos(3x)\cdot 3 - B\sin(3x)\cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = A\{-\sin(3x)\}\cdot 3^2 - B\cos(3x)\cdot 3^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -A\sin(3x)\cdot 9 - B\cos(3x)\cdot 9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -9\,\{A\sin(3x) + B\cos(3x)\}$$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -9\,y$ समीकरण (i) वरून

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 9\,y = 0$$

8) $\mathbf{y = a\cos(x + b)}$ याचे विकलक समीकरण (Diff. Eqn.) तयार करा.

उत्तर: दिलेले: $y = a\cos(x + b) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

समीकरण (i) मध्ये दोन स्थिरांक आहे. म्हणून दोन वेळा विकलन (differentiate) करू.

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -a\sin(x + b)$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x + b)$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -y$ समीकरण (i) वरून

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

सराव प्रश्न संच

1) खालील विकलक समीकरणांची कोटिका(Order) आणि कोटि (Degree)शोधा:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 5$

b) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}} = 0$

d) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[k + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$

2) खालील समीकरणांवरून विकलक समीकरण तयार करा.

a) $x^2 = 4ay$

b) $y = ax^2$

c) $y(1 + x^2) = a + x$

d) $y = A\cos 4x + B\sin 4x$

e) $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

f) $y = Ae^{x} + Be^{-2x}$

g) $y = Ae^{2x} + Be^{-x}$

h) $y = mx + c$

i) $y = ax^2 + b$

j) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

१.३ विकलक समीकरणाचे निराकरण (Solution of a differential equation): (सलूशन ऑफ़ डिफरेंशियल इक्वेशन)

- दिलेल्या विकलक समीकरणाचे समाधान पूर्ण करणाऱ्या समीकरणाला त्याचे उकल म्हणतात.
- प्रथम कोटिका आणि कोटि असलेले सामान्य विकलक समीकरण (Ordinary Diff. Eqn. of first order & first degree) $M\,dx + N\,dy = 0$ अश्या स्वरुपात असते. M आणि N हे चल x, y चे फल (functions) आहेत.
- चल परिवर्तन रूप: (Variable separable form) (वेरिएबल सेपरेबल फॉर्म)
- $f(x)dx + g(y)dy = 0$ अश्या स्वरुपात असलेल्या समीकरणाला चल परिवर्तन रूप (Variable separable form) असे म्हणतात आणि त्याचे उकल (solution) खालीलप्रमाणे आहे.

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

सोडविलेले उदाहरणे

1) सोडवा : $\mathbf{x\,dy - y\,dx = 0}$

उत्तर: दिलेले: $x\,dy - y\,dx = 0$

$\Rightarrow \quad x\,dy = y\,dx$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots$ चल परिवर्तन रूप (variable - separable form).

संकलन केल्यावर (Integrating),

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + c$$

$\Rightarrow \quad \log y = \log x + c$

2) सोडवा : $\mathbf{e^y \frac{dy}{dx} = x^3}$

उत्तर: दिलेले: $e^y \frac{dy}{dx} = x^3$

$\Rightarrow \quad e^y dy = x^3 dx \cdots\cdots\cdots\cdots$ चल परिवर्तन रूप

संकलन केल्यावर ,

$$\int e^y dy = \int x^3 dx + c$$

$\Rightarrow \quad e^y = \frac{x^4}{4} + C$

3) सोडवा : $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}}$

उत्तर: दिलेले: $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots$ चल परिवर्तन रूप.

संकलन केल्यावर,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

$\Rightarrow \quad \sin^{-1}y = \sin^{-1}x + c$

4) सोडवा : $\mathbf{(1+x^2)dy+(1+y^2)dx=0}$

उत्तर: दिलेले: $(1+x^2)dy+(1+y^2)dx=0$

$$\Rightarrow \quad (1+x^2)dy=-(1+y^2)dx=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{1+y^2}=-\frac{dx}{1+x^2}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{1+y^2}+\dfrac{dx}{1+x^2}$ ………… चल परिवर्तन रुप (variable - separable form).

संकलन केल्यावर (Integrating),

$$\int\frac{dy}{1+y^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=c$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}y+\tan^{-1}x=c$$

5) सोडवा : $\mathbf{\frac{dy}{dx}=e^{2x-3y}+4x^2e^{-3y}}$

उत्तर: दिलेले: $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x-3y}+4x^2e^{-3y}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=e^{2x}e^{-3y}+4x^2e^{-3y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=e^{-3y}\left(e^{2x}+4x^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{e^{-3y}}=\left(e^{2x}+4x^2\right)dx$$

$\Rightarrow \quad e^{3y}dy=(e^{2x}+4x^2)dx$ ………चल परिवर्तन रुप

संकलन केल्यावर,

$$\therefore \quad \int e^{3y}dy=\int(e^{2x}+4x^2)dx+c$$

$$\Rightarrow \quad \int e^{3y}dy=\int e^{2x}dx+\int 4x^2dx+c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{3y}}{3}=\frac{e^{2x}}{2}+4\frac{x^3}{3}+c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{3y}}{3}=\frac{e^{2x}}{2}+\frac{4x^3}{3}+c$$

6) सोडवा : $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$ if $x = \frac{\pi}{4}$ when $y = \frac{\pi}{4}$

उत्तर: दिलेले: $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x \tan y\, dx = -\sec^2 y \tan x\, dy$

$\Rightarrow \quad \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = -\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy$ ………चल परिवर्तन रूप .

संकलन केल्यावर,

$\therefore \quad \int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\, dx = \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy + c$

$\Rightarrow \quad \log(\tan x) = -\log(\tan y) + c$

$\Rightarrow \quad \log(\tan x) + \log(\tan y) = c$ ………… (i)

आता $x = \frac{\pi}{4}$ आणि $y = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \quad \log\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) + \log\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = c$

$\Rightarrow \quad \log(1) + \log(1) = c$

$\Rightarrow \quad 0 + 0 = c$

$\Rightarrow \quad c = 0$

समीकरण (i) मध्ये $c = 0$ टाकू या.

$\log(\tan x) + \log(\tan y) = 0$

सराव प्रश्न संच

प्रश्न: खालील विकलक समीकरणे सोडवा:

1) $\sin x \sin y \, dy - \cos x \cos y \, dx = 0$

2) $(1 + x^3)dy - x^2 y dx = 0$

3) $(1 + x^2)dy - x^2 y dx = 0$

4) $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$

5) $e^y \frac{dy}{dx} = x^2$

6) $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$

7) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$

8) $(y + x^2 y)\frac{dy}{dx} - (3x + xy^2) = 0$

9) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$

10) $\frac{dy}{dx} = \cos x \tan y$

A) रेखीय विकलक समीकरण (Linear Differential Equation): (लीनियर डिफरेंशियल इक्वेशन)

प्रथम कोटिका आणि प्रथम कोटि (first order & first degree) असलेले रेखीय विकलक समीकरणाचे (Linear Diff. Eqn.) सामान्य स्वरुप (General Form) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ असे आहे, जिथे P आणि Q हे x चे फल किंवा स्थिर आहेत.

रेखीय विकलक समीकरणाचे उकल (solution) खालीलप्रमाणे आहे.

$$y \cdot (I.F.) = \int Q \cdot (I.F.)dx + c$$

इथे $I.F. =$ Integrating Factor (संकलन गुणक) $= e^{\int pdx}$

सोडविलेले उदाहरणे

1) संकलन गुणक(I.F.) शोधा $\mathbf{\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x}$

उत्तर: दिलेले: $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x$

इथे $P = \sec x$

$\therefore \quad I.F. = e^{\int pdx}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\int \sec x dx}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\log(\sec x + \tan x)}$

$\Rightarrow \quad I.F. = \sec x + \tan x$

2) संकलन गुणक शोधा $\mathbf{(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1} x}}$

उत्तर: दिलेले: $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1} x}$

दोन्ही बाजूंना $(1 + x^2)$ ने भाग देऊ या,

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1 + x^2} = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2}$ रेखीय विकलक समीकरण

इथे $P = \frac{1}{1+x^2}$

$\therefore$ $I.F. = e^{\int p dx}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{\int \frac{1}{1+x^2} dx}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{\tan^{-1} x}$

3) सोडवा : $\mathbf{x\frac{dy}{dx} - y = x^2}$

उत्तर: दिलेले: $x\frac{dy}{dx} - y = x^2$

दोन्ही बाजूंना x ने भाग देऊ या,

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$ रेखीय विकलक समीकरण

इथे $P = \frac{-1}{x}$ आणि $Q = x$

$\therefore$ $I.F. = e^{\int p dx}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{\int \frac{-1}{x} dx}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{-\log(x)}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{\log(x^{-1})}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{\log\left(\frac{1}{x}\right)}$

$\Rightarrow$ $I.F. = \frac{1}{x}$

$\therefore$ रेखीय विकलक समीकरणाचे उकल (solution) खालीलप्रमाणे

$$y \cdot (I.F.) = \int Q \cdot (I.F.) dx + c$$

$\Rightarrow$ $y \cdot \frac{1}{x} = \int x \cdot \frac{1}{x} dx + c$

$\Rightarrow$ $\frac{y}{x} = \int dx + c$

$\Rightarrow$ $\frac{y}{x} = x + c$

4) सोडवा : $\mathbf{(x+1)\frac{dy}{dx} - y = e^x(x+1)^2}$

उत्तर: दिलेले: $(x+1)\frac{dy}{dx} - y = e^x(x+1)^2$

दोन्ही बाजूंना $(x+1)$ ने भाग देऊ या,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1)$$ रेखीय विकलक समीकरण

इथे $P = \frac{-1}{x+1}$ आणि $Q = e^x(x+1)$

$\therefore$ $I.F. = e^{\int p dx}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{\int \frac{-1}{x+1} dx}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{-\log(x+1)}$

$\Rightarrow$ $I.F. = e^{\log\left(\frac{1}{x+1}\right)}$

$\Rightarrow$ $I.F. = \frac{1}{x+1}$

$\therefore$ रेखीय विकलक समीकरणाचे उकल (solution) खालीलप्रमाणे

$$y \cdot (I.F.) = \int Q \cdot (I.F.)dx + c$$

$\Rightarrow$ $y \cdot \frac{1}{x+1} = \int e^x(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx + c$

$\Rightarrow$ $\frac{y}{x+1} = \int e^x dx + c$

$\Rightarrow$ $\frac{y}{x+1} = e^x + c$

5) सोडवा : $\mathbf{x\frac{dy}{dx} + y = x^3}$

उत्तर: दिलेले: $x\frac{dy}{dx} + y = x^3$

दोन्ही बाजूंना x ने भाग देऊ या,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$ रेखीय विकलक समीकरण

इथे $P = \frac{1}{x}$ आणि $Q = x^2$

$\therefore \quad I.F. = e^{\int p dx}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\log(x)}$

$\Rightarrow \quad I.F. = x$

∴ रेखीय विकलक समीकरणाचे उकल (solution) खालीलप्रमाणे

$$y \cdot (I.F.) = \int Q \cdot (I.F.) dx + c$$

$\Rightarrow \quad y \cdot x = \int x^2 \cdot x \, dx + c$

$\Rightarrow \quad xy = \int x^3 dx + c$

$\Rightarrow \quad xy = \frac{x^4}{4} + c$

6) सोडवा : $\mathbf{\sin x \frac{dy}{dx} + y\cos x = x\sin x}$

उत्तर: दिलेले: $\sin x \frac{dy}{dx} + y\cos x = x\sin x$

दोन्ही बाजूंना $\sin x$ ने भाग देऊ या,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x}{\sin x} y = \frac{x \sin x}{\sin x}$$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \cot x \; y = x$ रेखीय विकलक समीकरण

इथे $P = \cot x$ आणि $Q = x$

$\therefore \quad I.F. = e^{\int p dx}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\int \cot x \, dx}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\log(\sin x)}$

$\Rightarrow \quad I.F. = \sin x$

∴ रेखीय विकलक समीकरणाचे उकल (solution) खालीलप्रमाणे

$$y \cdot (\text{I. F.}) = \int Q \cdot (\text{I. F.})dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot \sin x = \int x \cdot \sin x \ dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot \sin x = x \int \sin x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x) \cdot \int \sin x \, dx\right\} dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot \sin x = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot \sin x = -x\cos x + \sin x + c$$

सराव प्रश्न संच

प्रश्न: खालील विकलक समीकरणे सोडवा:

1) $x\frac{dy}{dx} + y = x^2$

2) $x\frac{dy}{dx} + y = x^2e^x$

3) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1}x}$

4) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

5) $\frac{dy}{dx} + y = x^2$

6) $x\frac{dy}{dx} + y = x^2e^x$

7) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = \cos x$

8) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = \mathrm{cosec}\, x$

9 $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^X$

10 $\frac{dy}{dx} + 3y = 4\ cosx$

11 $\frac{dy}{dx} + x^2y = x$

12 $\frac{dy}{dx} + xy = cosx$

13 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$

14 $\frac{dy}{dx} + lnx\ y = 1$

15 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{cosx}y = tanx$

16 $\frac{dy}{dx} + y = 1$

17 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x$

18 $\frac{dy}{dx} + y = x^{21}$

19 $x\frac{dy}{dx} + x^2y = x^3$

20 $x\frac{dy}{dx} + xy = xsinx$

यथार्थ विकलक समीकरण : (Exact differential equation) (एक्सएक्ट डिफरेंशियल इक्वेशन)

दिलेले विकलक समीकरण Mdx + Ndy = 0 ,

येथे M आणि N हे चल x , y चे फल (functions) किंवा स्थिरांक आहेत

याला यथार्थ विकलक समीकरण म्हणतात ,जेव्हा $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

यथार्थ विकलक समीकरणाची उकल (Solution) खालीलप्रमाणे

$$\int_{y\ constant} Mdx + \int_{Terms\ of\ y\ only\ or\ constant} N\,dy = C$$

सोडविलेली उदाहरणे

1. विकलक समीकरणयथार्थआहे हे दाखवा.
   $(3x^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$

उत्तर:
दिलेले,
$(3x^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$
$M = 3x^2 - y$ आणि $N = -x$
M ला y च्या संदर्भात आंशिक विकलन (Differentiate) करू.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 - 1$$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = -1$ -----------------1

N ला x च्या संदर्भात आंशिक विकलन (Differentiate) करू.
$N = -x$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-x)$$

$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = -1$------------------2

समीकरण 1 आणि 2 वरुन

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

म्हणून दिलेले विकलक समीकरण यथार्थ आहे .

2. दिलेले विकलक समीकरण यथार्थ आहे हे दाखवा.
$(5x^4+3x^2y^2- 2xy^3) \, dx + (2x^3y - 3x^2y^2- 5y^4) \, dy = 0$
उत्तर :
दिलेले
$(5x^4+3x^2y^2- 2xy^3) \, dx + (2x^3y - 3x^2y^2- 5y^4) \, dy = 0$
$M = 5x^4+3x^2y^2- 2xy^3$ आणि $N = 2x^3y - 3x^2y^2- 5y^4$
M ला y च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(5x^4 + 3x^2y^2 - 2\text{xy}3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(5x^4) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3)$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 + 6x^2y - 6xy^2$$
$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y - 6xy^2 \quad \text{-------------}(1)$$
$N = 2x^3y - 3x^2y^2- 5y^4$
N ला x च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3\text{y} - 3x^2y^2 - 5\text{y}^4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3\text{y}) - \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(5y^4)$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y - 6xy^2 + 0$$
$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y - 6xy^2 \quad \text{----------------}(2)$$
समीकरण 1 आणि 2 वरुन
$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
म्हणून दिलेले विकलक समीकरणयथार्थआहे.

3. सोडावा: $(x^2 + 6xy - y^2) \, dx + (3x^2 - 2xy + y^2) \, dy = 0$

उत्तर :
दिलेले,
$(x^2 + 6xy - y^2) dx + (3x^2 - 2xy + y^2) dy = 0$
$M = x^2 + 6xy - y^2$ आणि $N = 3x^2 - 2xy + y^2$
M ला y च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 6\text{xy} - \text{y}^2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(6\text{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(\text{y}^3)$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 + 6x - 2y$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 2y$------------------------------(1)

N ला x च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2\text{xy} + \text{y}^2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(\text{x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\text{y}^2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6x - 2y + 0$$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 6x - 2y$ ------------------------(2)

समीकरण 1 आणि 2 वरुन

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

म्हणूनदिलेले विकलकसमीकरणयथार्थआहे .

यथार्थविकलक समीकरणाचे , उकल (Solution) खालीलप्रमाणे

$$\int Mdx + \int Ndy = c$$

येथे M चे संकलन करताना y हा स्थिरांक आहे आणि N चे संकलन करताना N मधील y आणि स्थिरांकचे संकलन करू

$$\int (x^2 + 6\text{xy} - \text{y}^2)dx + \int \text{y}^2 dy = c$$

$$\int x^2\text{dx} + \int 6\text{xydx} - \int \text{y}^2\,\text{dx} + \int \text{y}^2 dy = c$$

$$\int x^2\text{dx} + 6\text{y}\int \text{xdx} - \text{y}^2\int 1\,\text{dx} + \int \text{y}^2 dy = c$$

$\frac{x^3}{3} + 6\text{y}\frac{x^2}{2} - \text{y}^2\,\text{x} + \frac{y^3}{3} = \text{c}$

$\frac{x^3}{3} + 3\text{x}^2\text{y} - \text{x}\,\text{y}^2 + \frac{y^3}{3} = \text{c}$

4. सोडावा : (2xy+ y –tany)dx + (x^2 - x$\tan^2$y + $\sec^2$y)dy = 0

उत्तर :

दिलेले,

(2xy+ y –tany)dx + (x^2 - x$\tan^2$y $\sec^2$y)dy = 0

M = 2xy+ y – tany आणि N = x^2 - x $\tan^2$y +$\sec^2$y

M ला y च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2\text{xy} + \text{y} - \text{tany})$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2\text{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\text{y}) - \frac{\partial}{\partial y}(tany)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 1 - sec^2 y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x - tan^2 y \quad \text{----------------(1)}$$

N ला x च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}\tan^2\mathrm{y} + \sec^2\mathrm{y})$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{x}^2) - \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{x}\tan^2\mathrm{y}) + \frac{\partial}{\partial x}(\sec^2\mathrm{y})$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - \tan^2\mathrm{y} + 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - \tan^2\mathrm{y} \quad \text{------------------(2)}$$

समीकरण 1 आणि 2 वरुन\

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

म्हणूनदिलेले विकलक समीकरण यथार्थ आहे.
यथार्थ विकलक समीकरणाचे , उकल (Solution) खालीलप्रमाणे

$$\int Mdx + \int Ndy = c$$

येथे M चे संकलन करताना y हा स्थिरांक आहे आणि N चे संकलन करताना N मधील y आणि स्थिरांकचे संकलन करू

$$\int (2\mathrm{xy} + \mathrm{y} - \tan\mathrm{y})dx + \int \sec^2\mathrm{y}\, dy = c$$

$$2y\int \mathrm{xdx} + \mathrm{y}\int 1\mathrm{dx} - \tan\mathrm{y}\int 1\,\mathrm{dx} + \int \sec^2\mathrm{y}dy = c$$

$$2y\,\frac{x^2}{2} + \mathrm{xy} - \mathrm{x}\tan\mathrm{y} + \tan\mathrm{y} = \mathrm{c}$$

$$\mathrm{x^2y} + \mathrm{xy} - \mathrm{x}\tan\mathrm{y} + \tan\mathrm{y} = \mathrm{c}$$

5.सोडावा : $(y^3 \sec^2 x)\, dx + (3y^2 \tan x - \sec^2 y)\, dy = 0$

उत्तर :
दिलेले,
$(y^3 \sec^2 x)\, dx + (3y^2 \tan x - \sec^2 y)\, dy = 0$
$M = y^3 \sec^2 x$ आणि $N = 3y^2 \tan x - \sec^2 y$

M ला y च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^3\sec^2\mathrm{x})$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^3\sec^2\mathrm{x})$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2\sec^2\mathrm{x} \quad \text{-------------1}$$

N ला x च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 tanx - sec^2 y)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 tanx) - \frac{\partial}{\partial x}(sec^2 y) +$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 sec^2 x - o$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 sec^2 x \text{ --------------2}$$

समीकरण 1 आणि 2 वरुन\

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

म्हणून दिलेले विकलक समीकरण यथार्थ आहे.
दिलेले यथार्थ विकलक समीकरणाचे , उकल (Solution)खालीलप्रमाणे

$$\int Mdx + \int Ndy = c$$

येथे M चे संकलन करताना y हा स्थिरांक आहे आणि Nचे संकलन करताना N मधील y आणि स्थिरांकचे संकलन करू

$$\int (y^3 \sec^2 x)dx + \int -\sec^2 y\, dy = c$$

$$y^3 \int \sec^2 x dx - \int \sec^2 y dy = c$$

$y^3 tanx - tany = c$

6. सोडावा : (2x + 3cosy)dx + (2y - 3xsiny) dy = 0

उत्तर :
दिलेले,
(2x + 3cosy) dx + (2y - 3xsiny) dy = 0
M = 2x + 3cosy आणि N = 2y - 3xsiny

M ला y च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू

$$\frac{\partial M}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3cosy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3cosy)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 - 3siny$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3siny \text{ --------- -----------(1)}$$

N ला x च्या संदर्भात आंशिक विकलन करू

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2y - 3xsiny)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(3x\sin y)$$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -3\, siny$ $\quad \frac{\partial N}{\partial x} = -3siny$ --------------------(2)

समीकरण 1 आणि 2 वरुन

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

म्हणून दिलेले विकलक समीकरण यथार्थ आहे.

यथार्थ विकलक समीकरणाचे , उकल (Solution)खालीलप्रमाणे

$$\int Mdx + \int Ndy = c$$

येथे M चेसंकलन करताना y हा स्थिरांक आहे आणि N चे संकलन करताना N मधील y आणि स्थिरांकचे संकलन करू

$$\int (2x + 3\cos y)dx + \int 2y\ dy = c$$

$$\int (2xdx + \int 3\cos y\ dx + \int 2y\ dy = c$$

$$\int (2xdx + 3\cos y \int 1\ dx + \int 2y\ dy = c$$

$$2\frac{x^2}{2} + 3\cos y\ .x + 2\frac{y^2}{2} = c$$

$$x^2 + 3x\ \cos y + y^2 = c$$

सराव प्रश्नसंच

Q1 दिलेले विकलक समीकरण यथार्थ आहे हे दाखवा :

1. $(e^x+2xy^2+y^3)\ dx + (a^y+2x^2y+3xy^2)\ dy = 0$
2. $(3x^2+6xy^2)dx + (6x^2y+4y^2)\ dy = 0$

Q2 .खालील विकलक समीकरणे सोडवा :

1. $(2x^2+6xy-y^2)\ dx+(3x^2-2xy+y^2)dy = 0$
2. $(\sin x\ .\ \cos y + e^{2x})\ dx +(\cos x\ \sin y+ \tan y)\ dy = 0$
3. $(1+e^{\frac{x}{y}})\ dx + e^{\frac{x}{y}}\ (1- \frac{x}{y})dy = 0$
4. $(4x^3y^2 + y\cos(x.y))\ dx + (2x^4y + x\cos(xy))\ dy = 0$

१.४ ॲप्लिकेशन्स ऑफ़ डिफरेंशियल इक्वेशन एंड रिलेटेड इंजीनियरिंग प्रोब्लेम्स

(Applications of Diff. Eqn. and related Engineering Problems)

(This topic is applicable to tutorial only)

सोडविलेले उदाहरणे

1) कणाची गती $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 8$ ह्या समीकरणाद्वारे दिली जाते. तर 2 सेकंदात व्यापलेले अंतर शोधा. दिलेले $x = 0$; $t = 0$

उत्तर: दिलेले: $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 8$

$\therefore \quad dx = (3t^2 - 6t + 8)dt$

संकलन केल्यावर (Integrating),

$\Rightarrow \quad \int dx = \int (3t^2 - 6t + 8)dt$

$\Rightarrow \quad x = 3\left(\frac{t^3}{3}\right) - 6\left(\frac{t^2}{2}\right) + 8t + c$

$\Rightarrow \quad x = t^3 - 3t^2 + 8t + c$

दिलेले $x = 0$ at $t = 0$

$\therefore \quad c = 0$

$\therefore \quad x = t^3 - 3t^2 + 8t$

$\therefore$ 2 सेकंदात व्यापलेले अंतर,

$x = (2)^3 - 3(2)^2 + 8(2)$

$\Rightarrow \quad x = 12$ एकक

2) गतिविषयक नियमाला अनुसरून फिरणारी चल वस्तू $\frac{d^2x}{dt^2} = 3t^2$ या समीकरणाने दिली आहे. तर $t = 1$ आणि $v = 2$ असतांना वेग शोधा.

उत्तर: दिलेले: $\frac{d^2x}{dt^2} = 3t^2$

$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 3t^2$

$\Rightarrow \quad dv = 3t^2\, dt$

संकलन केल्यावर (Integrating),

$\therefore \int dv = \int 3t^2 dt$

$\Rightarrow \quad v = t^3 + c$

इथे $\quad t = 1, v = 2$

$\Rightarrow \quad 2 = 1 + c$

$\therefore \quad c = 1$

$\therefore \quad v = t^3 + 1$

आता $\quad t = 1$ साठी $v = 1^3 + 1$

$\Rightarrow \quad v = 2$ एकक /सेकंद

3) विमानाच्या स्थिरतेच्या सिद्धांताशी संबंधित एक समीकरण $\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{g\,.\cos\alpha - kv}$ असे आहे, इथे **v** म्हणजे वेग आहे तसेच **g** आणि **k** स्थिर आहेत. जेव्हा $\mathbf{v = 0}$; $\mathbf{t = 0}$ असेल तर त्या वेळेचा वेग काढा.

उत्तर: दिलेले: $\frac{dv}{dt} = g\,.\cos\alpha \; - \; kv$

$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \; kv = g\,.\cos\alpha$ रेखीय विकलक समीकरण

इथे $\quad P \; = \; k$ आणि $Q \; = g\,.\cos\alpha$

$\therefore \quad I.F. = e^{\int p\, dt} = e^{\int k\, dt} = e^{kt}$

$\therefore$ रेखीय विकलक समीकरणाचे उकल (solution) खालीलप्रमाणे

$v\,(I.F.) = \int Q(I.F.)dt + c$

$\Rightarrow \quad ve^{kt} = \int (g.\cos\alpha)e^{kt}dt + c$

$\Rightarrow \quad ve^{kt} = (g.\cos\alpha) \int e^{kt}dt + c$

$\Rightarrow \quad v = \frac{g}{k}\cos\alpha + ce^{-kt}$

दिलेले $\quad t = 0\,, v = 0$

$\therefore \quad 0 = \frac{g}{k}\cos\alpha + c\, e^{0}$

$\Rightarrow \quad c = -\frac{g}{k}\cos\alpha$

$\therefore \quad v = \frac{g}{k}\cos\alpha - \frac{g}{k}\cos\alpha\ e^{-kt}$

$\Rightarrow \quad v = \frac{g}{k}\cos\alpha\ (1 - e^{-kt})$

4) 6 मीटर /सेकंद वेगाने पासून सुरू होणाऱ्या कणाच्या त्वरण (acceleration) चे समीकरण $(\mathbf{1 - t^2})\mathbf{m/sec^2}$ आहे. ते प्रथम कधी विश्रांती घेणार? त्याने किती दूर प्रवास केला ?

उत्तर: दिलेले: त्वरण (acceleration) चे समीकरण $(1 - t^2)m/sec^2$

$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = 1 - t^2$

$\Rightarrow \quad dv = (1 - t^2)dt$

संकलन केल्यावर (Integrating),

$\therefore \quad \int dv = \int (1 - t^2)dt$

$\Rightarrow \quad v = t - \frac{t^3}{3} + c$

दिलेले: $v = 6$ and $t = 0 \therefore c = 6$

$\therefore \quad v = t - \frac{t^3}{3} + 6$

ज्या वेळेस वेग शून्य होणार त्या वेळेस कण विश्रांती घेणार.

$\therefore \quad t - \frac{t^3}{3} + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad t^3 - 3t - 18 = 0$

$\Rightarrow \quad (t - 3)(t^2 + 3t + 6) = 0$

$\Rightarrow \quad t = 3$ सेकंद

आता $\quad v = t - \frac{t^3}{3} + 6$

$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = t - \frac{t^3}{3} + 6 \qquad \because \quad v = \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \quad dx = \left(t - \frac{t^3}{3} + 6\right) dt$

संकलन केल्यावर (Integrating),

$\therefore \quad \int dx = \int \left(t - \frac{t^3}{3} + 6\right) dt$

$\Rightarrow \quad x = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + 6t + c_1$

प्रारंभी $x = 0, t = 0$

$\therefore \quad c_1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + 6t$

आता $t = 3$ सेकंद

$x = \frac{3^2}{2} - \frac{3^4}{12} + 6(3)$

$\Rightarrow \quad x = 15.75$ मीटर

5) रोध-धारिता परिपथ मांडणी (RC series circuit) चे विकलक समीकरण $\frac{\mathbf{dq}}{\mathbf{dt}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{RC}}\mathbf{q} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}$ असे आहे. ज्या वेळेस $\mathbf{q = 0}$; $\mathbf{t = 0}$ आणि $\mathbf{E, R, C}$ स्थिर असतील तेव्हा q चे मूल्य शोधा.

उत्तर: दिलेले: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R}$

इथे $P = \frac{1}{RC}$ and $Q = \frac{E}{R}$

$\therefore \quad I.F. = e^{\int p dx}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\int \frac{1}{RC} dt}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\frac{1}{RC}\int dt}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\frac{1}{RC} \cdot t}$

$\Rightarrow \quad I.F. = e^{\frac{t}{RC}}$

$\therefore$ रेखीय विकलक समीकरणाचे उकल (solution) खालीलप्रमाणे

$$q \cdot (I.F.) = \int Q \cdot (I.F.) dt + c_1$$

$\Rightarrow \quad q \cdot e^{\frac{t}{RC}} = \int \frac{E}{R} \cdot e^{\frac{t}{RC}} dt + c_1$

$\Rightarrow \quad q \cdot e^{\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} \cdot e^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC}} + c_1$

$\Rightarrow \quad q \cdot e^{\frac{t}{RC}} = EC \cdot e^{\frac{t}{RC}} + c_1$

जेव्हा $q = 0$ तेव्हा $t = 0$

$\therefore \quad 0 = EC + c_1$

$\Rightarrow \quad c_1 = -EC$

$\therefore \quad q \cdot e^{\frac{t}{RC}} = EC \cdot e^{\frac{t}{RC}} - EC$

$\Rightarrow \quad q = EC - \frac{EC}{e^{\frac{t}{RC}}}$

$\Rightarrow \quad q = EC - EC\, e^{\frac{-t}{RC}}$

$\Rightarrow \quad q = EC \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$

6) विद्युतप्रवाह चे समीकरण $\mathbf{L \frac{di}{dt} = 30 \sin(10\pi t)}$ असे आहे , इथे **L** प्रेरितता (inductance) आणि **t** वेळ आहे. तर विद्युतप्रवाह (i) ची किंमत काढा . दिलेले $\mathbf{L = 2}$ आणि $\mathbf{i = 0}$ जेव्हा $\mathbf{t = 0}$

उत्तर: दिलेले: $L\frac{di}{dt} = 30\sin(10\pi t)$

$\Rightarrow \quad L\, di = 30 \sin(10\pi t)\, dt$

संकलन केल्यावर (Integrating),

$\therefore \int L di = \int 30\sin(10\pi t) dt$

$\Rightarrow \quad L\, i = 30 \left(\frac{-\cos(10\pi t)}{10\pi}\right) + c$

$\Rightarrow \quad L\, i = \frac{-3\cos(10\pi t)}{\pi} + c$

$i = 0$ जेव्हा $t = 0$

$\therefore \quad L\,(0) = \frac{-3\cos(0)}{\pi} + c$

$\Rightarrow \quad 0 = \frac{-3}{\pi} + c$

$\Rightarrow \quad c = \frac{3}{\pi}$

$\therefore \quad L\,i = \frac{-3\cos(10\pi t)}{\pi} + \frac{3}{\pi}$

दिलेले $L = 2$

$\therefore \quad 2i = \frac{-3\cos(10\pi t)}{\pi} + \frac{3}{\pi}$

$\Rightarrow \quad i = \frac{3}{2\pi}\{1 - \cos(10\pi t)\}$

7) तुळई (Beam) चे नमन आघुर्ण (Bending Moment) दोन्ही टोकांवर समर्थित आणि एका टोकापासून x अंतरावर एकसारखेपणाने भरीव आहे. त्याचे समीकरण जर $\frac{\mathbf{dM}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{WL}}{\mathbf{2}} - \mathbf{Wx}$ असे असेल जिथे W प्रति एकक लांबी तुळई चे भार आहे तर बीमचा नमन आघुर्ण M शोधा.

उत्तर: दिलेले: $\frac{dM}{dx} = \frac{WL}{2} - Wx$

$\Rightarrow \quad dM = \left(\frac{WL}{2} - Wx\right)dx$

संकलन केल्यावर (Integrating),

$\therefore \quad \int dM = \int \left(\frac{WL}{2} - Wx\right) dx$

$\Rightarrow \quad M = \frac{WL}{2}\int dx - W\int x^2 dx$

$\Rightarrow \quad M = \frac{WL}{2}\cdot x - W\cdot\frac{x^2}{2} + c$

जेव्हा $M = 0$; $x = 0$

$\therefore \quad c = 0$

$\therefore \quad M = \frac{WL}{2}\cdot x - \frac{Wx^2}{2}$

8) v सेमी / सेकंदासह क्षितिज समांतर(horizontally) प्रवास करणाऱ्या वायुवाहन (air-craft) ने विकसित केलेली अश्वशक्ति (horse–power) शोधा जर $\frac{\mathbf{dH}}{\mathbf{dv}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{550}}\left\{\mathbf{T} - \frac{\mathbf{2wv}}{\mathbf{g}}\right\}$, इथे T, k , w, g स्थिर आहेत.

उत्तर: दिलेले: $\frac{dH}{dv} = \frac{k}{550}\left\{T - \frac{2wv}{g}\right\}$

$\Rightarrow \quad dH=\frac{k}{550}\left\{T - \frac{2wv}{g}\right\}dv$

संकलन केल्यावर (Integrating),

$\therefore \quad \int dH = \frac{k}{550}\int\left(T - \frac{2wv}{g}\right)dv$

$\Rightarrow \quad H = \frac{k}{550}\left\{T\int dv - \frac{2w}{g}\int vdv\right\}$

$\Rightarrow \quad H = \frac{k}{550}\left\{Tv - \frac{2w}{g}\cdot\frac{v^2}{2}\right\} + c$

$\Rightarrow \quad H = \frac{k}{550}\left\{Tv - \frac{w\,v^2}{g}\right\} + c$

आता $H = 0$ at $V = 0$

$\therefore \quad c = 0$

$\therefore \quad H = \frac{k}{550}\left\{Tv - \frac{w\,v^2}{g}\right\}$

Unit-IV

(न्यूमेरिकल मेथड्स)

(Numerical Methods)

(सलूशन ऑफ़ अलजेब्रिक इक्वेशन)

(Solution of Algebraic equations)

(सलूशन ऑफ़ सायमलटेनिअस इक्वेशन)

(Solution of simultaneous equations)

(Unit IV)

संख्यात्मक पद्धती (Numerical Methods) (न्यूमेरिकल मेथड्स)

CO4 - प्रोग्राम विशिष्ट समस्या सोडवण्यासाठी संख्यात्मक पद्धती वापरा.

* सैद्धांतिक शिक्षण परिणाम (Theory learning outcome)

A) योग्य पद्धती द्वारे बीजगणितीय समीकरणांची मुळे शोधा

B) पुनरावृत्तीच्या पद्धतींद्वारे अज्ञात समीकरण तीन प्रणाली मध्ये सोडवा.

C) बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत वापरून अंदाजे वर्गमुळ समस्या सोडवा (IKS)

* ओळख : बैजिक समीकरणांचे निराकरण करण्यासाठी संख्यात्मक पद्धती *(Numerical Methods)* उपयुक्त आहेत. पद्धती व पुनरावृत्ती (Iterative Methods) सर्व प्रणाली मध्ये वापरल्या जातात.

F(x) = 0 या स्वरूपाच्या अभिव्यक्तीला बीजगणित समीकरण म्हणतात. अधिक अचूक निराकरण करण्यासाठी या अंदाजे पद्धती (Approximate methods) वापरल्या जातात.

* या अध्यायात आपण अंदाजे निराकरण मिळवण्यासाठी खालील पद्धतीबद्दल चर्चा करणार आहोत

1) बैजिक समीकरणाचे (Algebraic Equation) निराकरण

2) एकसामायिक समीकरणाचे (Simultaneous Equations) निराकरण

४.१ (सलूशन ऑफ़ अलजेब्रिक इक्वेशन) (Solution of Algebraic Equations):

बैजिक समीकरणाचे (algebraic equations) निराकरण करण्यासंदर्भात खालील पद्धतीं उपयुक्त आहेत.

- ❖ दुभाजन पद्धत(Bisection Method)
- ❖ रेग्युला फाल्सी पद्धत (Regula – Falsi method)
- ❖ न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton – Raphson method)

A) दुभाजन पद्धत (Bisection Method): (बायसेक्शन मेथड)

दुभाजन पद्धत (Bisection Method) ही पुनरावृत्ती करण्याची पद्धत (iterative method) आहे जी बैजिक समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधण्यासाठी वापरली जाते. जर $f(x)$ हे $[a, b]$ या मध्यांतरात (interval) अविरत (continuous) असेल आणि जर $f(a)$ आणि $f(b)$ यांची चिन्हे विरुद्ध असतील तर $f(x) = 0$ या समीकरणाचे कमीतकमी एक वास्तविक उकल (real root) हे a आणि b च्या दरम्यान असेल. या प्रमेयला‘ चाचणी व त्रुटी ”पद्धत (‘ Trial आणि Error ‘method) असेही म्हणतात.

➢ निराकरण शोधण्याची पद्धत (Method to find Solution):

जर $f(x)$ हे $[a, b]$ या मध्यांतरात (interval) संतत फल (continuous function) असेल आणि $f(a)$ आणि $f(b)$ यांची चिन्हे विरुद्ध असतील i.e. $f(a).f(b)) < 0$ तर प्रारंभिक अंदाज पुढील $x_0 = \frac{a+b}{2}$ या सूत्रानुसार घ्यावा.

पुढील मुद्द्यांची नोंद घ्या :

a) जर $f(x_0) = 0$ तर आपल्याला x_0 हे उकल (root) मिळेल.

b) जर $f(a)) \cdot f(x_0) < 0$ तर उकल (root) हे a आणि x_0 च्या दरम्यान असेल.

$\therefore \quad x_1 = \frac{a + x_0}{2}$ आणि नंतर मध्यांतर पुन्हा थांबवून प्रक्रियेची पुनरावृत्ती करा.

c) जर $f(b) \cdot f(x_0) < 0$ तर उकल (root) हे b आणि x_0 च्या दरम्यान असेल.

$\therefore \quad x_1 = \frac{b + x_0}{2}$ आणि नंतर मध्यांतर पुन्हा थांबवून प्रक्रियेची पुनरावृत्ती करा.उकल (root) इच्छित अचूकतेपर्यंत आढळत नाही तोपर्यंत प्रक्रिया सुरू ठेवा.

सोडवलेली उदाहरणे

1) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $\mathbf{x^2 - x - 4 = 0}$ या समीकरणाचे उकल (root) शोधा.(तीन वेळा पुनरावृत्ती करा).

उत्तर: इथे $f(x) = x^2 - x - 4$

$\therefore \quad f(0) = 0 - 0 - 4 = -4 < 0$

$f(1) = 1 - 1 - 4 = -4 < 0$

$f(2) = 4 - 2 - 4 = -2 < 0$

$f(3) = 9 - 3 - 4 = 2 > 0$

$\because \quad f(2) < 0$ आणि $f(3) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल(root) 3 आणि 2 दरम्यान दरम्यान असेल.

$\therefore$ पहिले निकटन (approximation),

$x_0 = \frac{2 + 3}{2}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_0 = 2.5}$

तसेच, $f(2.5) = (2.5)^2 - (2.5) - 4 = -0.25 < 0$

$\because \quad f(2.5) < 0$ आणि $f(3) > 0$ $\therefore$

चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल 2.5 आणि 3 दरम्यान असेल.

∴ दूसरे निकटन (approximation) ,

$x_1 = \frac{2.5 + 3}{2}$

⟹ $\mathbf{x_1 = 2.75}$

तसेच, $f(2.75) = (2.75)^2 - (2.75) - 4 = 0.81 > 0$

∵ $f(2.5) < 0$ आणि $f(2.75) > 0$

∴ चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल 2.5 आणि 2.75 दरम्यान असेल.

∴ तिसरे निकटन (approximation),

$x_2 = \frac{2.5 + 2.75}{2}$

⟹ $\mathbf{x_2 = 2.63}$

∴ दिलेल्या समीकरणाचे अंदाजे उकल (approximate root) आहे $\mathbf{x = 2.63}$

2) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करुन $\mathbf{x^3 - 2x - 5 = 0}$ या समीकरणाचे उकल (root) मध्यांतर $(\mathbf{2, 3})$ शोधा.(तीन वेळा पुनरावृत्ती करा).

उत्तर: इथे $f(x) = x^3 - 2x - 5$

∴ $f(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$

$f(3) = 27 - 6 - 5 = 16 > 0$

∵ $f(2) < 0$ आणि $f(3) > 0$

∴ चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल 2 आणि 3 दरम्यान असेल .

∴ पहिले निकटन (approximation),

$x_0 = \frac{2 + 3}{2}$

⟹ $\mathbf{x_0 = 2.5}$

तसेच, $f(2.5) = (2.5)^3 - 2(2.5) - 5 = 5.625 > 0$

$\because$ $f(2) < 0$ आणि $f(2.5) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल 2 आणि 2.5 दरम्यान असेल.

$\therefore$ दूसरे निकटन (approximation),

$x_1 = \frac{2 + 2.5}{2}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x_1 = 2.25}$

तसेच, $f(2.25) = (2.25)^3 - 2(2.25) - 5 = 1.891 > 0$

$\because$ $f(2) < 0$ आणि $f(2.25) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल 2 आणि 2.25 दरम्यान असेल.

$\therefore$ तिसरे निकटन (approximation),

$x_2 = \frac{2 + 2.25}{2}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x_2 = 2.125}$

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणाचे अंदाजे उकल (approximate root) आहे $\mathbf{x = 2.125}$

3) **दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $\sqrt{10}$ चे मूल्य तीन पुनरावृत्ती करून माहित करा.**

उत्तर: इथे $x = \sqrt{10}$ $\therefore$ $x^2 = 10$

$\Rightarrow$ $x^2 - 10 = 0$

$\because$ $f(x) = x^2 - 10$

$\therefore$ $f(0) = 0 - 10 = -10 < 0$

$f(1) = 1 - 10 = -9 < 0$

$f(2) = 4 - 10 = -6 < 0$

$f(3) = 9 - 10 = -1 < 0$

$f(4) = 16 - 10 = 6 > 0$

$\because$ $f(3) < 0$ आणि $f(4) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल 3 आणि 4 दरम्यान असेल.

$\therefore$ पहिले निकटन (approximation),

$$x_0 = \frac{3+4}{2}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x_0 = 3.5}$

तसेच, $f(3.5) = (3.5)^2 - 10 = 2.25 > 0$

$\because$ $f(3) < 0$ आणि $f(3.5) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल 3 आणि 3.5 दरम्यान असेल.

$\therefore$ दूसरे निकटन (approximation),

$$x_1 = \frac{3+3.5}{2}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x_1 = 3.25}$

तसेच, $f(3.25) = (3.25)^2 - 10 = 0.5625 > 0$

$\because$ $f(3) < 0$ आणि $f(3.25) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी (trial and error method) पद्धतीनुसार उकल 3 आणि 3.25 दरम्यान असेल.

$\therefore$ तिसरे निकटन (approximation),

$$x_1 = \frac{3+3.25}{2}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x_1 = 3.125}$

$\therefore$ $\sqrt{10}$ चे अंदाजे उकल (approximate root) आहे $\mathbf{x = 3.125}$

सराव प्रश्नसंच

1) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $x^3 - 2x - 5 = 0$ या समीकरणाचे उकल (root) शोधा.(तीन वेळा पुनरावृत्ती करा)

2) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $x^3 - 4x - 9 = 0$ या समीकरणाचे उकल (root) शोधा.(तीन वेळा पुनरावृत्ती करा)

3) दुभाजनपद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $x^3 - 5x + 1 = 0$ या समीकरणाचे उकल (root) शोधा.(तीन वेळा पुनरावृत्ती करा)

4) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $x^3 - 9x - 1 = 0$ या समीकरणाचे उकल (root) शोधा.(तीन वेळा पुनरावृत्ती करा)

5) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $x^3 - 6x + 3 = 0$ या समीकरणाचे उकल (root) शोधा.(तीन वेळा पुनरावृत्ती करा)

6) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $x^3 + x - 3 = 0$ या समीकरणाचे उकल (root) शोधा.(तीन वेळा पुनरावृत्ती करा)

7) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $\sqrt{18}$ चे मूल्य तीन पुनरावृत्ती करून माहित करा.

8) दुभाजन पद्धतीचा (Bisection method) वापर करून $\sqrt{8}$ चे मूल्य तीन पुनरावृत्ती करून माहित करा.

B) रेग्युला फाल्सी पद्धत (Regula Falsi Method)

रेग्युला फाल्सी-पध्दतीस (Regula Falsi Method) खोटी स्थिती (false position) म्हणून ओळखले जाते कारण वक्रांची खोटी स्थिती (false position of curve) प्रारंभिक अंदाजे म्हणून घेतली जाते ही पुनरावृत्ती करण्याची पद्धत (iterative method) आहे. या पद्धतीच्या अचूकतेचे दर दुभाजनपद्धतीपेक्षा (Bisection method) बरेच वेगवान आहेत.

$f(x) = 0$ हे समीकरण विचारात घ्या जिथे $f(x)$ हे $[a, b]$ या मध्यांतरात (interval) संतत फल (continuous function) असेल आणि $f(a)$ आणि $f(b)$ यांची चिन्हे विरुद्ध असतील.

i.e. $f(a).f(b) < 0$ तर,

प्रारंभिक अंदाज पुढील सूत्रानुसार घ्यावा,

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$f(x_1)$ चे मूल्य शोधा आणि जर $f(a).f(x_1) < 0$ तर $b = x_1$ घ्या.

$$x_2 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

आणि जर $f(b).f(x_1) < 0$ तर $a = x_1$ घ्या.

$$x_2 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$ वगैरे वगैरे.

उकल (root) इच्छित अचूकतेपर्यंत आढळत नाही तोपर्यंत प्रक्रिया सुरू ठेवा.

सोडवलेली उदाहरणे

1) रेग्युला फाल्सी पध्दतीचा (Regula falsi method) वापर करून $\mathbf{x^3 - x - 1 = 0}$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा (तीन वेळा पुनरावृत्ती करा).

उत्तर: इथे $f(x) = x^3 - x - 1$

$\therefore$ $f(0) = 0 - 0 - 1 = -1 < 0$

$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$

$f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$

$\because$ $f(1) < 0$ आणि $f(2) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी पद्धतीने (trial आणि error method) उकल (root) 1 आणि 2 च्या दरम्यान आहे.

$\therefore$ प्रारंभिक अंदाजे साठी (initial approximation) विचारात घ्या

$a = 1$ आणि $b = 2$

$\therefore$ रेग्युला फाल्सी पद्धतीने (Regula falsi method) ,

प्रथम निकटन (first approximation),

$$x_1 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1(5) - 2(-1)}{5 - (-1)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1.1666$$

आता $f(1.1666) = 1.1666^3 - 1.1666 - 1 = -0.5789 < 0$

$\therefore$ उकल (Root) हे 1.1666 आणि 2 च्या दरम्यान आहे

$\therefore$ रेग्युला फाल्सी पद्धतीने (Regula falsi method) ,

द्वितीय निकटन (second approximation),

$$x_2 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1.1666(5)\ - 2\,(-0.5789)}{5 - (-0.5789)}$

$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{6.9908}{5.5789}$

$\Rightarrow \quad x_2 = 1.2530$

आता $f(1.2530) = 1.2530^3 - 1.2530 - 1 = -0.2857 < 0$

∴ उकल (Root) हे 1.2530 आणि 2 च्या दरम्यान आहे

∴ रेग्युला फाल्सी पद्धतीने तिसरे निकटन (third approximation),

$$x_3 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{1.2530(5) - 2(-0.2857)}{5 - (-0.2857)}$

$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{6.8364}{5.2857}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 1.2934$

∴ दिलेल्या समीकरणाचे अंदाजे उकल $\mathbf{x = 1.2934}$ आहे.

2) रेग्युला फाल्सी पध्दतीचा (Regula falsi method) वापर करून $\mathbf{x^2 + x - 3 = 0}$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. (केवळ तीन पुनरावृत्ती (iterations) करा).

उत्तर: इथे $f(x) = x^2 + x - 3 = 0$

∴ $f(0) = 0^2 + 0 - 3 = -3 < 0$

$f(1) = 1^2 + 1 - 3 = -1 < 0$

$f(2) = 2^2 + 2 - 3 = 3 > 0$

∵ $f(1) < 0$ आणि $f(2) > 0$

∴ चाचणी आणि त्रुटी पद्धतीने (trial and error method) उकल (root) 1 आणि 2 च्या दरम्यान आहे.

∴ प्रारंभिक अंदाजे साठी (initial approximation)विचारात घ्या,

$a = 1$ आणि $b = 2$

∴ रेग्युला फाल्सी पद्धतीने (Regula falsi method) ,

प्रथम निकटन (first approximation) आहे,

$$x_1 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1(3) - 2(-1)}{3 - (-1)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1.25$$

$$f(1.25) = 1.25^2 + 1.25 - 3 = -0.188 < 0$$

∴ उकल (Root) हे 1.25 आणि 2 च्या दरम्यान आहे

∴ रेग्युला फाल्सी पद्धतीने (Regula falsi method),

द्वितीय निकटन (second approximation) आहे,

$$x_2 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1.25(3) - 2(-0.188)}{3 - (-0.188)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{4.1276}{3.188}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1.2942$$

आता $f(1.2942) = 1.2942^2 + 1.2942 - 3 = -0.032 < 0$

∴ उकल (Root) हे 1.2942 आणि 2 च्या दरम्यान आहे

∴ रेग्युला फाल्सी पद्धतीने (Regula falsi method),

तिसरे निकटन (third approximation) आहे,

$$x_3 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = \dfrac{1.2942(3) - 2(-0.032)}{3 - (-0.032)}$

$\Rightarrow \quad x_3 = \dfrac{3.9466}{3.032}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 1.3016$

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणाचे अंदाजे उकल $\mathbf{x = 1.3016}$ आहे.

3) चुकीची स्थिती पद्धत (false position method) वापरुन दोन पुनरावृत्ती करून, $(\mathbf{3,4})$ या मध्यांतरात $\sqrt{\mathbf{12}}$ चे अंदाजे मूल्य शोधा.

उत्तर: इथे $x = \sqrt{12}$

$\therefore \quad x^2 = 12$

$\Rightarrow \quad f(x) = x^2 - 12$

$\therefore \quad f(3) = 3^2 - 12 = -3 < 0$

$f(4) = 4^2 - 12 = 4 > 0$

$\because \quad f(3) < 0$ आणि $f(4) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी पद्धतीने (trial & error method) उकल (root) 3 आणि 4 च्या दरम्यान आहे.

$\therefore$ प्रारंभिक अंदाजे साठी (initial approximation) $a = 3$ आणि $b = 4$ विचारात घ्या.

$\therefore$ रेग्युला फाल्सी पद्धतीने (Regula falsi method) ,

प्रथम निकटन (first approximation),

$$x_1 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{3(4) - 4(-3)}{4 - (-3)}$

$\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{24}{7}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 3.4285$

आता $\quad f(3.4285) = (3.4285)^2 - 12 = -0.2453 < 0$

$\therefore$ उकल (Root) हे 3.4285 आणि 4 च्या दरम्यान आहे

$\therefore$ रेग्युला फाल्सी पद्धतीने (Regula falsi method) ,

द्वितीय निकटन (second approximation),

$$x_2 = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{3.4285(4) - 4(-0.2453)}{4 - (-0.2453)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{14.6952}{4.2453}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 3.4615$$

$\therefore$ $\sqrt{12}$ चे अंदाजे मूल्य $\mathbf{x = 3.4615}$ आहे.

सराव प्रश्नसंच

1) रेग्युला फाल्सी पध्दतीचा (Regula falsi method) वापर करून $x^2 + x - 3 = 0$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. (केवळ तीन पुनरावृत्ती (iterations) करा)
2) रेग्युला फाल्सी पध्दतीचा (Regula falsi method) वापर करून $x^3 - 9x + 1 = 0$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. (केवळ तीन पुनरावृत्ती (iterations) करा)
3) दोन पुनरावृत्ती (two iterations) करून $x^3 - x - 4 = 0$ समीकरणाचे उकल शोधण्यासाठी चुकीची स्थिती पद्धत (false position method) वापरा .
4) तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करून $x^3 - 4x + 1 = 0$ समीकरणाचे उकल शोधण्यासाठी चुकीची स्थिती पद्धत (false position method) वापरा .
5) तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करून $x^3 - 2x - 5 = 0$ समीकरणाचे उकल शोधण्यासाठी चुकीची स्थिती पद्धत (false position method) वापरा .
6) तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करून $x^3 + 2x^2 - 8 = 0$ समीकरणाचे उकल शोधण्यासाठी चुकीची स्थिती पद्धत (false position method) वापरा .
7) तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करून $x^3 - 3x + 4 = 0$ समीकरणाचे उकल शोधण्यासाठी चुकीची स्थिती पद्धत (false position method) वापरा .
8) रेग्युला फाल्सी पध्दतीचा (Regula falsi method) वापर करून $x^2 - 2x - 1 = 0$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. (केवळ तीन पुनरावृत्ती (iterations) करा)
9) रेग्युला फाल्सी पध्दतीचा (Regula falsi method) वापर करून $x^2 - 2x - 5 = 0$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा.(केवळ तीन पुनरावृत्ती (iterations) करा).
10) रेग्युला फाल्सी पध्दत Regula- Falsi method) वापरुन, दोन पुनरावृत्ती करून $\sqrt{6}$ चे अंदाजे मूल्य शोधा.

C) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton Raphson method)

आयझॅक न्यूटन (Isaac Newton) आणि जोसेफ रॅफसन (Joseph Raphson) यांच्या नावावर असलेली न्यूटन -रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) ही संख्यात्मकरीत्या समीकरणे सोडविण्याचे सामर्थ्यवान तंत्र आहे. ही पद्धत पुनरावृत्तीची(iterative method) आहे. एखाद्या समीकरणाचे अंदाजे उकल आपल्याला माहित असल्यास आपण त्याच्यापासून अधिक चांगले आणि जवळचे मूल्य शोधू शकतो.

जर $f(x)$ हे $a < x < b$ या मध्यांतरात अविरत (continuous) असेल, तसेच $f(a)$ आणि $f(b)$ ची चिन्हे विरुद्ध असतील तर $f(x) = 0$ या समीकरणाचे उकल (root) हे (a, b) या मध्यांतर असेल. $f(a)$ शून्याच्या अधिक जवळ असल्यास x_0 म्हणून a चा विचार करा किंवा $f(b)$ शून्याच्या अधिक जवळ असल्यास x_0 म्हणून b चा विचार करा ,नंतर पुढील सूत्र वापरा,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0,1,2,3 \ldots \ldots \ldots$$

पुढील अंदाजे मूल्य शोधण्यासाठी $x_{1,}\ x_{2\,,} x_3 \ldots \ldots ..$

सोडवलेली उदाहरणे

1) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $\mathbf{x^3 - 5x + 3 = 0}$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. [केवळ तीन पुनरावृत्ती(three iterations) करा]

उत्तर: समजा $f(x) = x^3 - 5x + 3 \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 5 \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

$\therefore \quad f(0) = 0 - 0 + 3 = 3 > 0$

$f(1) = 1^3 - 5(1) + 3 = -1 < 0$

$\because$ $f(0) > 0$ आणि $f(1) < 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी पद्धतीने(trial and error method) उकल (root) 0 आणि 1 च्या दरम्यान आहे.

प्रारंभिक अंदाजे $x_0 = 1$ असू द्या ,

इथे $f(1) = -1$आणि $f'(x_0) = f'(1) = 3(1)^2 - 5 = -2$

$\therefore$ न्यूटन नेरॅफसन पद्धती-(Newton-Raphson method) प्रथम निकटन (first approximation) आहे,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 - \frac{-1}{-2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1.5 - 0.5$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = 0.5}$$

आता समीकरण (i) आणि (ii) वरुन,

$$f(x_1) = f(0.5) = (0.5)^3 - 5(0.5) + 3 = 0.625$$

$$f'(x_1) = f'(0.5) = 3(0.5)^2 - 5 = -4.25$$

$\therefore$ द्वितीय निकटन (second approximation) आहे,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 0.5 - \frac{0.625}{-4.25}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 0.5 + 0.1471$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x_2 = 0.6470}$$

आता समीकरण (i) आणि (ii) वरून,

$f(x_2) = f(0.6470) = (0.6470)^3 - 5(0.6470) + 3 = 0.0358$

$f'(x_2) = f'(0.6470) = 3(0.6470)^2 - 5 = -3.744$

∴ तिसरे निकटन (third approximation) आहे,

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 0.6470 - \frac{f(0.6470)}{f'(0.6470)}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 0.6470 - \frac{0.0358}{-3.744}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 0.6470 + 0.0096$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_3 = 0.6566}$

∴ दिलेल्या समीकरणाचे अंदाजे उकल $\mathbf{x = 0.6566}$ हे आहे.

2) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $\mathbf{x^4 - x - 9 = 0}$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. [केवळ तीन पुनरावृत्ती(three iterations) करा]

उत्तर: समजा $f(x) = x^4 - x - 9 \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

∴ $f'(x) = 4x^3 - 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

∴ $f(0) = 0 - 0 - 9 = 3 < 0$

$f(1) = 1^4 - 1 - 9 = -9 < 0$

$f(2) = 2^4 - 2 - 9 = 5 > 0$

∵ $f(1) < 0$ आणि $f(2) > 0$

∴ चाचणी आणि त्रुटी पद्धतीने(trial and error method) उकल (root) 1 आणि 2 च्या दरम्यान आहे.

प्रारंभिक अंदाजे $x_0 = 2$ असू द्या ,

इथे $f(2) = 5$ आणि $f'(x_0) = f'(2) = 4(2)^3 - 1 = 31$

∴ न्यूटन रॅफसन पद्धतीने-(Newton-Raphson method) प्रथम निकटन (first approximation) आहे,

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

⟹ $x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}$

⟹ $x_1 = 2 - \frac{5}{31}$

⟹ $x_1 = 2 - 0.1612$

⟹ $\mathbf{x_1 = 1.8387}$

आता समीकरण (i) आणि (ii) वरून,

$f(x_1) = f(1.8387) = (1.8387)^4 - 1.8387 - 9 = 0.5912$

$f'(x_1) = f'(1.8387) = 4(1.8387)^3 - 1 = 23.8652$

∴ द्वितीय निकटन (second approximation) आहे,

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

⟹ $x_2 = 1.8387 - \frac{f(1.8387)}{f'(1.8387)}$

⟹ $x_2 = 1.8387 - \frac{0.5912}{23.8652}$

⟹ $x_2 = 1.8387 - 0.0247$

⟹ $\mathbf{x_2 = 1.8139}$

आता समीकरण (i) आणि (ii) वरून,

$f(x_2) = f(1.8139) = 1.8139\ 4 - 1.8139 - 9 = 0.0117$

$f'(x_2) = f'(1.8139) = 4(1.8381)^3 - 1 = 22.8726$

∴ तिसरे निकटन (third approximation) आहे,

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 1.8139 - \frac{f(1.8139)}{f'(1.8139)}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 1.8139 - \frac{0.0117}{22.8726}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 1.8139 - 0.0005$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_3 = 1.8133}$

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणाचे अंदाजे उकल $\mathbf{x = 1.8133}$ हे आहे.

3) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $\mathbf{x^3 - x - 1 = 0}$ समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. [केवळ तीन पुनरावृत्ती(three iterations) करा]

उत्तर: समजा $f(x) = x^3 - x - 1 \cdots\cdots\cdots (i)$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 1 \cdots\cdots\cdots (ii)$

$\therefore \quad f(0) = 0 - 0 - 1 = -1 < 0$

$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$

$f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0$

$\because \quad f(1) < 0$ आणि $f(2) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी पद्धतीने(trial and error method) उकल (root) 1 आणि 2 च्या दरम्यान आहे.

प्रारंभिक अंदाजे $x_0 = 1$ असू द्या,

इथे $f(1) = -1$ आणि $f'(x_0) = f'(1) = 3(1)^2 - 1 = 2$

$\therefore$ न्यूटन रॅफसन पद्धतीने-(Newton-Raphson method) प्रथम निकटन (first approximation) आहे,

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 1 - \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \quad x_1 = 1 + 0.5$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = 1.5}$

आता समीकरण (i) आणि (ii) वरून,

$f(x_1) = f(1.5) = 1.5^3 - 1.5 - 1 = 0.875$

$f'(x_1) = f'(1.5) = 3(1.5)^2 - 1 = 5.75$

$\therefore$ द्वितीय निकटन (second approximation) आहे,

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$\Rightarrow \quad x_2 = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)}$

$\Rightarrow \quad x_2 = 1.5 - \frac{0.875}{5.75}$

$\Rightarrow \quad x_2 = 1.5 - 0.1521$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_2 = 1.3478}$

आता समीकरण (i) आणि (ii) वरून,

$f(x_2) = f(1.3478) = 1.3478^3 - 1.3478 - 1 = 0.1005$

$f'(x_2) = f'(1.3478) = 3(1.3478)^2 - 1 = 4.4496$

$\therefore$ तिसरे निकटन (third approximation) आहे,

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 1.3478 - \frac{f(1.3478)}{f'(1.3478)}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 1.3478 - \frac{0.1005}{4.4496}$

$\Rightarrow \quad x_3 = 1.3478 - 0.0225$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_3 = 1.3252}$

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणाचे अंदाजे उकल $\mathbf{x = 1.3252}$ हे आहे.

4) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) $\sqrt[3]{\mathbf{100}}$ चे अंदाजे उकल शोधा.

(केवळ तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करा)

उत्तर: समजा $x = \sqrt[3]{100}$

$\therefore \quad x^3 = 100$

$\therefore \quad f(x) = x^3 - 100 \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (ii)$

$\therefore \quad f(0) = 0 - 100 = -100 < 0$

$f(1) = 1^3 - 100 = -99 < 0$

$f(2) = 2^3 - 100 = -92 < 0$

$f(3) = 3^3 - 100 = -73 < 0$

$f(4) = 4^3 - 100 = -36 < 0$

$f(5) = 5^3 - 100 = 25 > 0$

$\because \quad f(4) < 0$ आणि $f(5) > 0$

$\therefore$ चाचणी आणि त्रुटी पद्धतीने(trial and error method) उकल (root) 4 आणि 5 च्या दरम्यान आहे.

प्रारंभिक अंदाजे $x_0 = 5$ असू द्या,

इथे $f(5) = 25$ आणि $f'(x_0) = f'(5) = 3(5)^2 = 75$

$\therefore$ न्यूटन रॅफसन पद्धतीने-(Newton-Raphson method) प्रथम निकटन (first approximation) आहे,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 5 - \frac{f(5)}{f'(5)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 5 - \frac{25}{75}$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 5 - 0.3333$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_1 = 4.666}$

आता समीकरण (i) आणि (ii) वरुन,

$f(x_1) = f(4.6666) = 4.6666^3 - 100 = 1.6252$

$f'(x_1) = f'(4.6666) = 3(4.6666)^2 = 65.3314$

∴ द्वितीय निकटन (second approximation) आहे,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 4.6666 - \frac{f(4.6666)}{f'(4.6666)}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 4.6666 - \frac{1.6252}{65.3314}$$

$\Rightarrow \quad x_2 = 4.6666 - 0.0248$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_2} = 4.6417$

आता समीकरण (i) आणि (ii) वरुन,

$f(x_2) = f(4.6417) = 4.6417^3 - 100 = 0.0071$

$f'(x_2) = f'(4.6417) = 3(4.6417)^2 = 64.6361$

∴ तिसरे निकटन (third approximation) आहे,

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 4.6417 - \frac{f(4.6417)}{f'(4.6417)}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = 4.6417 - \frac{0.0071}{64.6361}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = 4.6417 - 0.0001$

$\Rightarrow \quad \mathbf{x_3} = 4.6416$

∴ $\sqrt[3]{100}$ चे अंदाजे उकल आहे $\mathbf{x = 4.6416}$

सराव प्रश्नसंच

1) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $x^2 + x - 5 = 0$ या समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा.(केवळ तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करा)
2) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $x^3 + x - 1 = 0$ या समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा.(तीन पुनरावृत्ती केवळ (three iterations) करा)
3) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $x^3 - 4x - 9 = 0$ या समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. (केवळ तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करा)
4) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $x^3 - 4x + 1 = 0$ या समीकरणाचे अंदाजे उकल 1 व 2 च्या दरम्यान शोधा. (केवळ तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करा.
5) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $x^3 - 3x - 5 = 0$ या समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. (केवळ तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करा)
6) न्यूटन रॅफसन पद्धत (Newton-Raphson method) वापरुन $x^3 - 2x - 5 = 0$ या समीकरणाचे अंदाजे उकल शोधा. (केवळ तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करा)
7) न्यूटन रॅफसन पद्धत वापरुन (Newton-Raphson method) $\sqrt[3]{20}$ चे अंदाजे उकल शोधा.
8) न्यूटन रॅफसन पद्धत वापरुन (Newton-Raphson method) $\sqrt[3]{120}$ चे अंदाजे उकल शोधा.
9) न्यूटन रॅफसन पद्धत वापरुन (Newton-Raphson method) $\sqrt[5]{35}$ चे अंदाजे उकल शोधा.
10) न्यूटन रॅफसन पद्धत वापरुन (Newton-Raphson method) $\sqrt{28}$ चे अंदाजे उकल शोधा.

४.२ (सलूशन ऑफ़ सायमलटेनिअस इक्वेशन) (Solution of Simultaneous Equations)

रेखीय समीकरणांच्या(linear equations) प्रणालीचा विचार करा,

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

रेखीय समीकरणांची प्रणाली सोडविण्यासाठी आपण थेट पद्धती वापरत आलो आहोत. मर्यादित संख्येनंतर थेट पद्धती अचूक निराकरण करतात तर पुनरावृत्ती करण्याच्या पद्धती इच्छित अचूकतेपर्यंत समाधान प्राप्त होईपर्यंत अंदाजे समाधानाचा क्रम देतात. या पाठात आपण तीन एकसामायिक समीकरणासाठी अंदाजे निराकरण मिळविण्यासाठी खालील पद्धतींबद्दल चर्चा करणार आहोत.

- (बख्शाली इटरेटीव मेथड) (Bakhshali Iterative Method)
- जॅकोबीज पद्धत (Jacobi's method -Iterative Methods)
- गॉस सिडल पद्धत (Gauss-Seidal method-Iterative Methods)

❖ जॅकोबी पुनरावृत्ती पद्धत (Jacobi's Iterative Method)

पुनरावृत्ती होणारी पद्धत(iterative method) ही आहे ज्यामध्ये आपण जवळपासुन वास्तविक निराकरण सुरू करतो आणि यशस्वी झाल्यास अधिक चांगले आणि अधिक चांगले अंदाज प्राप्त करत जातो. या प्रणालीची संकल्पना अत्यंत सोपी आहे, कर्णाचे घटक विनाशून्य आहे (diagonal elements are non-zeros) या गृहितक्यांसह जॅकोबीच्या पुनरावृत्ती पद्धतीने (Jacobi's iteration method) आपल्याला अधिक अचूक निराकरण प्राप्त करता येते.

कार्यरत नियम : पुढील रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीचा विचार करा.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

i) जॅकोबीच्या पध्दतीसाठी वरील समीकरणांवरील पुनर्लेखन खालीलप्रमाणे करू या,

$$x = \frac{1}{a_1}\ (d_1 - b_1 y - c_1 z) \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y = \frac{1}{b_2}\ (d_2 - a_2 x - c_2 z) \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$z = \frac{1}{c_3}\ (d_3 - a_3 x - b_3 y) \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ii) प्रथम निकटन (first iteration),

समीकरण (1) मध्ये $y = 0, z = 0$ टाकल्यावर आपल्याला $x_1 = \frac{d_1}{a_1}$ मिळेल.

समीकरण (2) मध्ये $x = 0, z = 0$ टाकल्यावर आपल्याला $y_1 = \frac{d_2}{b_2}$ मिळेल.

समीकरण (3) मध्ये $x = 0, y = 0$ टाकल्यावर आपल्याला $z_1 = \frac{d_3}{c_3}$ मिळेल.

iii) द्वितीय पुनरावृत्ती मिळविण्यासाठी,

समीकरण (1) मध्ये $y = y_1, z = z_1$ टाकल्यावर आपल्याला

$x_2 = \frac{1}{a_1}(d_1 - b_1y_1 - c_1z_1)$ मिळेल.

समीकरण (2) मध्ये $x = x_1, z = z_1$ टाकल्यावर आपल्याला

$y_2 = \frac{1}{b_2}(d_2 - a_2x_1 - c_2z_1)$ मिळेल.

समीकरण (3) मध्ये $y = y_1, x = x_1$ टाकल्यावर आपल्याला

$z_2 = \frac{1}{c_2}(d_3 - a_3x_1 - b_3y_1)$ मिळेल.

जोपर्यंत इच्छित अचूकता सापडत नाही तोपर्यंत प्रक्रिया सुरु ठेवा.

सोडवलेली उदाहरणे

1) जॅकोबी पुनरावृत्ती पद्धतीने (Jacobi-Iteration method) खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$\mathbf{5x + 2y + z = 12}$; $\mathbf{x + 4y + 2z = 15}$; $\mathbf{x + 2y + 5z = 20}$ (केवळ दोन पुनरावृत्ती करा)

उत्तर: दिलेल्या समीकरणांची खालील प्रमाणे रचना करू या,

$$x = \frac{1}{5}\{12 - 2y - z\}$$

$$y = \frac{1}{4}\{15 - x - 2z\}$$

$$z = \frac{1}{5}\{20 - x - 2y\}$$

प्रथम पुनरावृत्ती (First Iteration):

वरील समीकरणात $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ आणि $z_0 = 0$ ठेवू या,

∴ प्रथम निकटन (first approximations) आहे,

$$x_1 = \frac{1}{5}\{12 - 0 - 0\} = 2.4$$

$$y_1 = \frac{1}{4}\{15 - 0 - 0\} = 3.75$$

$$z_1 = \frac{1}{5}\{20 - 0 - 0\} = 4$$

द्वितीय पुनरावृत्ती (Second Iteration):

वरील समीकरणात $x = 2.4$; $y = 3.75$ आणि $z = 4.$ ठेवू या,

$$x_2 = \frac{1}{5}\{12 - 2 \times 3.75 - 4\} = 0.10$$

$$y_2 = \frac{1}{4}\{15 - 2.4 - 2 \times 4\} = 1.15$$

$$z_2 = \frac{1}{5}\{20 - 2.4 - 2 \times 3.75\} = 2.02$$

∴ दिलेल्या समीकरणांच्या प्रणालीचे निराकरण आहे ,

$$\mathbf{x = 0.10\ ;\ \ y = 1.15\ ;\ \ z = 2.02}$$

2) जॅकोबी पुनरावृत्ती पद्धतीने (Jacobi-Iteration method) खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$$\mathbf{20x + y - 2z = 17;\ 3x + 20y - z = -18\ ;\ 2x - 3y + 20z = 25}$$

उत्तर: दिलेल्या समीकरणांची खालील प्रमाणे रचना करु या,

$$x = \frac{1}{20}\{17 - y + 2z\}$$

$$y = \frac{1}{20}\{-18 - 3x + z\}$$

$$z = \frac{1}{20}\{25 - 2x + 3y\}$$

प्रथम पुनरावृत्ती (First Iteration):

वरील समीकरणात $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ आणि $z_0 = 0$ ठेवू या,

∴ प्रथम निकटन (first approximations) आहे,

$$x_1 = \frac{1}{20}\{17 - 0 + 0\} = 0.85$$

$$y_1 = \frac{1}{20}\{-18 - 0 + 0\} = -0.9$$

$$z_1 = \frac{1}{20}\{25 - 0 + 0\} = 1.25$$

द्वितीय पुनरावृत्ती (Second Iteration):

वरील समीकरणात $x = 0.85$; $y = -0.9$ आणि $z = 1.25$ ठेवू या,

$$x_2 = \frac{1}{20}\{17 + 0.9 + 2 \times 1.25\} = 1.02$$

$$y_2 = \frac{1}{20}\{-18 - 3 \times 0.85 + 1.25\} = -0.965$$

$$z_2 = \frac{1}{20}\{25 - 2 \times 0.85 - 3 \times 0.9\} = 1.03$$

तृतीय पुनरावृत्ती (Third Iteration):

वरील समीकरणात $x = 1.02$; $y = -0.965$ आणि $z = 1.03$

$$x_3 = \frac{1}{20}\{17 + 0.965 + 2 \times 1.03\} = 1.0012 \approx 1$$

$y_3 = \frac{1}{20}\{-18 - 3 \times 1.02 + 1.03\} = -1.0015 \approx -1$

$z_3 = \frac{1}{20}\{25 - 2 \times 1.02 - 3 \times 0.965\} = 1.0032 \approx 1$

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणांच्या प्रणालीचे निराकरण आहे ,

$\mathbf{x = 1;\ \ y = -1\ ;\ \ \ z = 1}$

3) जॅकोबी पुनरावृत्ती पद्धतीने (Jacobi-Iteration method) खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$\mathbf{10x - 2y - 2z = 6\ ;\ \ -x - y + 10\,z = 8\ \ ; -x + 10y - 2z = 7}$

उत्तर: जॅकोबीच्या पध्दतीसाठी वरील समीकरणांचे पुनर्लेखन खालीलप्रमाणे करूया,

$10x - 2y - 2z = 6$

$-x + 10y - 2z = 7$

$-x - y + 10\,z = 8$

दिलेल्या समीकरणांची खालील प्रमाणे रचना करू या,

$x = \frac{1}{10}\{6 + 2y + 2z\}$

$y = \frac{1}{10}\{7 + x + 2z\}$

$z = \frac{1}{10}\{8 + x + y\}$

प्रथम पुनरावृत्ती (First Iteration):

वरील समीकरणात $x_0 = 0, y_0 = 0$ आणि $z_0 = 0$ ठेवू या,

$\therefore$ प्रथम निकटन (first approximations) आहे,

$x_1 = \frac{1}{10}\{6 + 0 + 0\} = 0.6$

$y_1 = \frac{1}{10}\{7 + 0 + 0\} = 0.7$

$z_1 = \frac{1}{10}\{8 + 0 + 0\} = 0.8$

द्वितीय पुनरावृत्ती (Second Iteration):

वरील समीकरणात $x_0 = 0.6, y_0 = 0.7$ आणि $z_0 = 0.8$ ठेवू या,

$$x_2 = \frac{1}{10}\{6 + 2 \times 0.7 + 2 \times 0.8\} = 0.9$$

$$y_2 = \frac{1}{10}\{7 + 0.6 + 2 \times 0.8\} = 0.92$$

$$Z_2 = \frac{1}{10}\{8 + 0.6 + 0.7\} = 0.93$$

तृतीय पुनरावृत्ती (Third Iteration):

वरील समीकरणात $x_0 = 0.9, y_0 = 0.92$ आणि $z_0 = 0.93$

$$x_3 = \frac{1}{10}\{6 + 2 \times 0.92 + 2 \times 0.93\} = 0.97 \approx 1$$

$$y_3 = \frac{1}{10}\{7 + 0.9 + 2 \times 0.93\} = 0.98 \approx 1$$

$$z_3 = \frac{1}{10}\{8 + 0.9 + 0.92\} = 0.98 \approx 1$$

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणांच्या प्रणालीचे निराकरण आहे ,

$\mathbf{x = 1 ;\; y = 1 ;\; z = 1}$

सराव प्रश्नसंच

जॅकोबी पुनरावृत्ती पद्धतीने (Jacobi-Iteration method) खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

1) $2x + 3y - 4z = 1; 5x + 9y + 3z = 17; 8x - 2y - z = 5$
2) $10x + y + 2z = 13; 3x + 10y + z = 14; 2x + 3y + 10z = 15$
3) $10x - y + 2z = 15; 2x - 15y + 4z = 25; -3x + 2y + 25z = 45$
4) $15x + 2y + z = 18; 2x + 20y - 3z = 19; 3x - 6y + 25z = 22$
5) $10x + 2y + z = 9; 2x + 20y - 2z = -44; -2x + 3y + 10z = 22$
6) $4x - y + z = 4 ;\; x + 6y + 2z = 9 ;\; -x - 2y + 5z = 2$
7) $10x - 3y + 2z = 9; 2x + 10y - z = 11 ; x + 2y + 10z = 13$
8) $10x + y + z = 12 ;\; x + 10y + z = 12 ;\; x + y + 10z = 12$

❖ गॉस सिडल-पद्धत (Gauss–Seidal Method)

गॉस-सिडल (Gauss-Seidal iteration) ही क्रमिक सुधारांची एक पद्धत आहे कारण या पध्दतीत मिळालेले संबंधित अंदाज वापरुन नवीन निकटन शोधले जाते. गॉस-सिडल पद्धत या जेकोबी पद्धतीचा सुधारित प्रकार आहे. गॉस-सिडल पद्धत आणि जेकोबी पद्धतींमध्ये फरक असा आहे की जेकोबी पद्धतीत मागील चरणातून प्राप्त केलेल्या मूल्यांचा वापर केला जातो तर गॉस-सिडल पद्धत नेहमीच अद्ययावत केलेल्या मूल्यांना पुनरावृत्ती प्रक्रिये दरम्यान लागू करते.

कार्यरत नियम : पुढील रेषीय समीकरणांच्या प्रणालीचा विचार करा.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

गॉस सिडल (Gauss-Seidal iteration) पध्दतीसाठी समीकरणांचे पुनर्लेखन खालील प्रमाणे:

$$x = \frac{1}{a_1}\ (d_1 - b_1 y - c_1 z)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

$$y = \frac{1}{b_2}\ (d_2 - a_2 x - c_2 z)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

$$z = \frac{1}{c_3}\ (d_3 - a_3 x - b_3 y)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

i) प्रथम पुनरावृत्ती (first iteration),

समीकरण (1) मध्ये $y = 0, z = 0$ ठेवल्यास

$x_1 = \frac{d_1}{a_1}$ मिळेल.

समीकरण (2) मध्ये $x = x_1, z = 0$ ठेवल्यास

$y_1 = \frac{1}{b_2}(d_2 - a_2 x_1 - c_2 \cdot 0)$ मिळेल.

समीकरण (3) मध्ये $x = 0, y = 0$ ठेवल्यास

$z_1 = \frac{1}{c_3}(d_3 - a_3 x_1 - b_3 y_1)$ मिळेल.

ii) द्वितीय पुनरावृत्ती (second iteration),

समीकरण (1) मध्ये $y = y_1, z = z_1$ ठेवल्यास

$x_2 = \frac{1}{a_1}(d_1 - b_1y_1 - c_1z_1)$ मिळेल.

समीकरण (2) मध्ये $x = x_2 , z = z_1$ ठेवल्यास

$y_2 = \frac{1}{b_2}(d_2 - a_2x_2 - c_2z_1)$ मिळेल.

समीकरण (3) मध्ये $x = x_2 , y = y_2$ ठेवल्यास

$z_2 = \frac{1}{c_3}(d_3 - a_3x_2 - b_3y_2)$ मिळेल.

जोपर्यंत इच्छित अचूकता सापडत नाही तोपर्यंत प्रक्रिया सुरु ठेवा.

सोडवलेली उदाहरणे

1) गॉस-सिडल पद्धत (Gauss-Seidal method) वापर करून खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$\mathbf{10x + y + 2z = 13; 3x + 10y + z = 14; 2x + 3y + 10z = 15}$ (तीन पुनरावृत्ती करा)

उत्तर: दिलेली समीकरणे आहेत

$$10x + y + 2z = 13$$

$$3x + 10y + z = 14$$

$$2x + 3y + 10z = 15$$

गॉस-सिडल पद्धत (Gauss-Seidal method) आपण वरील समीकरणे पुढीलप्रमाणे मांडू या,

$$x = \frac{1}{10}\{13 - y - 2z\}$$

$$y = \frac{1}{10}\{14 - 3x - z\}$$

$$z = \frac{1}{10}\{15 - 2x - 3y\}$$

प्रथम पुनरावृत्ती (first iteration),

$x_1 = \frac{1}{10}\{13 - 0 - 0\} = 1.3$ $\quad y_0 = 0$ आणि $z_0 = 0$ ठेऊ

$y_1 = \frac{1}{10}\{14 - 3(1.3) - 0\} = 1.01$ $\quad x_1 = 1.3$ आणि $z_0 = 0$ ठेऊ

$z_1 = \frac{1}{10}\{15 - 2(1.3) - 3(1.01)\} = 0.937$ $\quad x_1 = 1.3$ आणि $y_1 = 1.01$ ठेऊ

द्वितीय पुनरावृत्ती (second iteration),

$x_2 = \frac{1}{10}\{13 - 1.01 - 2(0.937)\} = 1.01$ $\quad y_1 = 1.01$आणि $z_1 = 0.937$ ठेऊ

$y_2 = \frac{1}{10}\{14 - 3(1.01) - 0.937\} = 1$ $\quad x_2 = 1.01$ आणि $z_1 = 0.937$ ठेऊ

$z_2 = \frac{1}{10}\{15 - 2(1.01) - 3(1)\} = 1$ $\quad x_2 = 1.01$ आणि $y_2 = 1$ ठेऊ

तृतीय पुनरावृत्ती (Third Iteration):

$x_3 = \frac{1}{10}\{13 - 1 - 2(1)\} = 1$ $y_2 = 1$ आणि $z_2 = 1$ ठेऊ

$y_3 = \frac{1}{10}\{14 - 3(1) - 1\} = 1$ $x_3 = 1$ आणि $z_2 = 1$ ठेऊ

$z_3 = \frac{1}{10}\{15 - 2(1) - 3(1)\} = 1$ $x_3 = 1$ आणि $y_3 = 1$ ठेऊ

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणांच्या प्रणालीचे निराकरण आहे ,

$$\mathbf{x = 1 \;;\; y = 1 \;;\; z = 1}$$

2) गॉस-सिडल पद्धत (Gauss-Seidal method) वापर करून खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$\mathbf{10x + 2y + z = 9 \;;\; x + 10y - z = -22 \;;\; -2x + 3y + 10z = 22}$ (तीन पुनरावृत्ती करा)

उत्तर: दिलेली समीकरणे आहेत

$$10x + 2y + z = 9$$
$$x + 10y - z = -22$$
$$-2x + 3y + 10z = 22$$

गॉस-सिडल पद्धत (Gauss-Seidal method) आपण वरील समीकरणे पुढीलप्रमाणे मांडू या,

$$x = \frac{1}{10}\{9 - 2y - z\}$$
$$y = \frac{1}{10}\{-22 - x + z\}$$
$$z = \frac{1}{10}\{22 + 2x - 3y\}$$

प्रथम पुनरावृत्ती (first iteration),

$x_1 = \frac{1}{10}\{9 - 0 - 0\} = 0.9$ $y_0 = 0$ आणि $z_0 = 0$ ठेऊ

$y_1 = \frac{1}{10}\{-22 - 0.9 + 0\} = -2.29$ $x_1 = 0.9$ आणि $z_0 = 0$ ठेऊ

$z_1 = \frac{1}{10}\{22 + 2 \times 0.9 + 3 \times 2.29\} = 3.07$ $x_1 = 0.9$ आणि $y_1 = -2.29$ ठेऊ

द्वितीय पुनरावृत्ती (second iteration),

$x_2 = \frac{1}{10}\{9 + 2 \times 2.29 - 3.07\} = 1.05$ $y_1 = -2.29$ आणि $z_1 = 3.07$ ठेऊ

$y_2 = \frac{1}{10}\{-22 - 1.05 + 3.07\} = -2$ $x_2 = 1.05$ आणि $z_1 = 3.07$ ठेऊ

$z_2 = \frac{1}{10}\{22 + 2 \times 1.05 + 3 \times 2\} = 3.01$ $x_2 = 1.05$ आणि $y_2 = -2$ ठेऊ

तृतीय पुनरावृत्ती (Third Iteration):

$x_3 = \frac{1}{10}\{9 + 2 \times 2 - 3.01\} = 1$ $y_2 = -2$ आणि $z_2 = 3.01$ ठेऊ

$y_3 = \frac{1}{10}\{-22 - 1 + 3.01\} = -2$ $x_3 = 1$ आणि $z_2 = 3.01$ ठेऊ

$z_3 = \frac{1}{10}\{22 + 2 \times 1 + 3 \times 2\} = 3$ $x_3 = 1$ आणि $y_3 = -2$ ठेऊ

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणांच्या प्रणालीचे निराकरण आहे ,

$$x = 1 \;;\; y = -2 \;;\; z = 3$$

3) गॉस-सिडल पद्धत (Gauss-Seidal method) वापर करून खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

$8x + 2y + 3z = 30, x - 9y + 2z = 1, 2x + 3y + 6z = 31$ (तीन पुनरावृत्ती करा)

उत्तर: दिलेली समीकरणे आहेत

$$8x + 2y + 3z = 30$$
$$x - 9y + 2z = 1$$
$$2x + 3y + 6z = 31$$

गॉस-सिडल पद्धत (Gauss-Seidal method) आपण वरील समीकरणे पुढीलप्रमाणे मांडू या,

$$x = \frac{1}{8}\{30 - 2y - 3z\}$$

$$y = \frac{1}{-9}\{1 - x - 2z\}$$

$$z = \frac{1}{6}\{31 - 2x - 3y\}$$

प्रथम पुनरावृत्ती (first iteration),

$x_1 = \frac{1}{8}\{30 - 0 - 0\} = 3.75$ $y_0 = 0$ आणि $z_0 = 0$ ठेऊ

$y_1 = \frac{1}{-9}\{1 - 3.75 - 2(0)\} = 0.31$ $x_1 = 3.75$ आणि $z_0 = 0$ ठेऊ

$z_1 = \frac{1}{6}\{31 - 2(3.75) - 3(0.31)\} = 3.76$ $x_1 = 0.9$ आणि $y_1 = -2.29$ ठेऊ

द्वितीय पुनरावृत्ती (second iteration),

$$x_2 = \frac{1}{8}\{30 - 2(0.31) - 3(3.76)\} = 2.26 \quad y_1 = 0.31 \text{ आणि } z_1 = 3.76 \text{ ठेऊ}$$

$$y_2 = \frac{1}{-9}\{1 - 2.26 - 2(3.76)\} = 0.98 \qquad x_2 = 2.26 \text{ आणि } z_1 = 3.76 \text{ ठेऊ}$$

$$z_2 = \frac{1}{6}\{31 - 2(2.26) - 3(0.98)\} = 3.92 \quad x_2 = 2.26 \text{ आणि } y_2 = 0.98 \text{ ठेऊ}$$

तृतीय पुनरावृत्ती (Third Iteration):

$$x_3 = \frac{1}{8}\{30 - 2(0.98) - 3(3.92)\} = 2.03 \approx 2 \quad y_2 = 0.98 \text{ आणि } z_2 = 3.92 \text{ ठेऊ}$$

$$y_3 = \frac{1}{-9}\{1 - 2.03 - 2(3.92)\} = 0.99 \approx 1 \qquad x_3 = 2.03 \text{ आणि } z_2 = 3.92 \text{ ठेऊ}$$

$$z_3 = \frac{1}{6}\{31 - 2(2.03) - 3(0.99)\} = 3.99 \approx 4 \quad x_3 = 2.03 \text{ आणि } y_3 = 0.99 \text{ ठेऊ}$$

$\therefore$ दिलेल्या समीकरणांच्या प्रणालीचे निराकरण आहे ,

$$\mathbf{x = 2 \quad ; \; y = 1 \; ; \quad z = 4}$$

सराव प्रश्नसंच

तीन पुनरावृत्ती (three iterations) करून गॉस-सिडल पद्धत Gauss-Seidal method वापरुन खालील समीकरणांची प्रणाली सोडवा.

a) $6x + y + z = 105, \;\; 4x + 8y + 3z = 155, \;\;\; 5x + 4y - 10z = 65$

b) $10x + y + z = 12, \;\; x + 10y + z = 12, \;\;\; x + y + 10z = 12$

c) $x + 2y + 3z = 14, \;\; 2x + 3y + 4z = 20, \;\;\; 3x + 4y + z = 14$

d) $5x - y = 9, \;\; x - 5y + z = -4, \;\; y - 5z = 15$

e) $15x + 2y + z = 18, \;\; 2x + 20y - 3z = 19, \;\;\; 3x - 6y + 25z = 20$

बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत (Bakhshali Iterative Method)

वर्ग नसलेल्या संख्यांचे वर्गमूळ शोधण्यासाठी बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत उपयुक्त आहे.

हे सूत्र वापरून प्राप्त केले जाते:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{N - {x_n}^2}{2x_n}, \qquad n = 0,1,2,3, - - - - -$$

येथे,

N= संख्या ज्याचे वर्गमूळ पुनरावृत्ती पद्धतीने आवश्यक आहे

आरंभिक पुनरावृत्ती, x_0= संख्येचे वर्गमूळ जे N च्या सर्वात जवळ आहे आणि N पेक्षा कमी आहे

x_n = पुढील x_{n+1}वी पुनरावृत्ती शोधण्यासाठी मागील पुनरावृत्ती

सोडवलली उदाहरणे

1) बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत वापरून $\sqrt{17}$ चे अंदाजे मूल्य शोधा

उत्तर : इथे N =17 , x_0 =4

आता बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत वापरून

$$x_{n+1} = x_n + \frac{N - {x_n}^2}{2x_n}, \; n = 0,1,2,3, - - - - - \text{-------(1)}$$

प्रथम निकटन (first approximation):

समीकरण (1) मध्ये n=0 ठेवू

$$x_1 = x_0 + \frac{N - {x_0}^2}{2x_0}$$

$$x_1 = 4 + \frac{17 - 4^2}{8}$$

$$x_1 = 4.125$$

द्वितीय निकटन (Second approximation):

समीकरण (1) मध्ये n=1 ठेवू

$$x_2 = x_1 + \frac{N - {x_1}^2}{2x_1}$$

$$x_2 = 4.125 + \frac{17 - 4.125^2}{2(4.125)}$$

$$x_2 = 4.1231060606060606$$

तृतीय निकटन (Third approximation):

समीकरण (1) मध्ये n=2 ठेवू

$$x_3 = x_2 + \frac{N - {x_2}^2}{2x_2}$$

$$x_3 = 4.1231060606060606 + \frac{17 - 4.1231060606060606^2}{2(4.1231060606060606)}$$

x_3 = 4.1231056256176837

असा, √17 का पूर्वानुमानित मूल्य 4.1231056256176837 आहे.

2) बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत वापरून $\sqrt{26}$ चे अंदाजे मूल्य शोधा

उत्तर : इथे N =26 , x_0 =5

आता बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत वापरून

$x_{n+1} = x_n + \frac{N - {x_n}^2}{2x_n}$, $n = 0,1,2,3, - - - - -$ -------(1)

प्रथम निकटन (first approximation):

समीकरण (1) मध्ये n=0 ठेवू

$$x_1 = x_0 + \frac{N - {x_0}^2}{2x_0}$$

$$x_1 = 5 + \frac{26 - 5^2}{10}$$

x_1 = 5.0999999999999996

द्वितीय निकटन (Second approximation):

समीकरण (1) मध्ये n=1 ठेवू

$$x_2 = x_1 + \frac{N - {x_1}^2}{2x_1}$$

$$x_2 = 5.0999999999999996 + \frac{26 - 5.0999999999999996^2}{2(5.0999999999999996)}$$

x_2 = 5.0990196078431369

तृतीय निकटन (Third approximation):

समीकरण (1) मध्ये n=2 ठेवू

$$x_3 = x_2 + \frac{N - {x_2}^2}{2x_2}$$

$$x_3 = 5.0990196078431369 + \frac{26 - 5.0990196078431369^2}{2(5.0990196078431369)}$$

$$x_3 = 5.0990195135927854$$

असा, √26 का पूर्वानुमानित मूल्य 5.0990195135927854आहे.

सराव प्रश्नसंच

1) बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत वापरून $\sqrt{67}$ चे अंदाजे मूल्य शोधा
2) बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत वापरून $\sqrt{102}$ चे अंदाजे मूल्य शोधा
3) बख्शाली पुनरावृत्ती पद्धत वापरून $\sqrt{85}$ चे अंदाजे मूल्य शोधा

घटक– ५

संभाव्यता वितरण

Probability Distribution

(प्रोबेबिलिटी डिस्ट्रीब्यूशन)

द्विपदी वितरण ***(Binomial Distribution)***

पायसॉन वितरण ***(Poisson Distribution)***

प्रसामान्य वितरण ***(Normal Distribution)***

घटक – ५
Unit - 5
Probability Distribution
(प्रोबेबिलिटी डिस्ट्रीब्यूशन)

विषय निष्पत्ति (Course Outcome):

प्राथमिक अभियांत्रिकी समस्या सोडविण्यासाठी संभाव्यता वितरण वापरा.

सैद्धांतिक शिक्षण परिणाम (Theory Learning Outcomes):

5.1: द्विपद वितरण (Binomial Distribution) चा वापर करून वारंवार चाचण्यांच्या (Repeated Trials) आधारे दिलेल्या समस्या सोडविणे.

5.2: जेव्हा चाचण्यांची संख्या मोठी असते आणि संभाव्यता खूप कमी असते तेव्हा दिलेल्या समस्या सोडवा.

5.3: संबंधित अभियांत्रिकी समस्या सोडविण्यासाठी सामान्य वितरणाची संकल्पना वापरा

- परिचय:

संभाव्यता वितरण(Probability distribution) ही संख्याशास्त्राची मूलभूत संकल्पना आहे. ते दोन्ही सैद्धांतिक पातळीवर(theoretical level) आणि व्यावहारिक पातळीवर (practical level)वापरले जातात. प्रयोगामध्ये उद्भवू शकणारे विविध संभाव्य निकालांच्या (occurrence of various possible outcomes) घटनेची शक्यता संभाव्यता वितरण कार्य (Probability distribution function) प्रदान करते. संभाव्यता वितरणाचे बरेच प्रकार आहेत. वारंवार वापरले जाणारे यादृच्छिक चलांच्या (random variables) काही महत्त्वपूर्ण वितरणाबद्दल (important distribution) आपण येथे चर्चा करणार आहोत.

A) द्विपदी वितरण (Binomial Distribution) पृथक (Discrete)

B) पायसॉन वितरण (Poisson Distribution) पृथक (Discrete)

C) प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) संतत (continuous)

५.१

- यादृच्छिक चल (Random Variables):

यादृच्छिक प्रयोगाच्या(random experiment) परिणामाद्वारे निर्धारित केले जाणारे चलास यादृच्छिक चल(Random Variable) असे म्हणतात. त्याला संधी किंवा संभव (chance) असे सुद्धा संबोधिले जाते. यादृच्छिक चल हे X, Y, Z, इत्यादी मोठ्या अक्षरांनी दर्शवितात. यादृच्छिक चल हे पृथक (Discrete) किंवा संतत (continuous) असू शकतात.

- पृथक संभाव्यता वितरण **(Discrete Probability Distribution)**:

जर यादृच्छिक चल (Random Variable) x हा पृथक (Discrete) असेल तर संभाव्यता फल (probability function) P(x) ला वस्तुमान फल(mass function) असे म्हटले जाते आणि त्याच्या वितरणास पृथक संभाव्यता वितरण (Discrete Probability Distribution) म्हणतात.

- संतत संभाव्यता वितरण(Continuous Probability Distribution):

  जर यादृच्छिक चल (Random Variable) x हा संतत (continuous) असेल तर संभाव्यता फल (probability function) ला संभाव्यता घनता फल(probability density function) असे म्हटले जाते आणि त्याच्या वितरणास संतत संभाव्यता वितरण(Continuous Probability Distribution) म्हणतात.

- संभाव्यता वक्र (Probability Curve):

  संतत वक्र (continuous curve) y = f (x) ला संभाव्यता वक्र (probability curve) म्हणतात आणि घनता फल (density function) नेहमी सकारात्मक (positive) असतात आणि $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = 1$ म्हणजे संभाव्यता वक्र आणि X अक्ष अंतर्गत एकूण क्षेत्र एक (unity) असते.

५.१ **Binomial Probability Distribution:** (बायनोमिअल प्रोबेबिलिटी डिस्ट्रीब्यूशन)

जेव्हा चाचणीचे(trial) दोन परस्पर अपवर्जक (mutually exclusive) परिणाम(outcomes) आढळतात तेव्हा द्विपदी वितरण (Binomial Distribution) वापरले जाते. या निकालांवर "यश" (success)आणि "अपयश" (failure) असे लेबल लावले जाते. प्रत्येक चाचणीत यशस्वी होण्याची किंवा घटनेची घटना होण्याची संभाव्यता सतत ‘p’ असते तर प्रत्येक चाचणीत घटनेची अपयश येण्याची किंवा न होण्याची संभाव्यता ही सतत ‘q’ असते. या प्रकरणात $p + q = 1$. तेव्हा नक्की ‘r’ यश किंवा घटनेची(success or happening) शक्यता (probability)

$$P(r) = {}^{n}C_{r}\, p^{r}\, q^{n-r}$$

द्वारे दिली जाते. चल ‘r’ ला बर्नोली चल (Bernoulli’s variable) म्हणतात. ‘r’ च्या विविध मूल्यांसाठी P(r) चे मूल्य यास द्विपदी वितरण (Binomial Distribution) असे म्हणतात.

➢ द्विपदी वितरणाचे गुणधर्म (Properties of Binomial Distribution):

i) द्विपदी वितरण मध्य (Mean of Binomial Distribution)

$$\bar{x} = np$$

ii) द्विपदी वितरण प्रमाण विचलन (Standard Deviation of the Binomial Distribution)

$$S.D. = \sigma = \sqrt{npq}$$

iii) द्विपदी वितरण प्रचरण (variance of the Binomial Distribution)

$$\sigma^2 = npq$$

सोडविलेले उदाहरणे:

1) द्विपदी वितरणचा मध्य (Mean of Binomial Distribution) 17 आणि प्रमाणित विचलन (Standard Deviation) 2 आहे. तर p आणि q ची किमती काढा.

उत्तर: दिलेले: द्विपदी वितरणाचा मध्य $= np = 17$

आणि प्रमाणित विचलन $= S.D. = \sqrt{npq} = 2$

$\Rightarrow \quad npq = 4$

$\Rightarrow \quad 17\,q = 4 \quad \because \quad np = 17$

$\Rightarrow \quad q = \frac{4}{17} = 0.24$

$\therefore \quad p = 1 - q = 1 - 0.24 = 0.76$

2) एक पूर्वग्रहरहित (unbiased coin) नाणे **6** वेळा फेकले जाते. तर **a**) **2** चीत (heads) आणि **b**) किमान (at least) **4** चीत मिळण्याची शक्यता शोधा.

उत्तर: प्रत्येक चाचणी (trial) मध्ये,

चीत ची संभाव्यता (probability of head) $= p = \frac{1}{2}$

पट ची संभाव्यता (probability of tail) $= q = \frac{1}{2}$

येथे स्वतंत्र चाचण्या (independent trials) 6 आहेत. $\quad \therefore \quad n = 6$

$\therefore$ द्विपदीय वितरण द्वारे

$P(r) = {}^{n}C_r\, p^r\, q^{n-r}$

$\Rightarrow \quad P(r) = {}^{6}C_r \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{6-r}$

$\Rightarrow \quad P(r) = {}^{6}C_r \left(\frac{1}{2}\right)^6$

a) नक्की 2 चीत (heads) मिळण्याची शक्यता म्हणजेच **r = 2**

$\therefore \quad P(r=2) = {}^{6}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$\Rightarrow \quad P(r=2) = \frac{15}{64}$

$\Rightarrow \quad P(2) = 0.2344$

b) किमान (at least) 4 चीत मिळण्याची शक्यता म्हणजेच $r \geq 4$

$\therefore \quad P(r \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6)$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \{ {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6 \}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 4) = \frac{1}{64}\{15 + 6 + 1\}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 4) = \frac{22}{64}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 4) = \frac{11}{32}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 4) = 0.3438$

3) असे गृहीत धरले की 10 पैकी 2 औद्योगिक अपघात (industrial accidents)थकवामुळे(due to fatigue) होतात. 8 पैकी 2 अपघात थकवामुळे होईल याची संभाव्यता शोधा.

उत्तर: थकव्यामुळे अपघाताची शक्यता = $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\therefore \quad q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ आणि $n = 8$

$\therefore$ द्विपदीय वितरण द्वारे

$P(r) = {}^nC_r \, p^r \, q^{n-r}$

$\Rightarrow \quad P(r) = {}^8C_r \left(\frac{1}{5}\right)^r \left(\frac{4}{5}\right)^{8-r}$

$\therefore$ 8 पैकी 2 अपघात थकवामुळे होईल याची संभाव्यता

$\therefore \quad P(r = 2) = {}^8C_2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^6$

$\Rightarrow \quad P(2) = 0.2936$

4) सहा फासे (dice) **729** वेळा फेकले जातात. आपण कमीतकमी तीन फासे **5** किंवा **6** दर्शविण्यासाठी किती अपेक्षा कराल?

उत्तर: एका फासात (die) 5 किंवा 6 मिळण्याची शक्यता= $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

एका फासात(die) 5 किंवा 6 न मिळण्याची शक्यता= $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

तसेच सहा फासे फेकले आहेत. $\therefore \quad n = 6$

$\therefore$ द्विपदीय वितरण द्वारे

$P(r) = {}^{n}C_r\, p^r\, q^{n-r}$

$\Rightarrow \quad P(r) = {}^{6}C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{6-r}$

$\therefore$ कमीतकमी तीन फासे 5 किंवा 6 दर्शविण्याची शक्यता म्हणजेच $r \geq 3$

$\therefore \quad P(r \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 3) = 1 - \{P(0) + P(1) + P(2)\}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 3) = 1 - \left\{ {}^{6}C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 + {}^{6}C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 + {}^{6}C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right\}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 3) = 1 - \{0.0878 + 0.2634 + 0.3292\}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 3) = 1 - 0.6804$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 3) = 0.3196$

$\therefore$ अपेक्षित संख्या(Expected Number) $= N \times p = 729 \times 0.3196$

अपेक्षित संख्या $= 232.99 \approx 233$ प्रकारे

$\therefore$ कमीतकमी तीन फासे 233 प्रकारे 5 किंवा 6 दर्शवतील.

5) **5 समसंभाव्य नाण्यांच्या (fair coins) 200 संचामध्ये a) किमान दोन चीत (head) b) जास्तीत जास्त दोन चीत मिळण्याची शक्यता आपण किती मार्गांनी अपेक्षा करू शकता?**

उत्तर: प्रत्येक चाचणीत, चीत (head) मिळण्याची शक्यता $= p = \frac{1}{2}$

आणि पट (tail) मिळण्याची शक्यता $= q = \frac{1}{2}$

तसेच, $n = 5$ आणि $N = 200$ संच

$\therefore$ द्विपदीय वितरण द्वारे

$P(r) = {}^{n}C_r\, p^r\, q^{n-r}$

$\Rightarrow \quad P(r) = {}^{5}C_r \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{5-r}$

$\Rightarrow \quad P(r) = {}^{5}C_r \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\Rightarrow \quad P(r) = \frac{1}{32}\, {}^{5}C_r$

a) किमान दोन चीत(at least two heads) मिळण्याची शक्यता म्हणजेच $r \geq 2$

$\therefore \quad P(r \geq 2) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 2) = 1 - \{P(0) + P(1)\}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 2) = 1 - \frac{1}{32}\{{}^5C_0 + {}^5C_1\}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 2) = 1 - \frac{1}{32}\{1 + 5\}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 2) = 1 - \frac{6}{32}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 2) = \frac{26}{32}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 2) = \frac{13}{16}$

$\Rightarrow \quad P(r \geq 2) = 0.8125$

$\therefore$ अपेक्षित संख्या (Expected Number) = $N \times p$

$\Rightarrow$ अपेक्षित संख्या = 200×0.8125

$\Rightarrow$ अपेक्षित संख्या = $162.5 \approx 163$ प्रकारे

$\Rightarrow$ किमान दोन चीत (at least two heads) 163 मार्गांनी आढळून येतील.

b) जास्तीत जास्त दोन चीत (at the most two heads) मिळण्याची शक्यता म्हणजेच $r \leq 2$

$\therefore \quad P(r \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$\Rightarrow \quad P(r \leq 2) = \frac{1}{32}\{{}^5C_0 + {}^5C_1 + {}^5C_2\}$

$\Rightarrow \quad P(r \leq 2) = \frac{1}{32}\{1 + 5 + 10\}$

$\Rightarrow \quad P(r \leq 2) = \frac{16}{32}$

$\Rightarrow \quad P(r \leq 2) = 0.5$

$\therefore$ अपेक्षित संख्या (Expected Number) = $N \times p$

$\Rightarrow$ अपेक्षित संख्या = 200×0.5

$\Rightarrow$ अपेक्षित संख्या = 100 प्रकारे

$\Rightarrow$ जास्तीत जास्त दोन चीत (at the most two heads) 100 मार्गांनी आढळून येतील.

6) चांगल्या आवेष्टित पेटीत (well-packed box) असलेल्या **100** प्रेषरोधक (transistors) पैकी **20** प्रेषरोधक दोषयुक्त (defective) आहेत. त्यातील **10** यादृच्छिकपणे (at random) निवडले तर a) सर्व दोषयुक्त नसलेले (non-defective) व b) कमीतकमी एक दोषयुक्त (defective) असलेल्या प्रेषरोधकांची संभाव्यता शोधा.

उत्तर: दोषयुक्त प्रेषरोधकांची संभाव्यता $= \; p \; = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{5}$

आणि दोषयुक्त नसलेले प्रेषरोधकांची संभाव्यता $= \; q \; = \; 1 - p \; = 1 - \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad q = \frac{4}{5}$

10 प्रेषरोधक यादृच्छिकपणे (at random) निवडले म्हणजेच $n \; = \; 10$

$\therefore$ द्विपदीय वितरण द्वारे

$P(r) = {}^{n}C_{r} \, p^{r} \, q^{n-r}$

$\Rightarrow \quad P(r) = {}^{10}C_{r} \left(\frac{1}{5}\right)^{r} \left(\frac{4}{5}\right)^{10-r}$

a) सर्व दोषयुक्त नसलेले (non-defective) म्हणजेच $r \; = \; 0$

$\therefore \quad P(r = 0) \; = \; {}^{10}C_{0} \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \left(\frac{4}{5}\right)^{10-0}$

$\Rightarrow \quad P(0) = 1 \times 1 \times (0.8)^{10}$

$\Rightarrow \quad P(0) = 0.1074 \cdots\cdots\cdots$(i)

b) कमीतकमी एक दोषयुक्त म्हणजेच $r \; \geq 1$

$\therefore \quad P(\, r \geq 1 \,) \; = \; P(1) \; + \; P(2) \; \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \; P(10)$

$\Rightarrow \quad P(\, r \geq 1 \,) \; = 1 \; - \; P(0)$

$\Rightarrow \quad P(\, r \geq 1 \,) \; = \; 1 - 0.1074$ from (i)

$\Rightarrow \quad P(\, r \geq 1 \,) \; = 0.8926$

7) एका बॉक्समध्ये **10** रेडिओ व्हॉल्व्ह आहेत ज्यात **4** दोषयुक्त (defective) आहेत. दोन वाल्व्ह बॉक्समधून घेतल्यास ते दोन्ही दोषयुक्त असल्याची संभाव्यता शोधा.

उत्तर: एकूण रेडिओ व्हॉल्व्ह = 10 आणि दोषयुक्त (defective) रेडिओ व्हॉल्व्ह = 4

∴ दोषयुक्त व्हॉल्व्ह ची संभाव्यता = $p = \frac{4}{10} = 0.4$

आणि दोषयुक्त नसलेले व्हॉल्व्ह ची संभाव्यता = $q = 1 - p = 1 - 0.4 = 0.6$

दोन वाल्व्ह बॉक्समधून घेतलेत ∴ $n = 2$

∴ द्विपदीय वितरण द्वारे

$P(r) = {}^{n}C_{r}\, p^{r}\, q^{n-r}$

$\Rightarrow$ $P(r) = {}^{2}C_{r}\,(0.4)^{r}\,(0.6)^{2-r}$

दोन्ही दोषयुक्त असल्याची संभाव्यता म्हणजेच $r = 2$

∴ $P(r = 2) = {}^{2}C_{2}\,(0.4)^{2}\,(0.6)^{2-2}$

$\Rightarrow$ $P(2) = 0.16$

8) एका पाकिटातील सरासरी **10** पैकी **3** विद्युत घटक (electric components) दोषयुक्त आहेत. जर 4 वस्तू यादृच्छिक (random) आणि चाचणी (test)घेतल्या गेल्या तर एकापेक्षा जास्त दोषयुक्त नसण्याची शक्यता काय आहे?

उत्तर: दिलेले: 10 पैकी 3 विद्युत घटक (electric components) दोषयुक्त आहेत.

∴ दोषयुक्त विद्युत घटकांची संभाव्यता = $p = \frac{3}{10}$

आणि दोषयुक्त नसलेले विद्युत घटकांची संभाव्यता = $q = 1 - p = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

4 विद्युत घटक यादृच्छिकपणे (at random) निवडले म्हणजेच $n = 4$

∴ द्विपदीय वितरण द्वारे

$P(r) = {}^{n}C_{r}\, p^{r}\, q^{n-r}$

$\Rightarrow \quad P(r) = {}^4C_r \left(\frac{3}{10}\right)^r \left(\frac{7}{10}\right)^{4-r}$

एकापेक्षा जास्त दोषयुक्त नसण्याची शक्यता म्हणजेच $r \leq 1$

$\therefore \quad P(r \leq 1) = P(0) + P(1)$

$\Rightarrow \quad P(1) = {}^4C_0 \left(\frac{3}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 + {}^4C_1 \left(\frac{3}{10}\right)^1 \left(\frac{7}{10}\right)^3$

$\Rightarrow \quad P(1) = 1 \times 1 \times (0.7)^4 + 4 \times 0.3 \times (0.7)^3$

$\Rightarrow \quad P(1) = 0.2401 + 0.4116$

$\Rightarrow \quad P(1) = 0.6517$

सराव प्रश्नसंच

1) द्विपदी वितरणचा मध्य (Mean of Binomial Distribution) 20 आणि प्रमाणित विचलन (Standard Deviation) 4 आहे. तर p आणि q च्या किमती काढा.
2) सहा नाणेफेक(toss) मध्ये चार चीत(head) मिळण्याची शक्यता (probability) काढा.
3) पाच नाणेफेक (toss) मध्ये तीन चीत (head) मिळण्याची शक्यता (probability) काढा.
4) १० समसंभाव्य (fair coins) नाणेफेक केल्यास खालील शक्यता तपासा.

   i) बरोबर 3 चीत(head) ii) 3 पेक्षा जास्त चीत(head) नाहीत
5) समसंभाव्य (fair coin) नाणेफेक 10 वेळा केल्यास खालील शक्यता तपासा.

   i) बरोबर 6 चीत(head) ii) कमीत कमी 6 चीत (head)
6) घनीक साचा (cubic die) 4 वेळा फेकल्यास खालील शक्यता प्राप्त करण्याची संभाव्यता काय आहे?

   i) कमीत कमी एक 6(At least one six) ii) सर्व सम क्रमांक(All even numbers)
7) एक साचा (die) 8 वेळा फेकल्यास 3 हा क्रमांक i) बरोबर 2 वेळा ii) कमीत कमी एकदा येण्याची संभाव्यता काय असणार?
8) एका कंपनीद्वारे पेन उत्पादित केल्याची दोषयुक्त (defective) संभाव्यता $\frac{1}{10}$ आहे. जर 12 पेन उत्पादित केले तर i) बरोबर 2 पेन दोषयुक्त ii) कमीत कमी 2 पेन दोषयुक्त असण्याची संभाव्यता काय असणार?
9) कंपनीद्वारे उत्पादित दोषयुक्त (defective) ब्लेडची टक्केवारी 10% आहे. जर पाच ब्लेडचे एक पाकीट यादृच्छिकपणे (at random) निवडले असेल तर बरोबर दोन दोषयुक्त ब्लेड असण्याची शक्यता शोधा.
10) एका मशीनद्वारे उत्पादित सरासरी 10% उत्पादने दोषयुक्त (defective) आहेत. या उत्पादनांमधून चार यादृच्छिकपणे (at random) निवडले असल्यास त्यापैकी एक दोषयुक्त असल्याची शक्यता शोधा.
11) एका विशिष्ट परीक्षेत उमेदवार नापास (fail) होण्याची एकूण टक्केवारी 20 आहे. जर 6 उमेदवार परीक्षेला बसले असतील तर किमान पाच उमेदवार परीक्षा उत्तीर्ण होण्याची शक्यता किती आहे?
12) अडथळ्यांच्या शर्यतीत (hurdle race)एखाद्या खेळाडूला १० अडथळे पार करावे लागतात. तो प्रत्येक अडथळा दूर करेल अशी शक्यता $\frac{5}{6}$ आहे. तो दोन पेक्षा कमी अडथळ्यांना ठोठावण्याची शक्यता काढा.

५.२ **Poisson's Probability Distribution:** (पायसॉन प्रोबेबिलिटी डिस्ट्रीब्यूशन)

पायसॉन वितरण (Poisson distribution) ही एक पृथक वितरण (discrete distribution) असून अत्यंत दुर्मिळ असणाऱ्या आणि मोठ्या संख्येने संधी असणाऱ्या घटनेच्या संभाव्यताशी (probabilities) निगडित आहे. पायसॉन वितरण (Poisson distribution) हा द्विपक्षीय वितरणाचा (binomial distribution) मर्यादित प्रकार आहे. जेव्हा $'p'$ किंवा $'q'$ फारच लहान असतो आणि $'n'$ पुरेसा मोठा असतो तेव्हा द्विपक्षीय वितरणाची जागा पायसॉन वितरण घेतो. तो $'n'$ फार मोठा आणि $'p'$ फारच छोटा बनवून, $np = m$ (स्थिर) असतो म्हणजेच यशांची सरासरी संख्या (average number of success) मर्यादित स्थिर (finite constant)असते.

अशा प्रकारे, पायसॉन वितरण संभाव्यता वितरण म्हणून खालील सूत्राने परिभाषित केले जाते.

$$P(r) = \frac{e^{-m}\, m^{r}}{r!} \;;\; r = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, n$$

येथे m ला e^{-m} वितरणाचे(distribution) प्राचल (parameter) असे म्हणतात

- पायसॉन वितरणाचे गुणधर्म (Properties of Poisson Distribution):

a) पायसॉन वितरण मध्य (Mean of Poisson Distribution)

$$m = np$$

b) पायसॉन वितरण प्रमाण विचलन (Standard Deviation of Poisson Distribution)

$$S.D. = \sigma = \sqrt{m}$$

c) पायसॉन वितरण प्रचरण (variance of Poisson Distribution)

$$\sigma^2 = m$$

सोडविलेले उदाहरणे

1) पायसॉन वारंवारता वितरणात (Poisson frequency distribution) 2 यशांची (successes) वारंवारता हि 3 यशाच्या वारंवारिताच्या निम्मे (half the frequency) असते. तर त्याचा मध्य आणि मानक विचलन (mean and standard deviation) शोधा.

उत्तर: दिलेले: 2 यशांची (successes) वारंवारता = $\frac{1}{2} \times$ 3 यशांची वारंवारता

$\therefore$ पायसॉन वितरण (Poisson distribution) द्वारे

2 यशाशी संबंधित वारंवारता = $\frac{e^{-m} \cdot m^2}{2!}$

आणि 3 यशाशी संबंधित वारंवारता = $\frac{e^{-m} \cdot m^3}{3!}$

$\therefore \quad \frac{e^{-m} \cdot m^2}{2!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-m} \cdot m^3}{3!}$

$\Rightarrow \quad 1 = \frac{m}{6}$

$\Rightarrow$ मध्य $= m = 6$

$\therefore$ मानक विचलन (Standard Deviation) $= S.D. = \sigma = \sqrt{m}$

$\Rightarrow$ मानक विचलन $= \sqrt{6}$

$\Rightarrow$ मानक विचलन $= 2.4495$

2) **100** विद्युत दिव्यांच्या (electric bulbs) नमुन्यामध्ये जर कंपनीने उत्पादित (manufactured) केलेल्या **5**% विद्युत दिवे दोषयुक्त (defective) असतील तर पायसॉन वितरण (Poisson distribution) वापरुन मध्य (mean) शोधा.

उत्तर: दिलेले: $p = 5\% = \frac{5}{100} = 0.05$ आणि $n = 100$

$\therefore$ मध्य (Mean)$= m = np$

$\Rightarrow$ मध्य $= 100 \times 0.05$

$\Rightarrow$ मध्य $= 5$

3) जर याद्दच्छिक चल (**random variable)** मध्ये पायसॉन वितरण (Poisson distribution) असल्यास जसे की $\mathbf{P(1) = P(2)}$ तर $\mathbf{P(4)}$ शोधा.

उत्तर: पायसॉन वितरण $P(r) = \dfrac{e^{-m} \cdot m^r}{r\,!}$

दिलेले: $P(1) = P(2)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{e^{-m} \cdot m^1}{1\,!} = \dfrac{e^{-m} \cdot m^2}{2\,!}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{m}{1} = \dfrac{m^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m = 2$

$\therefore \quad P(4) = \dfrac{e^{-2} \cdot 2^4}{4!} = 0.0902$

4) एका कंपनीने उत्पादित (manufactured) केलेल्या विद्युत दिव्यांमध्ये **3**% विद्युत दिवे दोषयुक्त (defective) आहेत. **100** दिव्यांच्या नमुन्यात (sample) **5** दिवे दोषयुक्त असण्याची संभाव्यता (probability) शोधा. (**दिलेले: $\mathbf{e^{-3} = 0.04979}$**)

उत्तर: दिलेले: $p = 3\% = \dfrac{3}{100} = 0.03$ आणि $n = 100$

$\therefore \quad$ मध्य (Mean)= $m = np$

$\Rightarrow \quad m = 100 \times 0.03$

$\Rightarrow \quad m = 3$

$\therefore \quad$ पायसॉन वितरण (Poisson distribution) द्वारे

$P(r) = \dfrac{e^{-m} \cdot m^r}{r\,!}$

$\Rightarrow \quad P(r) = \dfrac{e^{-3} \cdot (3)^r}{r!}$

5 दिवे दोषयुक्त असण्याची संभाव्यता म्हणजेच $r = 5$

$\Rightarrow \quad P(r = 5) = \dfrac{e^{-3} \cdot (3)^5}{5!}$

$\Rightarrow \quad P(r = 5) = \dfrac{0.04979 \times 243}{120}$

$\Rightarrow \quad P(r = 5) = 0.1008$

5) वस्तू दोषयुक्त होण्याची शक्यता $\mathbf{0.005}$ आहे. $\mathbf{200}$ वस्तूच्या नमुन्यांत **3** वस्तू दोषयुक्त असण्याची शक्यता काय असणार ? (दिलेले: $\mathbf{e^{-1} = 0.3679}$)

उत्तर: दिलेले:: p = 0.005 आणि n = 200

$\therefore$ मध्य (Mean)= $m = np$

$\Rightarrow$ $m = 200 \times 0.005$

$\Rightarrow$ $m = 1$

$\therefore$ पायसॉन वितरण (Poisson distribution) द्वारे

$$P(r) = \frac{e^{-m} \cdot m^r}{r\,!}$$

$$\Rightarrow \quad P(r) = \frac{e^{-1} \cdot (1)^r}{r!}$$

3 वस्तू दोषयुक्त असण्याची संभाव्यता म्हणजेच $r = 3$

$$\Rightarrow \quad P(r = 3) = \frac{e^{-1} \cdot (1)^3}{3!}$$

$$\Rightarrow \quad P(r = 3) = \frac{0.3679}{6}$$

$$\Rightarrow \quad P(r = 3) = 0.0613$$

6) पायसॉन वितरण चा वापर करून **104** क्रमागत चाचण्यांमध्ये (consecutive trials) किमान एकदा तरी चांगले पिसलेल्या पत्त्यांच्या रास (pack of well-shuffled cards) वरून इस्पिकचा एक्का (ace of spades) काढला जाण्याची शक्यता शोधा.

उत्तर: इस्पिकच्या एक्का ची संभाव्यता $= p = \frac{1}{52}$ आणि $n = 104$

$\therefore$ मध्य (Mean)= $m = np$

$\Rightarrow$ $m = 104 \times \frac{1}{52}$

$\Rightarrow$ $m = 2$

$\therefore$ पायसॉन वितरण (Poisson distribution) द्वारे

$$P(r) = \frac{e^{-m} \cdot m^r}{r\,!}$$

$\Rightarrow$ $$P(r) = \frac{e^{-2} \cdot (2)^r}{r!}$$

104 चाचण्यांमध्ये किमान एकदातरी येण्याची संभाव्यता म्हणजेच $r \geq 1$

$\Rightarrow$ $P(r \geq 1) = p(1) + p(2) + p(3) + \cdots\cdots\cdots + p(104)$

$\Rightarrow$ $P(r \geq 1) = 1 - P(0)$

$\Rightarrow$ $$P(r \geq 1) = 1 - \frac{e^{-2} \times 2^0}{0!}$$

$\Rightarrow$ $P(r \geq 1) = 1 - e^{-2}$

$\Rightarrow$ $P(r \geq 1) = 1 - 0.1353$

$\Rightarrow$ $P(r \geq 1) = 0.8647$

7) टॅक्सी चालकांकडून झालेल्या रस्ता अपघातांची संख्याची सरासरी 2 आहे. शहरातील **5000** टॅक्सीपैकी अपघाताची पूर्तता न करणाऱ्या वाहन चालकांची संख्या शोधा. (दिलेले: $\mathbf{e^{-2} = 0.1353}$)

उत्तर: इथे $m = 2$ आणि $n = 5000$

$\therefore$ पायसॉन वितरण (Poisson distribution) द्वारे

$$P(r) = \frac{e^{-m} \cdot m^r}{r\,!}$$

$\Rightarrow$ $$P(r) = \frac{e^{-2} \cdot (2)^r}{r!}$$

अपघाताची पूर्तता न करणाऱ्या वाहन चालकांची संख्या संभाव्यता म्हणजेच $r = 0$

$\therefore$ $$P(r = 0) = \frac{e^{-2} \cdot (2)^0}{0!}$$

$\Rightarrow$ $$P(r = 0) = \frac{e^{-2}}{1}$$

$\Rightarrow$ $P(r = 0) = 0.1353$

$\therefore$ वाहन चालकांची संख्या $= 0.1353 \times 5000$

$\Rightarrow$ वाहन चालकांची संख्या $= 676.67 \approx 677$

8) पाते बनविण्याच्या ठराविक कारखान्यात कोणत्याही एक पाते मध्ये दोषयुक्त असण्याची संधी $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$ आहे. पाते **10** च्या पाकीट मध्ये पुरवले जातात. **10000** मालप्रेष पाकीट मध्ये एक दोषयुक्त पाते असलेल्या पाकिटांची संभाव्यता शोधा. (दिलेले: $\mathbf{e^{-3} = 0.04979}$)

उत्तर: इथे $N = 10000 ; n = 10 ; p = \frac{1}{500}$

$\therefore$ मध्य (Mean)$= m = np$

$\Rightarrow$ $m = 10 \times \frac{1}{500}$

$\Rightarrow$ $m = \frac{1}{50}$

$\Rightarrow$ $m = 0.02$

$\therefore$ पायसॉन वितरण (Poisson distribution) द्वारे

$$P(r) = \frac{e^{-m} \cdot m^r}{r\,!}$$

$$\Rightarrow \quad P(r) = \frac{e^{-0.02} \cdot (0.02)^r}{r!}$$

एक दोषयुक्त पाते ची संभाव्यता म्हणजेच $r = 1$

$$\Rightarrow \quad P(1) = \frac{e^{-0.02} \cdot (0.02)^1}{1!}$$

$\Rightarrow$ $P(1) = 0.9802 \times 0.02$

$\Rightarrow$ $P(1) = 0.0196$

$\therefore$ एक दोषयुक्त पाते असलेल्या पाकिटांची संख्या = $N \times P(1)$

$\Rightarrow$ एक दोषयुक्त पाते असलेल्या पाकिटांची संख्या= 10000×0.0196

$\Rightarrow$ एक दोषयुक्त पाते असलेल्या पाकिटांची संख्या $\cong$ 196 Packets .

Exercise

1) पायसॉन वितरण साठी जर x = 0 ची संभाव्यता 0.102 आहे. तर त्याचा मध्य आणि मानक विचलन (mean and standard deviation) काढा. P(1) आणि P(2) देखील काढा.

2) पायसॉन वितरण साठी जर $P(1) = 2 \times P(2)$. तर P(3) काढा.

3) पायसॉन वितरण साठी जर $P(1) = 0.0149$ आणि $P(2) = 0.0446$. तर P(3) काढा.

4) एका कंपनीने उत्पादित (manufactured) केलेल्या विद्युत दिव्यांमध्ये 2% विद्युत दिवे दोषयुक्त (defective) आहेत. 100 दिव्यांच्या नमुन्यात(sample) a) 3 दिवे b) जास्तीत जास्त 2 दिवे दोषयुक्त असण्याची संभाव्यता (probability) काढा.

5) असे गृहीत धरले की एका कारखान्यात थकवामुळे (due to fatigue) होणाऱ्या वार्षिक अपघातांची संभाव्यता $\frac{1}{1200}$ आहे. जर कारखान्यात 300 कामगार असतील तर कमीत कमी 2 वार्षिक अपघात थकवामुळे होतील याची संभाव्यता काढा. (दिलेले: $e^{-0.25} = 0.7788$)

6) उत्पादकास(manufacture) माहित असते की त्याने तयार केलेल्या धारी (condensers) मध्ये सरासरी 1% दोष (defect)असतो. तो त्यांना 100 च्या बॉक्समध्ये पॅक करतो. यादृच्छिकपणे (at random) निवडलेल्या बॉक्समध्ये 3 किंवा अधिक दोषयुक्त धारी असण्याची शक्यता काय असणार? (दिलेले: $e^{-1} = 0.36788$)

7) एका पुस्तकात 100 पृष्ठांवर यादृच्छिकपणे (randomly) वितरित 100 चुकीचे ठसे (misprints) आहेत. यादृच्छिकपणे (at random) पाहिलेल्या पृष्ठामध्ये कमीतकमी 2 चुकीचे ठसे असल्याची संभाव्यता काय आहे?

8) एक स्वयंचलित मशीन (automatic machine) तारकुंडल (wire coils) पासून पेपर क्लिप्स बनवते. सरासरी 400 पेपर क्लिप्स पैकी एक पेपर क्लिप दोषयुक्त (defective)आहे. जर पेपर क्लिप 100 च्या बॉक्समध्ये बंद केल्या असतील तर कोणत्याही बॉक्समध्ये कमीतकमी एक पेपर क्लिप दोषयुक्त असण्याची शक्यता किती असणार? (दिलेले: $e^{-0.25} = 0.7787$)

9) एक व्यवसाय संस्था (firm) 500 लेखांपैकी 0.1 टक्के दोषयुक्त लेखांचे उत्पादन करते. घाऊक व्यापारांनी अशी 100 नमुने विकत घेतल्यास, त्यात एक लेख दोषयुक्त असण्याची अपेक्षा किती असणार? (दिलेले: $e^{-0.5} = 0.6065$)

10) रुंधाटी गावात स्थायिक झालेल्या कंपनीत मोठ्या प्रमाणात यांत्रिक भाग (machine parts) तयार होतात. असे आढळून आले आहे की २० च्या नमुन्यात (sample) सरासरी फक्त २ यांत्रिक भाग दोषयुक्त असतात. अशा १००० नमुन्यांपैकी कमीतकमी तीन दोषयुक्त यांत्रिक भाग असण्याची अपेक्षा किती असणार?

६.४ प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) (नॉर्मल प्रोबेबिलिटी डिस्ट्रीब्यूशन)

पूर्वी चर्चा केलेली संभाव्यता वितरण (probability distribution) भिन्न वितरण (discrete distributions) होते. प्रसामान्य वितरण (normal distribution) म्हणजे संतत वितरण (continuous distribution). सांख्यिकीय पद्धतींच्या (statistical methods) अभ्यासामध्ये प्रसामान्य वितरण महत्त्वपूर्ण भूमिका बजावते.

- व्याख्या (Definition):

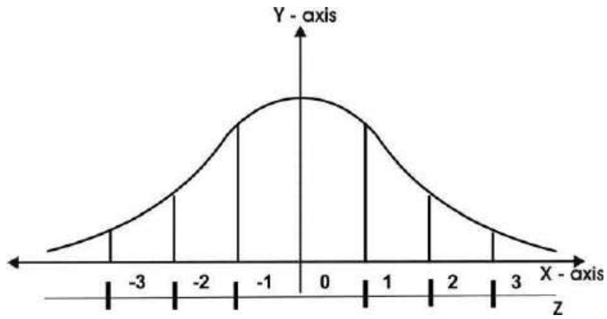
जर संतत यादृच्छिक चल (continuous random variable) x हे प्रसामान्य वितरणाचे (normal distribution) अनुसरण करत असेल तर त्याचे संभाव्यता घनता फल (probability density function) खालील प्रमाणे असते.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \quad ; -\infty \leq \ \bar{x} \leq \infty \text{ आणि } \sigma > 0$$

- मानक प्रसामान्य वितरणाचे रूप (Standard form of Normal Distribution):

जर x हा प्रसामान्य यादृच्छिक चल(normal random variable) असेल व त्याचा मध्य(mean) $\bar{x}$ आणि मानक विचलन(standard deviation) σ असेल तर यादृच्छिक चल(random variable) $z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$ हा प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) असतो व त्याचा मध्य 0 आणि मानक विचलन 1 असते. या यादृच्छिक चल(random variable) z याला मानक प्रसामान्य यादृच्छिक चल(standard normal random variable) असे म्हणतात.

येथे वितरणाचे मध्य(mean) $\bar{x}$ व मानक विचलन(standard deviation) σ आहेत आणि त्यांना प्रसामान्य वितरणाचे मापदंड(parameters of the normal distribution) म्हणतात. प्रसामान्य वितरणाचा आलेख (graph of normal distribution) याला प्रसामान्य संभाव्यता वक्र (normal probability curve) असे म्हणतात आणि तो घंटाकार वक्र (bell-shaped curve) असतो.



जसजसे x वाढत जाईल तसतसे y लहान आणि लहान बनत जातो मात्र शून्य होत नाही. याचा अर्थ असा आहे की वक्र क्षैतिज अक्षांपर्यंत(horizontal axis) पोहोचतो परंतु कधीही त्याला स्पर्श करत नाही. वाय-अक्ष वक्रास दोन समान भागांमध्ये विभागतो. $z = -\infty$ ते $z = \infty$ पर्यंत वक्र अंतर्गत एकूण क्षेत्रफळ(total area) 1 असते. अशा प्रकारे, हे क्षेत्र Y- अक्षाद्वारे दोन भागांमध्ये समान प्रमाणात विभागले गेले आहे. $Z = 0$ च्या डावीकडील आणि उजवीकडील क्षेत्र(left & right hand side area) 0.5 च्या बरोबरीचे आहे

सोडविलेले उदाहरणे

1) **1000** विद्यार्थ्यांच्या नमुन्यात, विशिष्ट चाचणीचे मध्य (mean) **14** आणि प्रमाणित विचलन (standard deviation) **2.5** आहे. दिलेले वितरण (Distribution) हे प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) गृहीत धरून किती विद्यार्थी **12** ते **15** दरम्यान गुण मिळवतील?

दिलेले: $\mathbf{A(0.8) = 0.2881}$; $\mathbf{A(0.4) = 0.1554}$

उत्तर: दिलेले: $N = 1000$; मध्य = $\bar{x} = 14$ आणि प्रसामान्य वितरण $= S.D. = \sigma = 2.5$

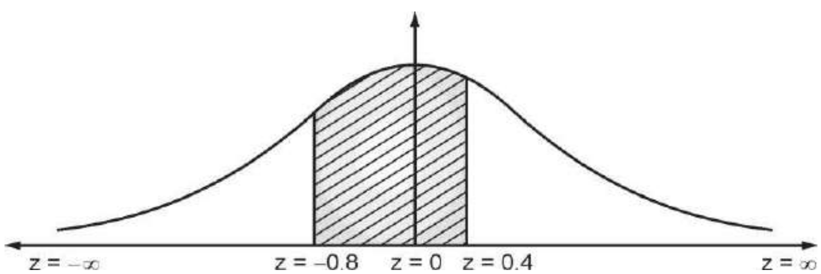
$\therefore$ मानक प्रसामान्य इच्छिक चल (standard normal random variable)

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{x - 14}{2.5}$$

चला $x_1 = 12$ आणि $x_2 = 15$

$$\therefore \quad z_1 = \frac{x - 14}{2.5} = \frac{12-14}{2.5} = -0.8 \text{ आणि } z_2 = \frac{x - 14}{2.5} = \frac{15-14}{2.5} = 0.4$$



आता $P(12 \le x \le 15) = A(-0.8 < z < 0.4)$

$\Rightarrow \quad P(12 \le x \le 15) = A(-0.8 < z < 0) + A(0 < z < 0.4)$

$\Rightarrow \quad P(12 \le x \le 15) = A(0 < z < 0.8) + A(0 < z < 0.4)$

$\Rightarrow \quad P(12 \le x \le 15) = 0.2881 + 0.1554$

$\Rightarrow \quad P(12 \le x \le 15) = 0.4435$

$\therefore$ विद्यार्थ्यांची आवश्यक संख्या (number of students) = $N \times P$

$\Rightarrow$ विद्यार्थ्यांची आवश्यक संख्या $= 1000 \times 0.4435 = 443.5 \approx 444$

$\Rightarrow$ 15 ते 15 दरम्यान गुण मिळविणारी एकूण 444 विद्यार्थी आहेत.

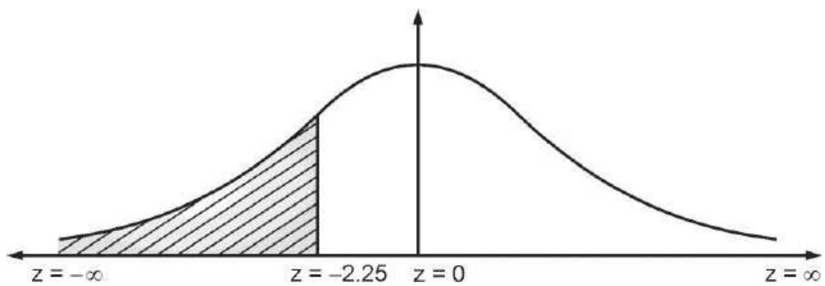
2) एका विशिष्ट परीक्षेत 500 विद्यार्थी हजर होते. मध्य (mean) 68 आणि प्रमाणित विचलन (S.D.) 8 आहे. तर a) 50 पेक्षा कमी b) 84 पेक्षा जास्त गुण मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या शोधा.

दिलेले: $\mathbf{A(2) = 0.4772}$; $\mathbf{A(2.25) = 0.4878}$

उत्तर: दिलेले: $N = 500$; मध्य = $\bar{x} = 68$ आणि प्रसामान्य वितरण = $S.D. = \sigma = 8$

$\therefore$ मानक प्रसामान्य इच्छिक चल (S.D.) $= z = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{x - 68}{8}$

a) 50 पेक्षा कमी: $x = 50 \quad \therefore \quad z = \dfrac{50 - 68}{8} = -2.25$



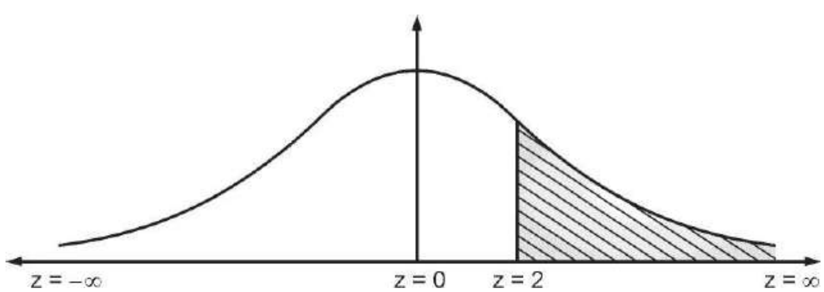
आता $P(x \le 50) = 0.5 - A(-2.25 < z < 0)$

$\Rightarrow \quad P(x \le 50) = 0.5 - A(0 < z < 2.25)$

$\Rightarrow \quad P(x \le 50) = 0.5 - 0.4878 = 0.0122$

$\therefore$ विद्यार्थ्यांची आवश्यक संख्या = $N \times P = 500 \times 0.0122 \approx 6$

b) 84 पेक्षा जास्त: $x = 84 \quad \therefore \quad z = \dfrac{84 - 68}{8} = 2$



आता $P(x \ge 84) = 0.5 - A(0 < z < 2) = 0.5 - 0.4772$

$\Rightarrow \quad P(x \ge 84) = 0.0228$

$\therefore$ विद्यार्थ्यांची आवश्यक संख्या = $N \times P = 500 \times 0.0228 \approx 11$

3) **100** पेषण यंत्रांची (grinding machines) रचना अशी केली कि जेणेकरून त्याच्या उत्पादित दंडाचा (production shafts) सरासरी व्यास (average diameter) **10.10 cm** आणि **0.20 cm** मानक विचलन (**S.D.**) असेल. दंड व्यास **10.05 cm** ते **10.20 cm** दरम्यान उत्पादन वैशिष्ट्ये असलेल्या पेषण यंत्रांची संख्या काढा. दिलेले: $\mathbf{A(0.25) = 0.0987}$; $\mathbf{A(0.5) = 0.1915}$

उत्तर: दिलेले: मध्य = $\bar{x} = 10.10$ cm आणि प्रसामान्य वितरण = $S.D. = \sigma = 0.20$

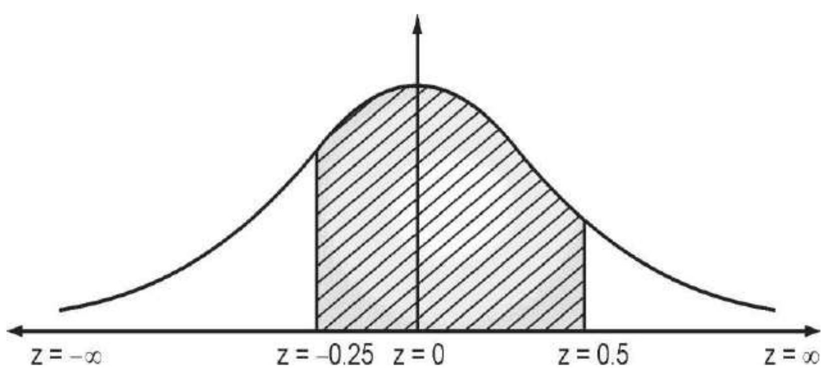
$\therefore$ मानक प्रसामान्य दच्छिक चल $(S.D.) = z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$

$\Rightarrow \quad z = \frac{x - 10.10}{0.20}$

चला $x_1 = 10.05$ आणि $x_2 = 10.20$

$\therefore \quad z_1 = \frac{x - 10.10}{0.20} = \frac{10.05 - 10.19}{0.20} = -0.25$

आणि $z_2 = \frac{x - 10.10}{0.20} = \frac{10.20 - 10.10}{0.20} = 0.5$



आता $P(10.05 \le x \le 10.20) = A(-0.25 < z < 0.5)$

$\Rightarrow \quad P(10.05 \le x \le 10.20) = A(-0.25 < z < 0) + A(0 < z < 0.5)$

$\Rightarrow \quad P(10.05 \le x \le 10.20) = A(0 < z < 0.25) + A(0 < z < 0.5)$

$\Rightarrow \quad P(10.05 \le x \le 10.20) = 0.0987 + 0.1915$

$\Rightarrow \quad P(10.05 \le x \le 10.20) = 0.2902$

4) जर **1000** व्यक्ती प्रत्येक वेळेस **100** वेळा नाणी फेक (coin toss) करतात तर **40** ते **60** च्या दरम्यान चीत (heads) मिळालेल्या अपेक्षित व्यक्तींची संख्या काढा. दिलेले: $\mathbf{A(2) = 0.4772}$

उत्तर: दिलेले: चीत (heads) मिळण्याची शक्यता = पट (tail) मिळण्याची शक्यता $= \frac{1}{2}$

$\therefore \quad p = q = \frac{1}{2}$; $n = 100$ आणि $N = 1000$

मध्य(Mean) $= \bar{x} = np = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

आणि प्रसामान्य वितरण $= \sigma = S.D. = \sqrt{npq}$

$\Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{25}$

$\Rightarrow \quad \sigma = 5$

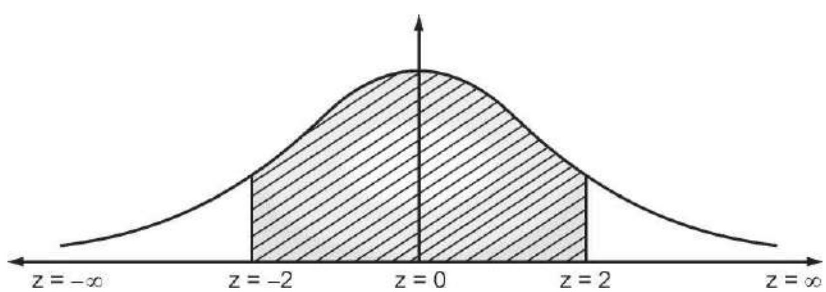
मानक प्रसामान्य इच्छिक चल (standard normal random variable)= $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$

$\Rightarrow \quad z = \frac{x - 50}{5}$

चला $x_1 = 40$ आणि $x_2 = 60$

$\therefore \quad z_1 = \frac{x - 50}{5} = \frac{40 - 50}{5} = -2$

आणि $z_2 = \frac{x - 50}{5} = \frac{60 - 50}{5} = 2$



$\therefore \quad z = -2$ ते $z = 2$ मधील क्षेत्रफळ (Area)

Area between $z = -2$ to $z = 2$ is

क्षेत्रफळ (Area) $= z = 0$ ते $z = 2$ मधील क्षेत्रफळ + $z = 0$ ते $z = 2$ मधील क्षेत्रफळ

$\Rightarrow$ क्षेत्रफळ (Area) $= 2 \times (z = 0$ ते $z = 2$ मधील क्षेत्रफळ$)$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफळ (Area) $= 2 \times 0.4772$

$\Rightarrow$ क्षेत्रफळ (Area) $= 0.9544$

$\therefore$ $P(40 < x < 60) = P(-2 \leq z \leq 2) = 0.9544$

$\therefore$ चीत (heads) मिळालेल्या अपेक्षित व्यक्तींची संख्या = $N \times P$

$\Rightarrow$ चीत (heads) मिळालेल्या अपेक्षित व्यक्तींची संख्या = 1000×0.9544

$\Rightarrow$ चीत (heads) मिळालेल्या अपेक्षित व्यक्तींची संख्या = 954.4

$\Rightarrow$ चीत (heads) मिळालेल्या अपेक्षित व्यक्तींची संख्या ≈ 954

5) एखाद्या उत्पादकास अनुभवावरून माहित असते की त्याने तयार केलेल्या प्रतिरोधकांचा प्रतिकार **(resistance of resistors)** प्रसामान्य **(normal)** असून त्याची सरासरी **100** ओम **(ohms)** आणि मानक विचलन **(S.D.) 2** ओम आहे. तर **98** ओम आणि **102** ओम दरम्यान प्रतिरोधकांपैकी किती टक्के प्रतिरोध **(resistor)** असेल? दिलेले: **A(1)= 0.3413**

उत्तर: दिलेले: मध्य $= \bar{x} = 100$ आणि प्रसामान्य वितरण $= S.D. = \sigma = 2$

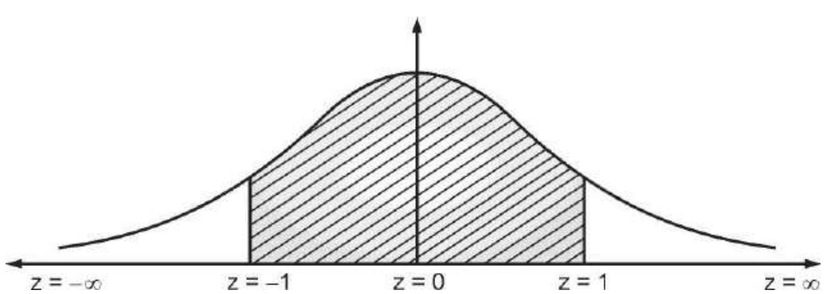
$\therefore$ मानक प्रसामान्य इच्छिक चल $(S.D.) = z = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$

$\Rightarrow$ $z = \dfrac{x - 100}{2}$

चला $x_1 = 98$ आणि $x_2 = 102$

$\therefore$ $z_1 = \dfrac{x - 100}{2} = \dfrac{98 - 100}{2} = -1$

आणि $z_2 = \dfrac{x - 100}{2} = \dfrac{102 - 100}{2} = 1$



आता $P(98 \leq x \leq 102) = A(-1 < z < 1)$

$\Longrightarrow$ $P(98 \leq x \leq 102) = A(-1 < z < 0) + A(0 < z < 1)$

$\Longrightarrow$ $P(98 \leq x \leq 102) = 2 \times A(0 < z < 1)$

$\Longrightarrow$ $P(98 \leq x \leq 102) = 2 \times 0.3413$

$\Longrightarrow$ $P(98 \leq x \leq 102) = 0.6826$

$\therefore$ प्रतिरोधक टक्केवारी $= 0.6826 \times 100$

$\Longrightarrow$ प्रतिरोधक टक्केवारी $= 68.26\ \%$

सराव प्रश्नसंच

1) 1000 विद्यार्थ्यांच्या नमुन्यात, विशिष्ट चाचणीचे मध्य (mean) 14 आणि प्रमाणित विचलन (standard deviation) 2.5 आहे. दिलेले वितरण (Distribution) हे प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) गृहीत धरून 18 वर्षांपेक्षा जास्त विद्यार्थी किती आहेत? दिलेले: A(1.6) = 0.4452

2) एका विशिष्ट परीक्षेत 500 विद्यार्थी हजर होते. मध्य (mean) 68 आणि प्रमाणित विचलन (S.D.) 8 आहे. तर 60 पेक्षा जास्त गुण मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या शोधा. दिलेले: A (1) = 0.3413

3) एक कारखाना 2040 तासांचे मध्य (mean) आणि 60 तासांचे प्रमाणित विचलन (standard deviation) असलेल्या 2000 विद्युत दिव्यांचे उत्पादन करते. दिलेले वितरण (Distribution) हे प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) गृहीत धरून 2150 तासापेक्षा जास्त आयुष्य असलेल्या विद्युत दिव्यांची संख्या शोधा. दिलेले: A(1.83) = 0.4667

4) एक कारखाना 2040 तासांचे मध्य (mean) आणि 60 तासांचे प्रमाणित विचलन (standard deviation) असलेल्या 2000 विद्युत दिव्यांचे उत्पादन करते. दिलेले वितरण (Distribution) हे प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) गृहीत धरून 1920 तास ते 2160 तास दरम्यान आयुष्य असलेल्या विद्युत दिव्यांची संख्या शोधा. दिलेले: A(2) = 0.4772

5) एक कारखाना 2040 तासांचे मध्य (mean) आणि 60 तासांचे प्रमाणित विचलन (standard deviation) असलेल्या 2000 विद्युत दिव्यांचे उत्पादन करते. दिलेले वितरण (Distribution) हे प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) गृहीत धरून 1960 कमी तासापेक्षा जास्त आयुष्य असलेल्या विद्युत दिव्यांची संख्या शोधा. दिलेले: A(1.33)= 0.4082

6) विशिष्ट प्रकारच्या इलेक्ट्रॉनिक उपकरणांचा आयुष्यमान(lifetime) मध्य (mean) 300 तास आणि प्रमाणित विचलन (standard deviation) 25 तासांचा आहे. यापैकी कोणत्याही इलेक्ट्रॉनिक उपकरणांचे आयुष्यमान 350 तासांपेक्षा जास्त असण्याची संभाव्यता शोधा. दिलेले: A(2) = 0.4772

7) 20 दिवसाच्या प्रमाणित विचलन(standard deviation) सह दिव्यांचे सरासरी आयुष्य(average life) 120 दिवस आहे. कारखान्यात 1000 बल्ब खरेदी केलेत तर 90 दिवसांपेक्षा कमी कालावधीत किती बल्ब कालबाह्य(expire) होतील? दिलेले: A(1.5) = 0.4332

8) बुद्धिगुणांक (Intelligent Quotient) सामान्यत: सरासरी (average) 100 आणि प्रमाणित विचलन (standard deviation) 15 सह वितरित केले जाते. यादृच्छिकपणे निवडलेल्या व्यक्ती (randomly selected person) ज्यांचा बुद्धिगुणांक a) 130 पेक्षा जास्त व b) 85 ते 115 दरम्यान असेल तर त्याची संभाव्यता शोधा. दिलेले: A(2) = 0.4772; A(1) = 0.3413

9) विद्यार्थ्यांना दिलेल्या बुद्धिमत्ता चाचणी (intelligence test) मध्ये सरासरी (average) 90 आणि प्रमाणित विचलन (standard deviation) 20 आहे. तर 100 पेक्षा जास्त बुद्धिमत्ता पातळी (intelligence level) असलेल्या विद्यार्थ्यांची टक्केवारी शोधा. दिलेले: A(0.5) = 0.1915

10) 1000 दिव्यांचे नमुन्याचे मध्य (mean) 1620 तास आणि प्रमाणित विचलन (standard deviation) 300 तास आहे. 900 तासांच्या उपयुक्त आयुष्यानंतर (after useful life) ज्या दिव्यांचा नाश होईल त्यांची संख्या शोधा. दिलेले: A(2.4) = 0.4918

Normal Distribution Table

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	0.7	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	0.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	0.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3486	3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4790	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4965	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987.	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Laplace Transform and Inverse Laplace Transform

लाप्लास रुपांतर आणि व्यस्त लाप्लास रुपांतर

(हा घटक केवळ ट्युटोरिअलसाठी आहे)

- व्याख्या (Definition): जर $f(t)$ हे t च्या सर्व सकारात्मक मूल्यांसाठी (positive values) परिभाषित (defined) केलेले फल (function) असेल तर $f(t)$ चे लाप्लास रुपांतर $L\{f(t)\}$ या चिन्हाने दर्शवितात व त्याची व्याख्या खालीलप्रमाणे:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

मात्र सदरचे संकलन (integration) अस्तित्वात (exist) असणे आवश्यक आहे आणि s हा प्राचल (parameter) वास्तव(real) किंवा संमिश्र (complex)असेल. स्पष्टपणे $L\{f(t)\}$ हे 's' चे फल (function) आहे आणि त्यास $\bar{f}(s)$ या चिन्हाने दर्शवू शकतो.

$\therefore \quad L\{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$

t च्या सर्व सकारात्मक मूल्यांसाठी (positive values) परिभाषित केलेले फल (function) $f(t)$ पासून $\bar{f}(s)$ मिळवणाऱ्या प्रक्रियेला लाप्लास रुपांतर (Laplace Transformation) असे म्हणतात.

अशा प्रकारे आपण $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$; $L\{y(t)\} = \bar{y}(s)$; $L\{g(t)\} = \bar{g}(s)$ असे लिहू शकतो

- प्रमाण फलांचे लाप्लास रुपांतर (Laplace Transformation of Standard Functions):

1. $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$; $s > 0$ इथे $n = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots$
2. $L\{1\} = \frac{1}{s}$, $s > 0$
3. $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $s > 0$
4. $L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$
5. $L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
6. $L\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$

7. $L\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$, $s > |a|$

8. $L\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$, $s > |a|$

➢ लाप्लास रूपांतर चे गुणधर्म (Properties of Laplace Transform):

1. एकमितीत्व गुणधर्म (Linearity Property):

   जर a आणि b हे दोन स्थिरांक (constants) असतील तर

   $L\{a\, f_1(t) \pm b\, f_2(t)\} = a\{L(f_1(t))\} + b\{L(f_2(t))\}$

2. प्रथम विस्थापन गुणधर्म (First Shifting Property):

   जर $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ तर

   $L\{e^{at}.f(t)\} = \bar{f}(s-a)$

   $L\{e^{-at}.f(t)\} = \bar{f}(s+a)$

3. द्वितीय विस्थापन गुणधर्म (Second Shifting Property):

   जर $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ आणि

   $$F(t) = \begin{cases} f(t-a) & ; \; t > a \\ 0 & ; \; t < a \end{cases}$$

   तर $L\{F(t)\} = e^{-as}.\bar{f}(s)$

4. ‘t’ गुणन गुणधर्म (Multiplication by ‘t’ Property):

   जर $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ तर

   $L\{t\, f(t)\} = -\frac{d}{ds}\bar{f}(s)$

   $L\{t^2\, f(t)\} = (-1)^2.\frac{d^2}{ds^2}\bar{f}(s)$

   $L\{t^n\, f(t)\} = (-1)^n.\frac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s)$

5. ‘t’ विभाजन गुणधर्म (Division by ‘t’ Property):

जर $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ तर

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \bar{f}(s)\, ds$$

6. विकलनाचे लाप्लास रुपांतर (Laplace Transform of Derivative):

जर $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ तर

$$L\{f'(t)\} = s\,\bar{f}(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s^2\,\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$L\{f'''(t)\} = s^3\,\bar{f}(s) - s^2 f(0) - sf'^{(0)} - f''(0)$$ इत्यादी.

7. संकलनाचे लाप्लास रुपांतर (Laplace Transform of Integration):

जर $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ तर

$$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}\,\bar{f}(s)$$

सोडविलेले उदाहरणे

1) $L\left\{t^2 - e^{-3t} + \frac{4}{5}\right\}$ **काढा.**

उत्तर: $L\left\{t^2 - e^{-3t} + \frac{4}{5}\right\}$

$= L\{t^2\} - L\{e^{-3t}\} + \frac{4}{5} L\{1\}$

$= \frac{2!}{s^3} - \frac{1}{s+3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{s}$ $\quad \because \quad L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$= \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+3} + \frac{4}{5s}$

2) $L\{\sin 3t + \cos 2t\}$ **काढा.**

उत्तर: $L\{\sin 3t + \cos 2t\}$

$= L\{\sin 3t\} + L\{\cos 2t\}$

$= \frac{3}{s^2 + 3^2} + \frac{s}{s^2 + 2^2}$

$= \frac{3}{s^2 + 9} + \frac{s}{s^2 + 4}$

3) $L\{3e^{at} - 2\sin 8t\}$ **काढा.**

उत्तर: $L\{3e^{at} - 2\sin 8t\}$

$= 3L\{e^{at}\} - 2L\{\sin 8t\}$

$= 3\frac{1}{s-a} - 2\frac{8}{s^2 + 8^2}$

$= \frac{3}{s-a} - \frac{16}{s^2 + 64}$

4) $L\{\cos(at+b)\}$ **काढा.**

उत्तर: $L\{\cos(at+b)\}$

$= L\{\cos at \cos b - \sin at \sin b\} \quad \because \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$= \cos b \ L\{\cos at\} - \sin b \ L\{\sin at\}$

$= \cos b \dfrac{s}{s^2+a^2} - \sin b \dfrac{a}{s^2+a^2}$

$= \dfrac{s \cos b}{s^2+a^2} - \dfrac{a \sin b}{s^2+a^2}$

$= \dfrac{s \cos b - a \sin b}{s^2+a^2}$

5) $L\{\sin 2t \cdot \sin 3t\}$ **काढा.**

उत्तर: $L\{\sin 2t \cdot \sin 3t\}$

अंश आणि छेद यांना 2 ने गुणा

$= \frac{1}{2} L\{2 \sin 3t . \sin 2t\}$

$= \frac{1}{2} L\{\cos(3t-2t) - \cos(3t+2t)\} \quad \because \quad 2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

$= \frac{1}{2} L\{\cos t - \cos 5t\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1^2} - \frac{s}{s^2+5^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+25}\right)$

$= \frac{s}{2}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+25}\right)$

6) L {cos 5t . cos 3t} काढा.

उत्तर: L {cos 5t . cos 3t}

$= \frac{1}{2}$ L {2 cos 5t . cos 3t} अंश आणि छेद यांना 2 ने गुणा

$= \frac{1}{2}$ L {cos(5t + 3t) + cos(5t − 3t)} $\because$ 2 cos A cos B = cos(A + B) + cos(A − B)

$= \frac{1}{2}$ L {cos8t + cos2t}

$= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+8^2} + \frac{s}{s^2+2^2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+64} + \frac{s}{s^2+4}\right)$

7) L $\{e^{-3t}t^2\}$ काढा.

उत्तर: Here, $f(t) = t^2$

$\therefore \quad \bar{f}(s) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार

म्हणजेच L $\{e^{-at} f(t)\} = \bar{f}(s + a)$

$\therefore \quad$ L $\{e^{-3t}t^2\} = \frac{2}{(s+3)^3}$

8) L$\{e^{-4t}t^2\}$ काढा.

उत्तर: इथे, $f(t) = t^2$

$\therefore \quad \bar{f}(s) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार

म्हणजेच L $\{e^{-at} f(t)\} = \bar{f}(s + a)$

$\therefore \quad$ L $\{e^{-4t}t^2\} = \frac{2}{(s+4)^3}$

9) $L\{e^{3t}(t^2+t)\}$ काढा.

उत्तर: इथे, $f(t) = t^2 + t$

$\therefore \quad \bar{f}(s) = \frac{2!}{s^3} + \frac{1!}{s^2} = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार

म्हणजेच $L\{e^{-at} f(t)\} = \bar{f}(s+a)$

$\therefore \quad L\{e^{-4t}(t^2+t)\} = \frac{2}{(s+4)^3} + \frac{1}{(s+4)^2}$

10) $L\{e^{-2t}\sin 4t\}$ काढा.

उत्तर: इथे, $f(t) = \sin 4t$

$\therefore \quad \bar{f}(s) = \frac{4}{s^2+4^2} = \frac{4}{s^2+16}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार

म्हणजेच $L\{e^{-at} f(t)\} = \bar{f}(s+a)$

$\therefore \quad L\{e^{-2t}\sin 4t\} = \frac{4}{(s+2)^2+16}$

$\Rightarrow \quad L\{e^{-2t}\sin 4t\} = \frac{4}{s^2+4s+20}$

11) $L\{e^{-3t}\sin 2t\}$ काढा.

उत्तर: इथे, $f(t) = \sin 2t$

$\therefore \quad \bar{f}(s) = \frac{2}{s^2+2^2} = \frac{2}{s^2+4}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार

म्हणजेच $L\{e^{-at} f(t)\} = \bar{f}(s+a)$

$\therefore \quad L\{e^{-3t}\sin 2t\} = \frac{2}{(s+3)^2+4}$

$\Rightarrow \quad L\{e^{-3t}\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+6s+13}$

12) $L\{e^t \cos 2t\}$ काढा.

उत्तर: इथे, $f(t) = \cos 2t$

$\therefore \quad \bar{f}(s) = \frac{s}{s^2 + 2^2} = \frac{s}{s^2 + 4}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार,

म्हणजेच $L\{e^{at} f(t)\} = \bar{f}(s - a)$

$\therefore \quad L\{e^t \cos 2t\} = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 4}$

$\Rightarrow \quad L\{e^t \cos 2t\} = \frac{s - 1}{s^2 - 2s + 5}$

13) $L\{e^{-3t}(2\cos 5t - 3\sin 5t)\}$ काढा.

उत्तर: इथे, $f(t) = 2\cos 5t - 3\sin 5t$

$\therefore \quad \bar{f}(s) = 2\frac{s}{s^2 + 5^2} - 3\frac{5}{s^2 + 5^2} = \frac{2s - 15}{s^2 + 25}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार,

म्हणजेच $L\{e^{-at} f(t)\} = \bar{f}(s + a)$

$\therefore \quad L\{e^{-3t}(2\cos 5t - 3\sin 5t)\} = \frac{2(s + 3) - 15}{(s + 3)^2 + 25}$

$\Rightarrow \quad L\{e^{-3t}(2\cos 5t - 3\sin 5t)\} = \frac{2s - 9}{s^2 + 6s + 34}$

14) $L\{\sinh 2t \cdot \cos 3t\}$ काढा.

उत्तर: इथे, $f(t) = \sinh 2t \cdot \cosh 3t = \left\{\left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right)\cos 3t\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2}\{L(e^{2t}\cos 3t) - L(e^{-2t}\cos 3t)\}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार,

$\therefore \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{2}\left\{\frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 3^2} - \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 3^2}\right\}$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{2}\left\{\frac{s - 2}{s^2 - 4s + 13} - \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 13}\right\}$

सराव प्रश्नसंच

खाली दिलेल्या उदाहरणांचे लाप्लास रूपांतर काढा.

1) $1 + 2e^{2t} - 3t^4$

2) $2 + 3t - e^{-t}$

3) $3e^{2t} - 2\sin 3t$

4) $4t^2 - 6e^{2t}$

5) $\sin 2t + \cos 3t$

6) $4\sin 3t - 3\cos 2t$

7) $3\cos 2t + 2e^{3t}$

8) $\cos(2t + \alpha)$

9) $\sin(2t + 3)$

10) $\sin(3t)\cos(2t)$

11) $\sin(4t)\cos(2t)$

12) $\sin(3t)\cos(4t)$

13) $\cos(t)\cos(2t)$

14) $e^t . t^2$

15) $t^2 e^{-4t}$

16) $e^{-t}\cos 2t$

17) $e^{-2t}\sin 4t$

18) $e^{-t}\sin 3t$

19) $t \cdot \cosh 2t$

20) $\sinh 3t \cos 2t$

21) $e^{6t}\{\cosh 2t + \cosh 4t\}$

22) $e^{-3t}\{3\cos 4t - 2\sin 6t\}$

- **व्यस्त लाप्लास रूपांतर (Inverse Laplace Transform):**

व्याख्या (Definition): जर $L\{f(t)\} = \bar{f}(s)$ असेल तर $L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$ यास $f(t)$ फल चे व्यस्त लाप्लास रूपांतर असे म्हणतात.

- **प्रमाण फलांचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर (Inverse L. T. of Standard Functions):**

1) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$; $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

2) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

3) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$; $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}$

4) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$

5) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$

6) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \frac{\sinh at}{a}$

7) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$

- **व्यस्त लाप्लास रूपांतर चे गुणधर्म (Properties of Inverse L. T. Functions):**

1) एकमितीत्व गुणधर्म **Linearity Property:**

जर $L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$ आणि $L^{-1}\{\bar{g}(s)\} = g(t)$ असेल तर

$$L^{-1}\{a \cdot \bar{f}(s) + b \cdot \bar{g}(s)\} = a \cdot L^{-1}\{\bar{f}(s)\} + b \cdot L^{-1}\{\bar{g}(s)\}$$

$$= a \cdot f(t) + b \cdot g(t)$$

2) **प्रथम विस्थापन गुणधर्म (First Shifting Property):**

जर $L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$ असेल तर

$L^{-1}\{\bar{f}(s-a)\} = e^{at} \cdot f(t)$ आणि $L^{-1}\{\bar{f}(s+a)\} = e^{-at} \cdot f(t)$

3) **'t' विभाजन गुणधर्म (Division by 't' Property):**

जर $L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$ असेल तर

$$L^{-1}\{\int_0^\infty \bar{f}(s)ds\} = \frac{f(t)}{t}$$

4) **संकलनाचे लाप्लास रूपांतर (L. T. of Integration):**

जर $L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$ असेल तर

$$L^{-1}\left\{\frac{\bar{f}(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(t)\,dt$$

5) **'t' गुणन गुणधर्म (Multiplication by 't' Property):**

जर $L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = f(t)$ असेल तर

$$L^{-1}\left(\frac{d^n}{ds^n}\{\bar{f}(s)\}\right) = (-1)^n.t^n.f(t)$$

उदा. $L^{-1}\left(\frac{d}{ds}\{\bar{f}(s)\}\right) = -t \cdot f(t)$

सोडविलेले उदाहरणे

1) $\mathbf{L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}+\frac{6}{s^3}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s^3}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\}=L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+L^{-1}\left(\frac{6}{s^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\}=L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+6\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=e^{2t}+6\cdot\left(\frac{t^2}{2!}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=e^{2t}+6\cdot\left(\frac{t^2}{2\times 1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=e^{2t}+3t^2$$

2) $\mathbf{L^{-1}\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-5}\right)\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-5}\right)$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-5}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\}=\frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-5}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=\frac{1}{8}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=\frac{1}{8}\{e^{3t}-e^{5t}\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t)=\frac{e^{3t}-e^{5t}}{8}$$

3) $\mathbf{L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+4}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \frac{5}{s^2+4}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = 5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = 5\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = 5\cdot\frac{\sin 2t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{5\sin 2t}{2}$$

4) $\mathbf{L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \frac{s}{s^2+2}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{\sin\sqrt{2}\,t}{\sqrt{2}}$$

5) $\mathbf{L^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+16}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \frac{8s}{s^2+16}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{8s}{s^2+16}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = 8\,L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = 8\cos(4t)$$

6) $\mathbf{L^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2+8}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \frac{3s-12}{s^2+8}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2+8}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+8}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{12}{s^2+8}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = 3\,L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{8})^2}\right\} - 12\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(\sqrt{8})^2}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = 3\cdot\cos(\sqrt{8}\,t) - 12\,\frac{\sin(\sqrt{8}\,t)}{\sqrt{8}}$

$\Rightarrow \quad f(t) = 3\cdot\cos(\sqrt{8}\,t) - \frac{12\sin(\sqrt{8}\,t)}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad f(t) = 3\cdot\cos(\sqrt{8}\,t) - 3\sqrt{2}\,\sin(\sqrt{8}\,t)$

7) $\mathbf{L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-4s+29}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \frac{5}{s^2-4s+29}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2-4s+29}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = 5\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+25}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = 5\cdot e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5^2}\right\}$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार,

$\Rightarrow \quad f(t) = 5\cdot e^{2t}\left(\frac{\sin 5t}{5}\right)$

$\Rightarrow \quad f(t) = e^{2t}\,\sin 5t$

8) $\mathbf{L^{-1}\left(\dfrac{s+2}{s^2-4s+13}\right)}$ काढा.

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \dfrac{s+2}{s^2-4s+13}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-4s+13}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{(s-2)+4}{(s-2)^2+9}\right\}$$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार,

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^{2t}\, L^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+3^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^{2t}\, L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2} + \frac{4}{s^2+3^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^{2t}\left\{\cos 3t + 4.\frac{\sin 3t}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^{2t}\left\{\cos 3t + \frac{4\sin 3t}{3}\right\}$$

9) $\mathbf{L^{-1}}\left\{\dfrac{4}{s^2-4s+29}\right\}$ काढा.

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \dfrac{4}{s^2-4s+29}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2-4s+29}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = 4.\, L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2+25}\right)$$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार,

$$\Rightarrow \quad f(t) = 4.\, e^{2t} L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+5^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = 4.\, e^{2t}\left(\frac{\sin 5t}{5}\right)$$

10) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+17}\right\}$ काढा.

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \frac{1}{s^2-2s+17}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रुपांतर घेऊ या.

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\,\bar{f}(s)\,\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+17}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+1+16}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+16}\right\}$$

प्रथम विस्थापन गुणधर्म (first shifting Property) नुसार,

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^t L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\ 16}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^t L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\ 4^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = e^t\left(\frac{\sin 4t}{4}\right)$$

11) $L^{-1}\left(\frac{2s+3}{(s+2)(s+6)}\right)$ काढा.

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \left(\frac{2s+3}{(s+2)(s+6)}\right)$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रुपांतर घेऊ या.

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\,\bar{f}(s)\,\} = L^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+2)(s+6)}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{-1/4}{s+2}+\frac{-9/-4}{s+6}\right\}$$ आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करून

$$\Rightarrow \quad f(t) = -\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{9}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+6}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{9}{4}e^{-6t}$$

12) $\mathbf{L^{-1}\left(\frac{s+3}{(s-2)(s-3)}\right)}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \left(\frac{s+3}{(s-2)(s-3)}\right)$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रुपांतर घेऊ या.

$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s-2)(s-3)}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{5/-1}{s-2} + \frac{6/1}{s-3}\right\}$ आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करुन

$\Rightarrow \quad f(t) = -5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 6L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = -5e^{2t} + 6e^{3t}$

$\Rightarrow \quad f(t) = 6e^{3t} - 5e^{2t}$

13) $\mathbf{L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रुपांतर घेऊ या.

$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1/2}{s} + \frac{1/-2}{s+2}\right\}$ आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करुन

$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2}\left\{L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$

$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{2}$

14) $\mathbf{L^{-1}\left\{\dfrac{2s+1}{s\,(s+1)}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \dfrac{2s+1}{s\,(s+1)}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रुपांतर घेऊ या.

$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\,\bar{f}(s)\,\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1/1}{s} + \dfrac{-1/-1}{s+1}\right\}$ आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करून

$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+1}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = 1 + e^{-t}$

15) $\mathbf{L^{-1}\left\{\dfrac{s^2+s-2}{s\,(s-2)(s+3)}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \dfrac{s^2+s-2}{s\,(s-2)\,(s+3)}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रुपांतर घेऊ या.

$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\,\bar{f}(s)\,\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s^2+s-2}{s\,(s-2)\,(s+3)}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{{-2}/{-2\cdot3}}{s} + \dfrac{{4}/{2\cdot5}}{s-2} + \dfrac{{4}/{-3\cdot-5}}{s+2}\right\}$ आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करून

$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\dfrac{1/3}{s} + \dfrac{2/5}{s-2} + \dfrac{4/15}{s+2}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + \frac{2}{5}L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} + \frac{4}{15}L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\}$

$\Rightarrow \quad f(t) = \dfrac{1}{3}(1) + \dfrac{2}{5}\cdot e^{2t} + \dfrac{4}{15}\cdot e^{-3t}$

$\Rightarrow \quad f(t) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2\,e^{2t}}{5} + \dfrac{4\,e^{-3t}}{15}$

16) $\mathbf{L^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)\,(s-2)(s-3)}\right\}}$ **काढा.**

उत्तर: दिलेले: $\bar{f}(s) = \dfrac{2s^2-4}{(s+1)\,(s-2)(s-3)}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\{\bar{f}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)\,(s-2)(s-3)}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{{-2}/{-3\cdot-4}}{s+1} + \frac{{4}/{3\cdot-1}}{s-2} + \frac{{14}/{4\cdot1}}{s-3}\right\}$$ आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करुन

$$\Rightarrow \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{{-1}/{6}}{s+1} + \frac{{-4}/{3}}{s-2} + \frac{{7}/{2}}{s-3}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = -\frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{7}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = -\frac{1}{6}\cdot e^{-t} - \frac{4}{3}\cdot e^{2t} + \frac{7}{2}\cdot e^{3t}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = -\frac{e^{-t}}{6} - \frac{4\,e^{2t}}{3} + \frac{7\,e^{3t}}{2}$$

सराव प्रश्नसंच

खाली दिलेल्या उदाहरणांचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर काढा.

1) $\frac{4}{s-1}$

2) $\frac{4}{s+4}$

3) $\frac{6}{s-3}$

4) $\frac{s^2+3s+2}{s^3}$

5) $\frac{8s}{s^2-16}$

6) $\frac{2s-5}{s^2-9}$

7) $\frac{s+2}{s^2+4s+40}$

8) $\frac{s+3}{s^2+4s+13}$

9) $\frac{s}{s^2-2s+2}$

10) $\frac{s-3}{s^2+2s+5}$

11) $\frac{2s+4}{s^2+4s-8}$

12) $\frac{2s-6}{s^2-6s+11}$

13) $\frac{1}{(s+2)^3} + \frac{25}{s^2+6s-16}$

14) $\frac{1}{(s+2)^3} + \frac{s+7}{s^2+6s+13}$

15) $\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$

16) $\frac{3s+1}{(s-4)(s+3)}$

17) $\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

18) $\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

19) $\frac{4s+1}{(s+1)(s-2)(s-3)}$

20) $\frac{s-1}{(s+4)(s+5)(s+6)}$

➢ लाप्लास रुपांतराचे उपयोजन(Applications of Laplace Transform):

लाप्लास रुपांतर (Laplace transform) आणि व्यस्त लाप्लास रुपांतर (Inverse Laplace transform) यांच्या संकल्पनेने स्थिर गुणांक (constant coefficient)असलेले सामान्य विकलक समीकरणे (ordinary differential equations) सहजपणे सोडविली जातात. येथे दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equations) लाप्लास रुपांतर घेऊन व प्रारंभिक अटींचा (initial conditions)वापर करुन समीकरणास प्रमाण स्वरुप (standard form) मिळते आणि मग दिलेल्या विकलक समीकरणाचे दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रुपांतर (Inverse Laplace transform)घेतल्या नंतर दिलेल्या विकलक समीकरणाचे निराकरण(solution) होते. या उद्देशाने लाप्लास रुपांतरचे खालील सूत्रे आपणास लक्षात ठेवावे लागतील.

$L\{y(t)\} = \bar{y}(s)$

$L\{y'(t)\} = s\bar{y}(s) - y(0)$

$L\{y''(t)\} = s^2\,\bar{y}(s) - sy(0) - y'(0)$

सोडविलेले उदाहरणे

1) लाप्लास रूपांतराचा वापर करून दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equation) निराकरण करा.

$\mathbf{3\frac{dx}{dt}+2x = e^{3t}}$ प्रारंभिक अट: $\mathbf{x = 1 \,;\, t = 0}$

उत्तर: दिलेले: $3\frac{dx}{dt} + 2x = e^{3t}; x(0) = 1$

दोन्ही बाजूंचे लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad 3L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 2\,L\,\{x\} = L\{\,e^{3t}\}$

$\Rightarrow \quad 3\{s\bar{x}(s) - x(0)\} + 2\,\bar{x}(s) = \frac{1}{s-3}$

$\Rightarrow \quad (3s+2)\bar{x}(s) - 3(1) = \frac{1}{s-3}$

$\Rightarrow \quad (3s+2)\bar{x}(s) = \frac{1}{s-3} + 3$

$\Rightarrow \quad (3s+2)\bar{x}(s) = \frac{1+3(s-3)}{s-3}$

$\Rightarrow \quad \bar{x}(s) = \frac{3s-8}{(s-3)\,(3s+2)}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad L^{-1}\{\,\bar{x}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{3s-8}{(s-3)\,(3s+2)}\right\}$,

$\Rightarrow \quad x(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{11}}{s-3} + \frac{\frac{-10}{-11/3}}{3s+2}\right\}$

$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{11}L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) + \frac{30}{11}\cdot\frac{1}{3}\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s+2/3}\right)$

$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{11}\,e^{3t} + \frac{10}{11}\,e^{-2t/3}$

2) लाप्लास रूपांतराचा वापर करून दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equation) निराकरण करा.

$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{2x} = \mathbf{e^{-t}}$; प्रारंभिक अट: $\mathbf{y(0) = 2}$

उत्तर: दिलेले: $\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t}; y(0) = 2$

दोन्ही बाजूंचे लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} + 2L\{x\} = L\{e^{-t}\}$,

$\Rightarrow \quad s\bar{x}(s) - x(0) + 2\,\bar{x}(s) = \frac{1}{s+1}$

$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{x}(s) - 2 = \frac{1}{s+1}$

$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{x}(s) = \frac{1}{s+1} + 2$

$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{x}(s) = \frac{1 + 2(s+1)}{s+1}$

$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{x}(s) = \frac{1 + 2s + 2}{s+1}$

$\Rightarrow \quad \bar{x}(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{x}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\right\}$

आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करून

$\Rightarrow \quad x(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{1}}{s+1} + \frac{\frac{-1}{-1}}{s+2}\right\}$

$\Rightarrow \quad x(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$

$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-t} + e^{-2t}$

3) लाप्लास रूपांतराचा वापर करून दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equation) निराकरण करा.

$\mathbf{\frac{dx}{dt} = 6t - 4}$; प्रारंभिक अट: $\mathbf{x(0) = -5}$

उत्तर: दिलेले: $\frac{dx}{dt} = 6t - 4$; $x(0) = -5$

दोन्ही बाजूंचे लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = L\{6t\} - L\{4\}$

$\Rightarrow \quad L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = 6\,L\{t\} - 4\,L\{1\}$

$\Rightarrow \quad s\bar{x}(s) - x(0) = \frac{6}{s^2} - \frac{4}{s}$

$\Rightarrow \quad s\bar{x}(s) + 5 = \frac{6 - 4s}{s^2}$

$\Rightarrow \quad s\bar{x}(s) = \frac{6 - 4s}{s^2} - 5$

$\Rightarrow \quad s\bar{x}(s) = \frac{6 - 4s - 5s^2}{s^2}$

$\Rightarrow \quad \bar{x}(s) = \frac{6 - 4s - 5s^2}{s^3}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{x}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{6 - 4s - 5s^2}{s^3}\right\}$

$\Rightarrow \quad x(t) = L^{-1}\left\{\frac{6}{s^3} - \frac{4s}{s^3} - \frac{5s^2}{s^3}\right\}$

$\Rightarrow \quad x(t) = L^{-1}\left\{\frac{6}{s^3} - \frac{4}{s^2} - \frac{5}{s}\right\}$

$\Rightarrow \quad x(t) = 6\,\frac{t^2}{2!} - 4t - 5$

$\Rightarrow \quad x(t) = 6\,\frac{t^2}{2 \times 1} - 4t - 5$

$\Rightarrow \quad x(t) = 3t^2 - 4t - 5$

4) लाप्लास रूपांतराचा वापर करून दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equation) निराकरण करा.

$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{2y} = \mathbf{e^{-t}}$; प्रारंभिक अट : $\mathbf{y(0) = 2}$

उत्तर: दिलेले: $\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}; y(0) = 2$

दोन्ही बाजूंचे लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2L\{y\} = L\{e^{-t}\}$

$\Rightarrow \quad s\bar{y}(s) - y(0) + 2\,\bar{y}(s) = \frac{1}{s+1}$

$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{y}(s) - 2 = \frac{1}{s+1}$

$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{y}(s) = \frac{1}{s+1} + 2$

$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{y}(s) = \frac{1+2(s+1)}{s+1}$

$\Rightarrow \quad (s+2)\bar{y}(s) = \frac{1+2s+2}{s+1}$

$\Rightarrow \quad \bar{y}(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{y}(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\right\}$

आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करून

$\Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{1}}{s+1} + \frac{\frac{-1}{-1}}{s+2}\right\}$

$\Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$

$\Rightarrow \quad y(t) = e^{-t} + e^{-2t}$

5) लाप्लास रूपांतराचा वापर करून दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equation) निराकरण करा.

$\frac{dy}{dt} - y = 3 \cdot e^{-2t}$; प्रारंभिक अट : $y(0) = -1$

उत्तर: दिलेले: $\frac{dy}{dt} - y = 3 \cdot e^{-2t}$; $y(0) = -1$

दोन्ही बाजूंचे लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - L\{y\} = 3\, L\{e^{-2t}\}$$

$$\Rightarrow \quad [s\bar{y}(s) - y(0)] - \bar{y}(s) = 3 \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad s\bar{y}(s) - (-1) - \bar{y}(s) = 3 \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad s\bar{y}(s) + 1 - \bar{y}(s) = 3 \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad (s-1)\bar{y}(s) + 1 = \frac{3}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad (s-1)\bar{y}(s) = \frac{3}{s+2} - 1$$

$$\Rightarrow \quad (s-1)\bar{y}(s) = \frac{3-(s+2)}{(s+2)}$$

$$\Rightarrow \quad (s-1)\bar{y}(s) = \frac{3-s-2}{(s+2)}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(s) = \frac{1-s}{(s+2)(s-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(s) = \frac{-1(s-1)}{(s+2)(s-1)}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}(s) = \frac{-1}{s+2}$$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$L^{-1}\{\bar{y}(s)\} = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = -e^{-2t}$$

6) लाप्लास रूपांतराचा वापर करून दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equation) निराकरण करा.

$\frac{\mathbf{dq}}{\mathbf{dt}} + \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{Rc}} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}$; प्रारंभिक अट : $\mathbf{q(0)}=0$

उत्तर: दिलेले: $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{Rc} = \frac{E}{R}$; $q(0) = 0$

दोन्ही बाजूंचे लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L\left\{\frac{dq}{dt}\right\} + L\left\{\frac{q}{Rc}\right\} = \frac{E}{R} L\{1\}$$

$$\Rightarrow \quad [s\,\bar{q}(s) - q(0)] + \frac{1}{Rc}\bar{q}(s) = \frac{E}{R}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad s\,\bar{q}(s) - 0 + \frac{1}{Rc}\bar{q}(s) = \frac{E}{R}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \left(s + \frac{1}{Rc}\right)\bar{q}(s) = \frac{E}{R\,s}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{q}(s) = \frac{E}{R\,s\left(s + \frac{1}{Rc}\right)}$$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{q}(s)\} = \frac{E}{R} L^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s + \frac{1}{Rc}\right)}\right\}$$

आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करून

$$\Rightarrow \quad q(t) = \frac{E}{R} L^{-1}\left\{\frac{{}^{1}/{}_{{}^{1}/{}_{Rc}}}{s} + \frac{{}^{1}/{}_{{}^{-1}/{}_{Rc}}}{s + \frac{1}{Rc}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \frac{E}{R} L^{-1}\left\{\frac{Rc}{s} + \frac{-Rc}{s + \frac{1}{Rc}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \frac{E}{R} Rc\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{Rc}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = Ec\left\{1 - e^{-\frac{t}{Rc}}\right\}$$

7) लाप्लास रूपांतराचा वापर करून दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equation) निराकरण करा.

$\mathbf{L\frac{di}{dt} + Ri = V}$; प्रारंभिक अट : $\mathbf{i(0) = 0}$

उत्तर: दिलेले: $L\frac{di}{dt} + Ri = V$; $i(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

दोन्ही बाजूंचे लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L\left\{\frac{di}{dt}\right\} + \frac{R}{L}L\{i\} = \frac{V}{L}L\{1\}$$

$$\Rightarrow \quad s\bar{\imath}(s) - i(0) + \frac{R}{L}\bar{\imath}(s) = \frac{V}{L}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \left(s + \frac{R}{L}\right)\bar{\imath}(s) - 0 = \frac{V}{L}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\imath}(s) = \frac{V}{L}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)}$$

दोन्ही बाजूंचे व्यस्त लाप्लास रूपांतर घेऊ या.

$$\therefore \quad L^{-1}\{\bar{\imath}(s)\} = \frac{V}{L}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)}\right\}$$

आंशिक अपूर्णांकांचा वापर करून

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{V}{L}L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{R/L}}{s} + \frac{\frac{1}{-R/L}}{s + \frac{R}{L}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{V}{L}\cdot\frac{L}{R}\left[L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s + \frac{R}{L}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{V}{R}\left\{1 - e^{-Rt/L}\right\}$$

सराव प्रश्नसंच

लाप्लास रूपांतराचा वापर करून खाली दिलेल्या विकलक समीकरणाचे (differential equation) निराकरण करा.

1) $\frac{dy}{dt} + y = \sin t,\ y(0) = 0$

2) $\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t},\ x(0) = 2$

3) $\frac{dy}{dt} + y = e^{3t},\ y(0) = 0$

4) $\frac{dx}{dt} - 4x = e^{5t},\ x(0) = 1$

5) $\frac{dx}{dt} - 4x = e^{3t},\ x = 1$ at $t = 0$

6) $\frac{dx}{dt} + 3x = 2 + e^{-t},\ x(0) = 1$

7) $\frac{dy}{dt} + 3y = 2t\,e^{-t},\ y(0) = 1$

8) $\frac{dy}{dt} - 3y = 9,\ y(0) = 0$

9) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-2x},\ y(0) = 0$

10) $\frac{di}{dt} + Ri = Ee^{-at};\ i(0) = 0,$

(LEARNING WEBSITES & PORTALS)

लर्निंग वेबसाइट्स आणि पोर्टल्स

Sr. No	Link/Portal	Description
1	http://nptel.ac.in/courses/106102064/1	Online Learning Initiatives by IITs and IISc
2	https://www.khanacademy.org/math?gclid=CNqHuabCys4CFdOJaddHo Pig	Concept of Mathematics through video lectures and notes
3	https://www.wolframalpha.com/	Solving mathematical problems, performing calculations, and visualizing mathematical concepts.
4	http://www.sosmath.com/	Free resources and tutorials
5	http://mathworld.wolfram.com/	Extensive math encyclopedia with detailed explanations of mathematical concepts
6	https://www.mathsisfun.com/	Explanations and interactive lessons covering various math topics, from basic arithmetic to advanced
7	http://tutorial.math.lamar.edu/	Comprehensive set of notes and tutorials covering a wide range of mathematics topics.
8	https://www.purplemath.com/	Purplemath is a great resource for students seeking help with algebra and other foundational mathematics to improve learning.
9	https://www.brilliant.org/	Interactive learning in Mathematics
10	https://www.edx.org/	Offers a variety of courses
11	https://www.coursera.org/	Coursera offers online courses in applied mathematics from universities and institutions around the globe.
12	https://ocw.mit.edu/index.htm	The Massachusetts Institute of Technology (MIT) offers free access to course materials for a wide range of mathematical courses.

SUGGESTED LEARNING MATERIALS/BOOKS

सुचविलेले शिक्षण साहित्य/पुस्तके

Sr. No	Author	Title	Publisher
1	Grewal B. S.	Higher Engineering Mathematics	Khanna publication New Delhi, 2013 ISBN:8174091955
2	Dutta. D	A text book of Engineering Mathematics	New age publication New Delhi, 2006ISBN: 978- 81-224-1689-3
3	Kreysizg, Ervin	Advance Engineering Mathematics	Wiley publication New Delhi 2016 ISBN:978-81- 265-5423-2
4	Das H.K.	Advance Engineering Mathematics	S Chand publication New Delhi 2008ISBN: 9788121903455
5	S. S. Sastry	Introductory Methods of Numerical Analysis	PHI Learning Private Limited, New Delhi.ISBN-978-81-203-4592-8
6	C. S. Seshadri	Studies in the History of Indian Mathematics	Hindustan Book Agency (lndia) P 19 GreenPark Extension New Delhi. ISBN 978-93- 80250-06-9
7	Marvin L. Bittinger David J.Ellenbogen Scott A. Surgent	Calculus and Its Applications	Addison-Wesley 10th Edition ISBN-13:978-0-321-69433-1
8	Gareth James, Daniela Witten,Trevor Hastie Robert andTibshirani	An Introduction to StatisticalLearning with Applications in R	Springer New York Heidelberg DordrechtLondonISBN 978-1-4614-7137-0 ISBN 978-1-4614-7138-7 (eBook)

HEAD OFFICE

Secretary,
Maharashtra State Board of Technical Education
49, Kherwadi, Bandra (East), Mumbai - 400 051
Maharashtra (INDIA)
Tel: (022)26471255 (5 -lines)
Fax: 022 - 26473980
Email: -secretary@msbte.com

Web -www.msbte.org.in

REGIONAL OFFICES:

MUMBAI

Deputy Secretary (T),
Mumbai Sub-region,
2nd Floor, Govt. Polytechnic Building,
49, Kherwadi, Bandra (East)
Mumbai - 400 051
Phone: 022-26473253 / 54
Email: rbtemumbai@msbte.com

PUNE

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education,
Regional Office,
412-E, Bahirat Patil Chowk,
Shivaji Nagar, Pune
Phone: 020-25656994 / 25660319
Fax: 020-25656994
Email: rbtepn@msbte.com

NAGPUR

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education
Regional Office,
Mangalwari Bazar, Sadar, Nagpur - 440 001
Phone: 0712-2564836 / 2562223
Fax: 0712-2560350
Email: rbteng@msbte.com

AURANGABAD

Deputy Secretary (T),
M.S. Board of Technical Education,
Regional Office,
Osmanpura, Aurangabad -431 001.
Phone: 0240-2334025 / 2331273
Fax: 0240-2349669
Email: rbteau@msbte.com